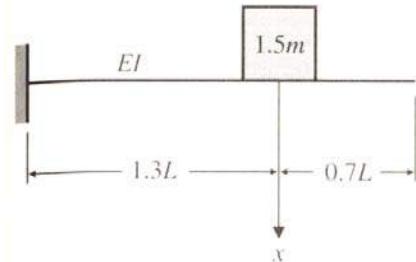


A) JEDNAŽBA GIBANJA I VLASTITA FREKVENCIJA

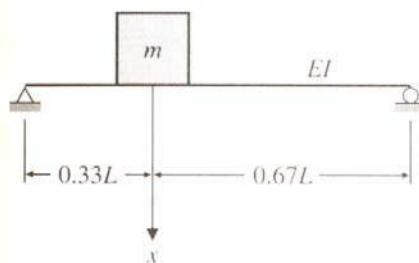
- A1 Konzolna greda zanemarive mase i krutosti na savijanje EI podržava teret mase $1,5m$. Napišite jednadžbu gibanja po D'Alambertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju.

Rješenje: $\ddot{x} + \frac{EI}{1,095mL^3}x = 0$



- A2 Prosta greda opterećena je teretom mase m . Napišite jednadžbu gibanja po D'Alambertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite krutost na savijanje EI i zanemarite masu grede.

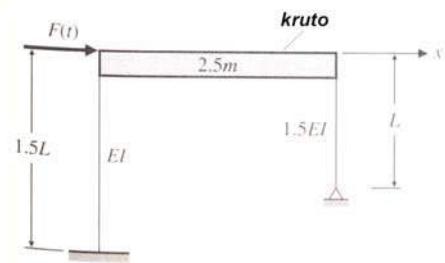
Rješenje: $\ddot{x} + \frac{EI}{0,0163mL^3}x = 0$



- A3 Za zadani okvir odredite jednadžbu gibanja po D'Alambertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite da je greda kruta, ukupne mase od $2,5m$, $E=206,84\text{GPa}$, $I=6,25 \cdot 10^{-5}\text{m}^4$, $L=3,7\text{m}$, $m=10\text{kg}$.

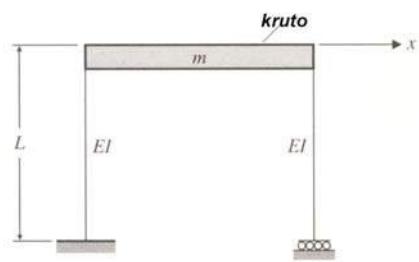
$$\omega = 286,77 \text{ rad/s}$$

Rješenje: $\ddot{x} + 82236,55x = \frac{F(t)}{m}$



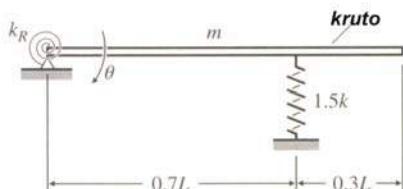
- A4 Za zadani okvir odredite jednadžbu gibanja po D'Alambertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite da je greda kruta, ukupne mase m . Krutost na savijanje vertikalnih elemenata je EI .

Rješenje: $\ddot{x} + \frac{24EI}{mL^3}x = 0$



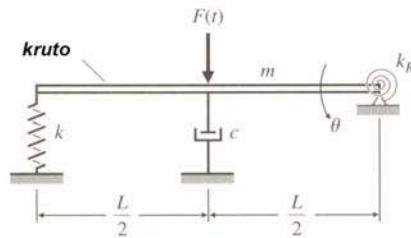
- A5 Kruta greda mase m djelomično je upeta rotacijskom oprugom k_R na zglobnom ležaju te pridržana translacijskom oprugom krutosti $1,5k$. Odredite jednadžbu gibanja D'Alambertovim principom te izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite male rotacije.

