5. ODZIV NA HARMONIJSKU UZBUDU

Deterministička dinamička opterećenja mogu biti:

a) ***Periodička*** **(ponovljiva s višeciklusnom promjenom jedne amplitude)**

- harmonijska

- neharmonijska

b) ***Neperiodička***

- kratkotrajna impulsna djelovanja (udari, eksplozije)

- dugotrajna (podrhtavanje tla usljed potresa).

Harmonijska opterećenja najčešća su u industrijskim i energetskim postrojenjima i uzrokuju harmonijske oscilacije dogod su strojevi u pogonu. Ove se vibracije sastoje od dvije komponente:

- *prolazna komponenta – "transient"* (usljed početnih uvjeta s frekvencijom jednakom vlastitoj frekvenciji konstruktivnog sustava, brzo se prigušuju te se stoga često zanemaruju)

- *stalna komponenta – "steady-state"* (pojavljuje se pri frekvenciji uzbudne sile te može dovesti do *rezonancije* ako se izjednači s vlastitom frekvencijom konstrukcije (može doći do velikih amplituda pomaka i rezultirati preopterećenjem i slomom sustava.

5.1 PRISILNI HARMONIJSKI ODZIV NEPRIGUŠENOG SUSTAVA

Harmonijske oscilacije javljaju se kod različitih konstruktivnih i mehaničkih sustava uslijed djelovanja:
- alternirajućih i rotirajućih strojeva, motora i kompresora
- turbina
- radarskih uređaja.

Oblik harmonijske sile uzbude :

$$F(t) = F_0 \, sin \, \Omega \, t$$

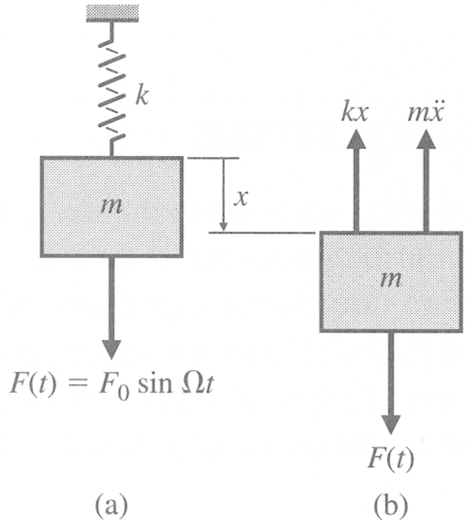
F_0 - amplituda sile
Ω - kružna frekvencija uzbudne sile

Jednadžba gibanja :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} sin \, \Omega t$$

Rješenje :

$$x(t) = A \, sin \, \omega t + B \, cos \, \omega t + \frac{F_0/k}{1-(\Omega/\omega)^2} sin \, \Omega t$$



$$x(t) = X \, sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/k}{1-(\Omega/\omega)^2} sin \, \Omega t$$

$$x(t) = X \, sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0}{1-r^2} sin \, \Omega t$$

prolazni dio (transient) **trajni dio odziva (steady state)**

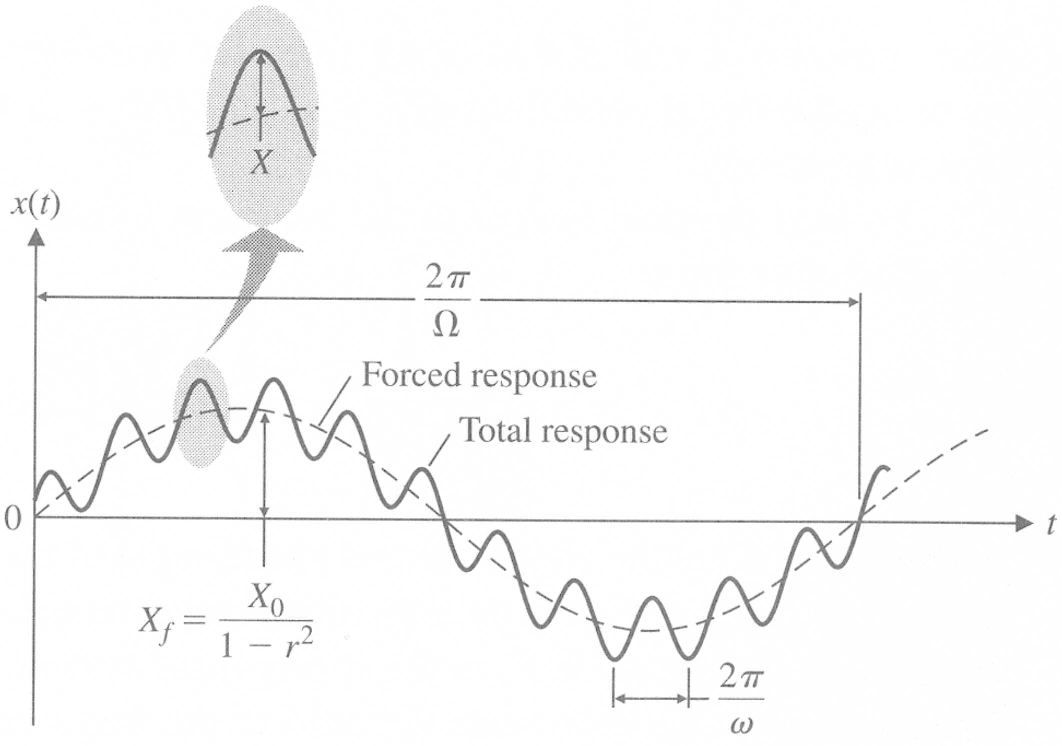
$X_0 = F_0/k$ - ekvivalentni statički progib
$r = \Omega / \omega$ - omjer frekvencija
$\mu_{din} = 1/(1 - r^2)$ - dinamički koeficijent uvećanja

Moguće su tri vrste odziva :

- r < 1 $\Rightarrow \Omega < \omega$: **prirodna frekvencija prolaznog odziva je veća od frekvencije trajnog odziva (vidi sliku);**

- r = 1 !