Rješenje: $\ddot{\theta} + \frac{2,205kL^2 + 3k_R}{mL^2}\theta = 0$



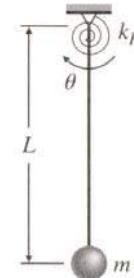
- A6 Pomoću D'Alamberovog principa odredite jednadžbu gibanja zadanog sustava i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Greda je kruta ukupne mase m . Prepostavite male rotacije.

$$Rješenje: \quad \ddot{\theta} + \frac{3c}{8m} \dot{\theta} + 3 \frac{kL^2 + k_R}{mL^2} \theta = \frac{3F(t)}{2mL}$$



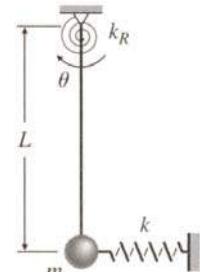
- A7 Kruta greda bez mase, duljine L na svom kraju je opterećena koncentriranom masom m . Na mjestu zglobnog ležaja, rotacija grede je djelomično spriječena rotacijskom oprugom krutosti k_R . D'Alambetovim principom odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite male oscilacije.

$$Rješenje: \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL + k_R}{mL^2} \theta = 0$$



- A8 Kruta greda bez mase, duljine L na svom kraju je opterećena koncentriranom masom m koja je horizontalno pridržana translacijskom oprugom krutosti k . Na mjestu zglobnog ležaja, rotacija grede je djelomično spriječena rotacijskom oprugom krutosti k_R . Energetskom metodom odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite male oscilacije.

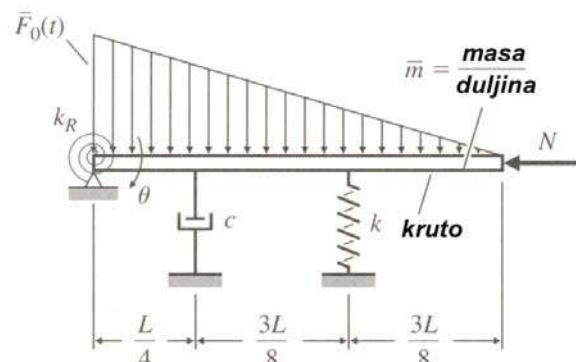
$$Rješenje: \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL + kL^2 + k_R}{mL^2} \theta = 0$$



- A9 Principom virtualnih pomaka odredite jednažbu gibanja krute grede na slici te izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Greda je opterećena jednolikom raspoređenim vremenski promjenjivim trokutastim opterećenjem i konstantnom horizontalnom silom. Prepostavite male kutove rotacije.

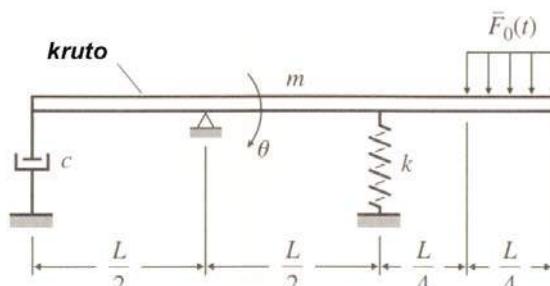
Rješenje:

$$\frac{\bar{m}L^3}{3} \ddot{\theta} + \frac{cL^2}{16} \dot{\theta} + \left(\frac{25kL^2}{64} + k_R - NL \right) \theta = \frac{\bar{F}_0(t)L^2}{6}$$



- A10 Kruta greda mase m izložena je djelovanju vremenski promjenjivog linijski raspoređenog opterećenja maksimalne amplitudne $F_0(t)$. Principom virtualnih pomaka odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Prepostavite male kutove rotacije.

$$Rješenje: \quad \frac{7m}{12} \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k \theta = \frac{7\bar{F}_0(t)}{8}$$



B) NEPRIGUŠENE SLOBODNE VIBRACIJE

B1 Koncentrirana je masa od **10kg** pridržana linijskom oprugom. Sustav je pobuden početnom brzinom bez početnog pomaka. Nastalo je gibanje s periodom od **0,2s** te amplitudom vibracija od **60mm**. Odredite:

- a) krutost opruge
- b) početnu brzinu.

Rješenje:

- a) $k = 9869,6 \text{ N/m}$
- b) $x'_0 = 1885,0 \text{ mm/s}$

B2 Jednostavni sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od mase i linijske opruge i oscilira s maksimalnim ubrzanjem od **1,5m/s²** te vlastitom frekvencijom od **100Hz**. Odredite:

- a) amplitudu pomaka
- b) maksimalnu brzinu mase.

Rješenje:

- a) $X = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- b) $x'_{max} = 0,0024 \text{ m/s}$

B3 Koncentrirana je masa **m** pridržana linijskom oprugom krutosti **k**. Izmjeren je vlastiti period sustava od **0,35s**. Kada se masi pridoda teret težine **10N**, period se sustava poveća za 10%. Odredite:

- a) težinu početne mase **m**
- b) početnu krutost sustava **k**.

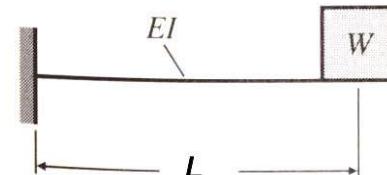
Rješenje:

- a) $G = 47,72 \text{ N}$
- c) $k = 1567,0 \text{ N/m}$

B4 Konzoli na slici dan je početni pomak na slobodnom kraju od **5cm** s početnom brzinom od **10cm/s** u istom smjeru. Odredite:

- a) vlastitu frekvenciju slobodnih vibracija sustava
- b) maksimalni pomak, brzinu i ubrzanje mase
- c) fazni kut.

Prepostavite da je **E=206,8 GPa**, **I=0,001m⁴**, **L= 3,0m**, **W=3,4kN**.



Rješenje:

- a) $f = 41,0 \text{ Hz}$
- b) $x_{max} = 5,0 \text{ cm}; x'_{max} = 1287,4 \text{ cm/s}; x''_{max} = 331479,8 \text{ cm/s}^2$
- c) $\varphi = 1,563 \text{ rad}$

B5 Teretu težine **200N** obješenom o linijsku oprugu dana je početna brzina od **5m/s** bez početnog pomaka. Izmjeren je vlastiti period vibracija od **0,3s**. Odredite:

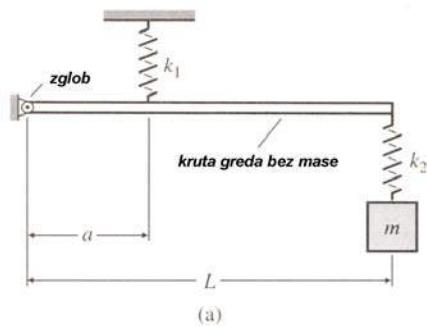
- a) krutost opruge
- b) amplitudu pomaka vibracija
- c) brzinu i ubrzanje mase u trenutku **t=0,5s**.

Rješenje:

- a) $k = 8942,90 \text{ N/m}$
- b) $X = 0,239 \text{ m}$
- c) $x'(t=0,5) = -2,511 \text{ m/s}; x''(t=0,5) = 90,654 \text{ m/s}^2$

B6 Za sustave na slici odredite:

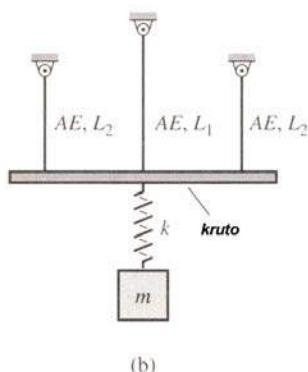
- a) zamjenjujuću krutost opruge
- b) jednadžbu gibanja
- c) vlastitu kružnu frekvenciju vibracija.



$$Rješenje: \quad k_e = \frac{a^2 k_1 k_2}{a^2 k_1 + L^2 k_2}$$

$$\ddot{x} + \frac{a^2 k_1 k_2}{m(a^2 k_1 + L^2 k_2)} x = 0$$

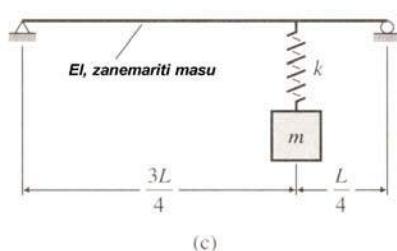
$$\omega = \sqrt{\frac{a^2 k_1 k_2}{m(a^2 k_1 + L^2 k_2)}} \text{ (rad/s)}$$



$$Rješenje: \quad k_e = \frac{AEk(2L_1 + L_2)}{L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2)}$$

$$\ddot{x} + \frac{AEk(2L_1 + L_2)}{m(L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2))} x = 0$$

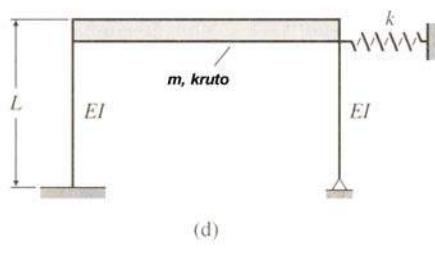
$$\omega = \sqrt{\frac{AEk(2L_1 + L_2)}{m(L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2))}} \text{ (rad/s)}$$



$$Rješenje: \quad k_e = \frac{256EIk}{3L^3k + 256EI}$$

$$\ddot{x} + \frac{256EIk}{m(3L^3k + 256EI)} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{256EIk}{m(3L^3k + 256EI)}} \text{ (rad/s)}$$



$$Rješenje: \quad k_e = \frac{15EI + k}{L^3}$$

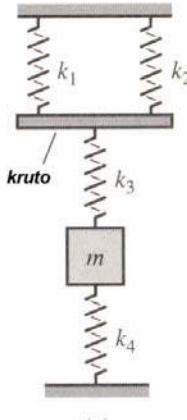
$$\ddot{x} + \frac{15EI + k}{mL^3} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{15EI + k}{mL^3}} \text{ (rad/s)}$$

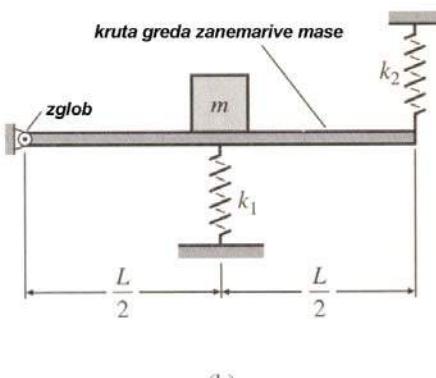
B7 Za sustave na slici odredite:

- a) zamjenjujuću krutost opruge
- b) jednadžbu gibanja
- c) vlastitu kružnu frekvenciju vibracija.

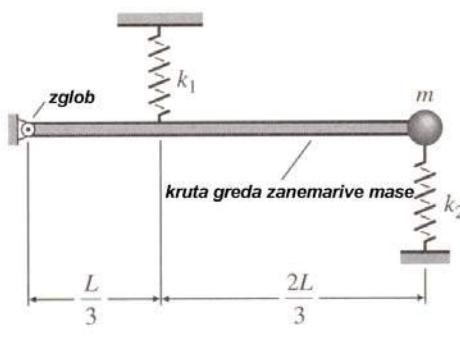
Rješenja:



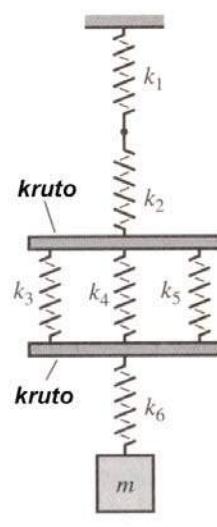
(a)



(b)



(c)



(d)

$$a) \quad k_e = \frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{k_1 + k_2 + k_3}$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{m(k_1 + k_2 + k_3)} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{m(k_1 + k_2 + k_3)}} \text{ (rad/s)}$$

$$b) \quad k_e = k_1 + 4k_2$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + 4k_2}{m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{m}} \text{ (rad/s)}$$

$$c) \quad k_e = \frac{k_1 + 9k_2}{9}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + 9k_2}{9m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 9k_2}{9m}} \text{ (rad/s)}$$

$$d) \quad k_e = \frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{[(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6]m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{[(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6]m}} \text{ (rad/s)}$$

C) PRIGUŠENE SLOBODNE VIBRACIJE

- C1 Viskozno prigušeni sustav s jednim stunjem slobode uslijed vlastite težine od **220N** ima statički progib od **1,9cm**. Odredite vrijednost kritičnog prigušenja zadanog sustava.

Rješenje: $C_c = 1019,2 \text{ Ns/m}$

- C2 Slabo prigušeni konstrukcijski sustav težine **22,2N**, krutosti **$k=3502,6\text{N/m}$** i viskoznog prigušenja **$c=35,0\text{Ns/m}$** dobije početni pomak od **5,1cm**. Odredite amplitudu vibracija nakon 10 i nakon 20 oscilacija.

Rješenje: $X(n=10) = 1,726 \cdot 10^{-5} \text{ cm}; X(n=20) = 5,689 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$

- C3 Odredite omjer uzastopnih amplituda vibracija viskozno prigušenog sustava kojem je logaritamski dekrement prigušenja **$\delta=0,3$** .

Rješenje: **1,35**

- C4 Sustav koji vibrira spojen je s uređajem za viskozno prigušenje s mogućnošću skaliranja. Za zadani nivo prigušenja, omjer je uzastopnih amplituda vibracija 1:5. Odredite novonastali omjer uzastopnih amplituda ako se veličina prigušenja udvostruči.

Rješenje: **1 : 36**

- C5 Viskozno prigušeni konstrukcijski sustav prigušenja **$c=14,0\text{Ns/m}$** , čine masa težine **178,0N** i opruga krutosti **$k=17513,0\text{N/m}$** . Sustav slobodno vibrira uslijed početnog pomaka od **10cm**. Odredite amplitude vibracija nakon 10, 15 i 20 ciklusa.

Rješenje: $X(n=10) = 4,59 \text{ cm}; X(n=15) = 3,11 \text{ cm}; X(n=20) = 2,11 \text{ cm}$

- C6 Viskozno prigušeni konstrukcijski sustav s težinom od **444,8N** uslijed vlastite težine poprimi statički progib od **1,3cm**. Nakon toga je masi dan početni pomak od **0,6cm** što je dovelo do vibriranja sustava. Nakon 3 ciklusa, izmjerena je amplituda slobodnih vibracija od **0,25cm**. Odredite:

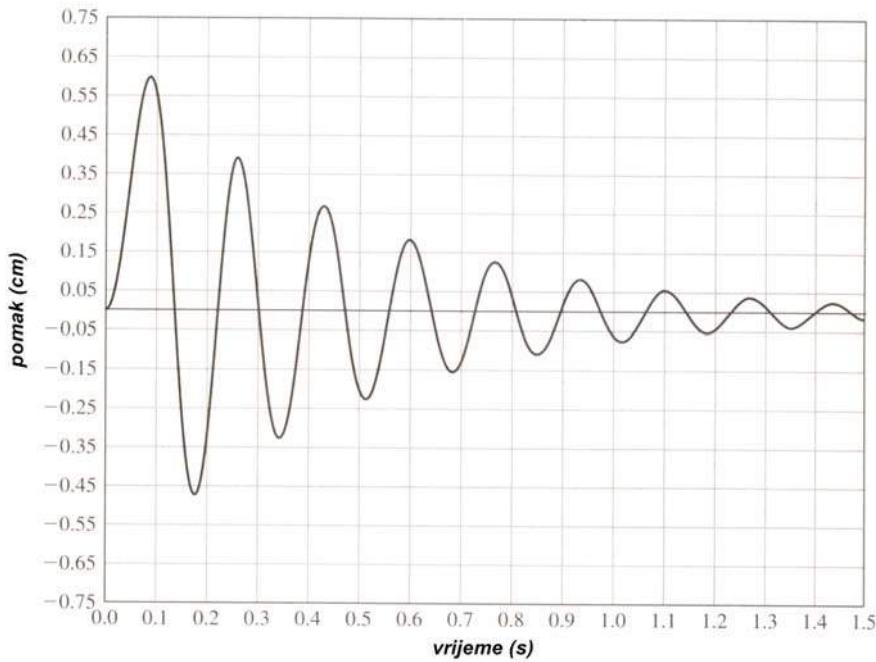
- logaritamski dekrement prigušenja **δ**
- bezdimenzionalni koeficijent prigušenja **ζ**
- koeficijent viskoznog prigušenja **c**
- frekvenciju prigušenih vibracija.

Rješenje: a) $\delta = 0,292$; b) $\zeta = 4,6\%$; c) $c = 114,6\text{Ns/m}$; d) $f_D = 4,37\text{Hz}$

- C7 Konstrukcija s viskoznim prigušenjem slobodno vibrira uslijed početne brzine. Nastale prigušene oscilacije prikazane su na slici. Odredite:

- vlastiti period vibracija
- logaritamski dekrement prigušenja
- bezdimenzionalni koeficijent prigušenja **ζ**

Rješenje: a) $T_D = 0,17s$; b) $\delta = 0,414$; c) $\zeta = 6,6\%$



- C8 Teret težine $W=20\text{N}$ ovješen je o oprugu krutosti $k=130\text{N/m}$ te mu je zadan početni pomak od $6,4\text{cm}$ nakon čega nastavlja slobodno oscilirati. Nakon 150 ciklusa oscilacija, amplituda vibracija iznosi $3,2\text{cm}$. Odredite koeficijent histerezisnog prigušenja i ekvivalentni koeficijent viskoznog prigušenja.

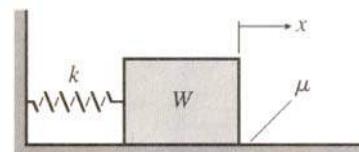
Rješenje: $\eta = 0,0015; c_e = 0,024\text{Ns/m}$

- C9 Konstrukcija s histerezisnim prigušenjem ima period vibracija od $0,5\text{s}$. Praćenjem slobodnih vibracija zabilježena je amplituda desetog ciklusa veličine 90% od amplitude prvog ciklusa. Odredite koeficijent histerezisnog prigušenja.

Rješenje: $\eta = 0,0033$

- C10 Konstrukcijski sustav na slici ima masu težine $W=6,7\text{kN}$, krutost $k=613,0\text{kN/m}$ i koeficijent trenja između mase i podloge $\mu=0,15$. Masa je pomaknuta iz svog stanja statičke ravnoteže početnim pomakom od $19,1\text{cm}$ te otpuštena. Odredite:

- amplitudu pomaka vibracija nakon 5 ciklusa
- broj ciklusa do mirovanja mase.



Rješenje: a) $X(n=5) = 15,8\text{cm}; b) n=29,1$

D) ODZIV NA HARMONIJSKU UZBUDU

- D1 Na neprigušeni sustav s jednim stupnjem slobode djeluje harmonijska sila amplitude $F_0=80N$ i frekvencije 8 okretaja/s . Masa je 6kg a krutost opruge $3N/m$. Odredite amplitudu pomaka trajnog dijela odziva X_f .

$$\text{Rješenje:} \quad X_f = 5,3\text{mm}$$

- D2 Amplituda pomaka trajnog dijela odziva neprigušenog sustava iznosi $1,27\text{cm}$. Ako je krutost opruge $3502,6\text{N/m}$ a harmonijska uzbudna sila oblika $222,4\sin 3t [\text{N}]$, izračunajte težinu mase.

$$\text{Rješenje:} \quad W = 15,12\text{kN}$$

- D3 Sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od opruge krutosti $4378,25\text{N/m}$ i koncentrirane mase težine $89,0\text{N}$ i izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=133,4\text{N}$ i frekvencije 120Hz . Odredite:

- a) amplitudu trajnog dijela pomaka
- b) potrebnu težinu mase kojom bi se amplituda vibracija smanjila za 50%.

$$\text{Rješenje:} \quad a) X_f = 2,59 \cdot 10^{-5}\text{m}; b) G = 177,87\text{N}$$

- D4 Neprigušeni sustav s masom od 10kg i oprugom krutosti $k=4,0\text{kN/m}$, izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=0,5\text{kN}$. Tijekom odziva, izmjerena je amplituda pomaka trajnog dijela od 11cm . Odredite frekvenciju uzbudne sile.

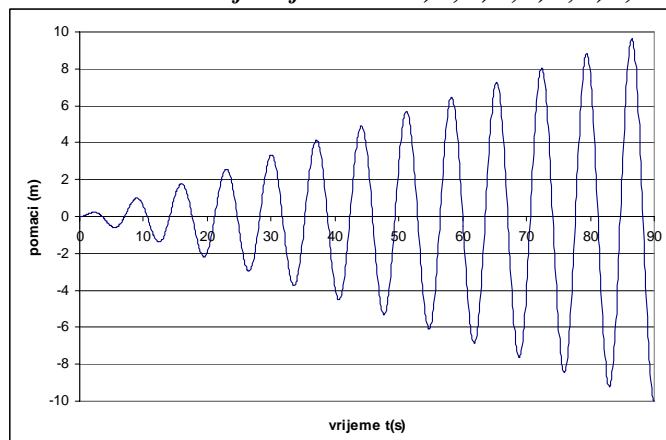
$$\text{Rješenje:} \quad \Omega = 64,4 \text{ rad/s}$$

- D5 Neprigušeni sustav s masom od 10kg i oprugom krutosti $k=8,0\text{N/mm}$, izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=200\text{N}$ i kružne frekvencije od 35rad/s . Za početne uvjete $x(0)=21\text{mm}$ i $x'(0)=175\text{mm/s}$, izračunajte ukupni pomak, brzinu i ubrzanje mase za a) $t=2\text{s}$, b) $t=4\text{s}$ i c) $t=6\text{s}$.

$$\begin{aligned} \text{Rješenje:} \quad & a) x(t=2) = -63,71\text{mm}; x'(t=2) = 770,51\text{mm/s}; x''(t=2) = 27123,46\text{mm/s}^2 \\ & b) x(t=4) = -23,56\text{mm}; x'(t=4) = 2128,90\text{mm/s}; x''(t=4) = 38409,59\text{mm/s}^2 \\ & c) x(t=6) = 1,22\text{mm}; x'(t=6) = 3248,73\text{mm/s}; x''(t=6) = 8361,91\text{mm/s}^2 \end{aligned}$$

- D6 Sustav s jednim stupnjem slobode s masom od 10kg i oprugom krutosti $k=8\text{N/m}$ u rezonanciji je s uzbudnom harmonijskom silom amplitude $F_0=2,0\text{N}$. Izračunajte pomake trajnog dijela odziva nakon a) $2 \frac{1}{2}$ ciklusa, b) $5 \frac{1}{2}$ ciklusa, c) $8 \frac{1}{2}$ ciklusa i d) $8 \frac{1}{4}$ ciklusa.

$$\text{Rješenje:} \quad a) 0; b) 0; c) 0; d) 6,46\text{m}$$



- D7 Neprigušeni je sustav uzbuden blizu rezonancije što je rezultiralo njegovim pulziranjem. Vlastita je kružna frekvencija sustava **1800 okretaja/min** dok je frekvencija uzbudne sile **1785 okretaja/min**. Odredite period pulziranja i broj oscilacija jednog pulsa.

Rješenje: $7,95\text{s}; 236,6 \text{ oscilacija}$

- D8 Omjer amplituda pomaka trajnog dijela odziva za $r=0,5$ i $r=1$ iznosi **1:4** zadanog viskozno prigušenog sustava. Odredite bezidmensionalni koeficijent prigušenja sustava ζ .

Rješenje: $\zeta = 9,4\%$

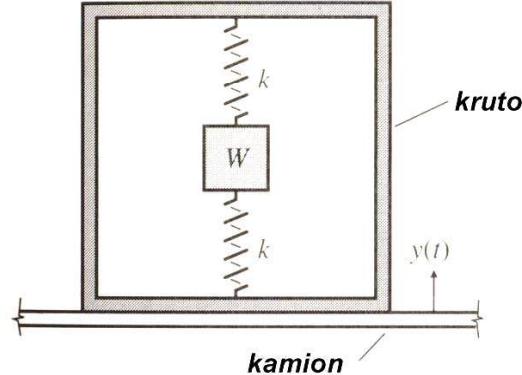
- D9 Sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od mase težine **444,8N**, opruge krutosti **$k=2627,0\text{N/m}$** i viskoznog prigušivača s koeficijentom prigušenja **$c=8,8\text{Ns/m}$** . Ako se sustav uzbudi harmonijskom silom amplitude **$F_0=111,2\text{N}$** , odredite amplitudu pomaka trajnog dijela odziva pri rezonanciji.

Rješenje: $X_f = 1,615\text{m}$

- D10 Viskozno prigušeni sustav uzbuden je harmonijskom silom $\mathbf{F}(t)=F_0\sin\Omega t$. Amplituda pomaka trajnog dijela odziva pri rezonanciji iznosi **1,9cm** dok je pri 75% rezonantne frekvencije izmjerena amplituda pomaka od **1,6cm**. Odredite veličinu bezdimenzionalnog koeficijenta prigušenja $\zeta(\%)$ sustava.

Rješenje: $\zeta = 23,8\%$

- D11 Specijalni teret težine **222,4N** pričvršćen je u zatvorenoj kutiji s dvije opruge podjednakih krutosti **$k=43782,5\text{N/m}$** (vidi sliku). Kutija se nalazi na kamionu koji tijekom vožnje izaziva vertikalne harmonijske vibracije amplitude $y(t)=3,8\sin 4t \text{ [cm]}$. Odredite maksimalni pomak, brzinu i ubrzanje tereta u kutiji.

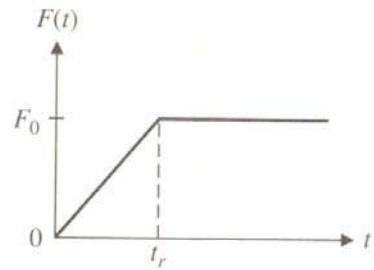


Rješenje: $X_{max}=3,816\text{cm}; X'_{max}=15,264\text{cm/s}; X''_{max}=-61,056\text{cm/s}^2$

E) ODZIV NA OPĆU DINAMIČKU UZBUDU

- E1 Odredite jednadžbe pomaka neprigušenog sustava pod djelovanjem promjenjivog opterećenja sa slike pomoću Duhamelovog integrala.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_r}, & 0 \leq t \leq t_r \\ F_0, & t_r < t \end{cases}$$

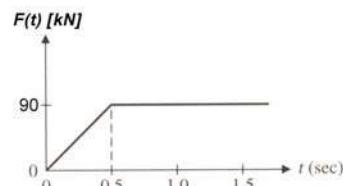
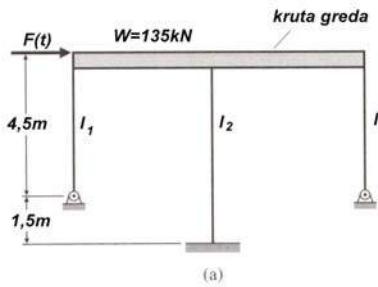


Rješenje:

$$x(t) = \frac{F_0}{kt_r} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad 0 \leq t \leq t_r$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega t_r} [\sin \omega(t - t_r) - \sin \omega t] \right\}, \quad t_r < t$$

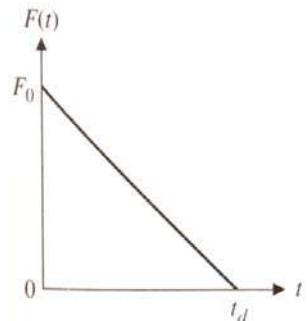
- E2 Primjenom jednadžbi pomaka iz prethodnog zadatka (E1), odredite horizontalni pomak okvira u trenutku $t=0,7s$. Nosivi se okvir sastoji od krute grede težine $W=135 \text{ kN}$ i fleksibilnih stupova ($E=206844 \text{ MPa}$, $I_1=3446 \text{ cm}^4$, $I_2=7076 \text{ cm}^4$); utjecaj prigušenja zanemarite.



Rješenje: $x(0,7s) = 0,078m$

- E3 Odredite jednadžbe pomaka neprigušenog sustava pod djelovanjem promjenjivog trokutastog pulsa sa slike pomoću Duhamelovog integrala.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right), & 0 \leq t \leq t_d \\ 0, & t_d < t \end{cases}$$

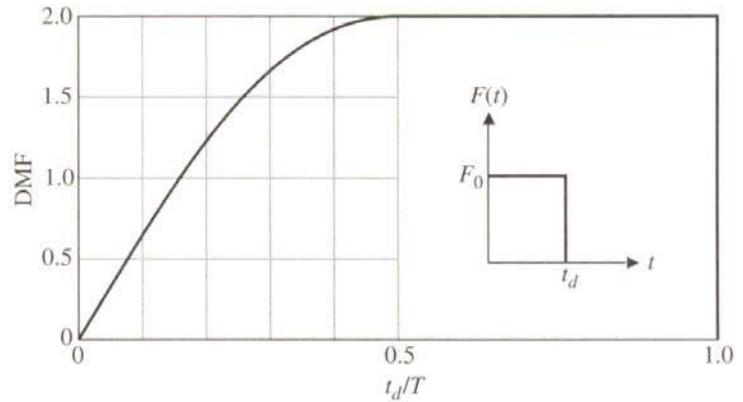


Rješenje:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \omega t - \frac{t}{t_d} + \frac{\sin \omega t}{\omega t_d} \right), \quad 0 \leq t \leq t_d$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k \omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d) - \omega t_d \cos \omega t], \quad t_d < t$$

- E4 Odredite maksimalni horizontalni pomak okvira iz zadatka (E2) izloženog djelovanju pravokutnog pulsnog opterećenja pomoću njegovog spektra odziva prikazanog na slici. Pretpostavite da je $F_0 = 67\text{kN}$ a $t_d = 0,45\text{s}$.



Rješenje: $x_{max} = 0,087 \text{ m}$