- r > 1 $\Rightarrow \Omega > \omega$



Slika odziva neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode na harmonijsku uzbudu

5.2 PULZIRANJE I REZONANCIJA

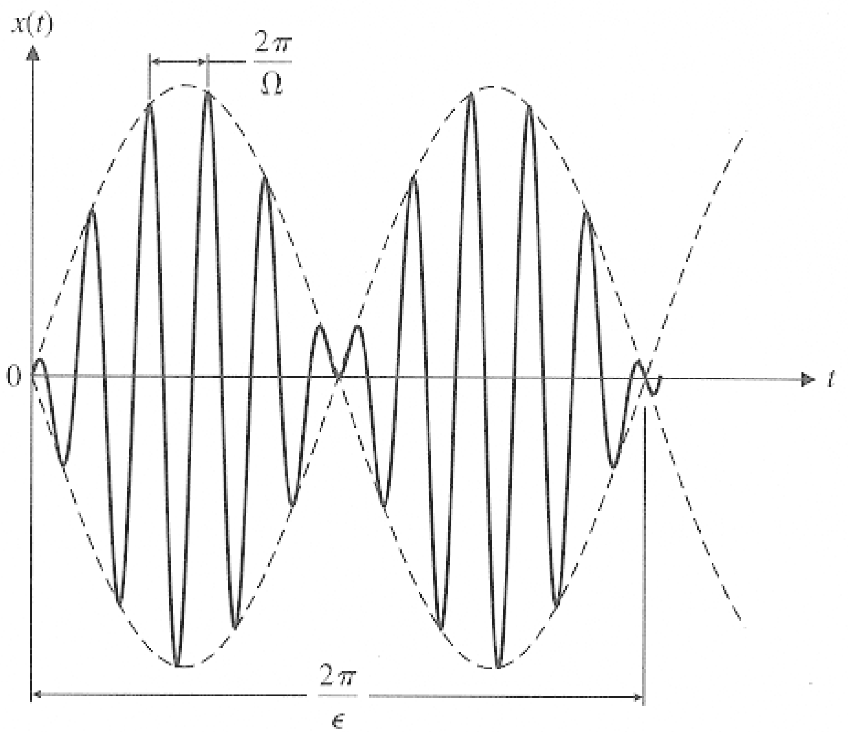
PULZIRANJE

r $\Rightarrow$ 1 : $\Omega \Rightarrow \omega$

za početno stanje mirovanja :

$$x(t) = -\frac{X_0 \Omega}{2\varepsilon} \cos \Omega t \, \sin \varepsilon t$$

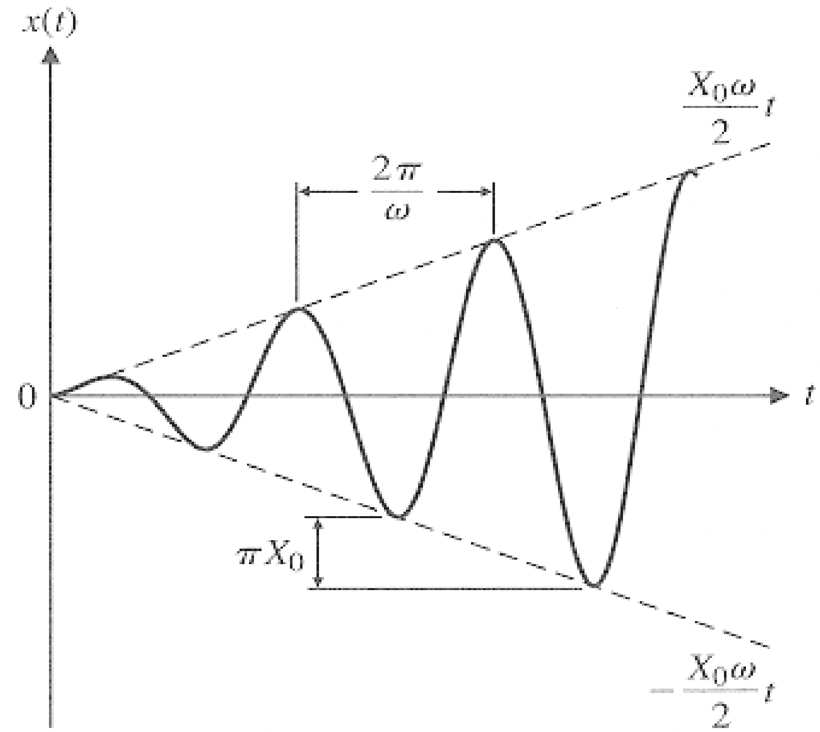
gdje je $\varepsilon = \dfrac{\omega - \Omega}{2}$



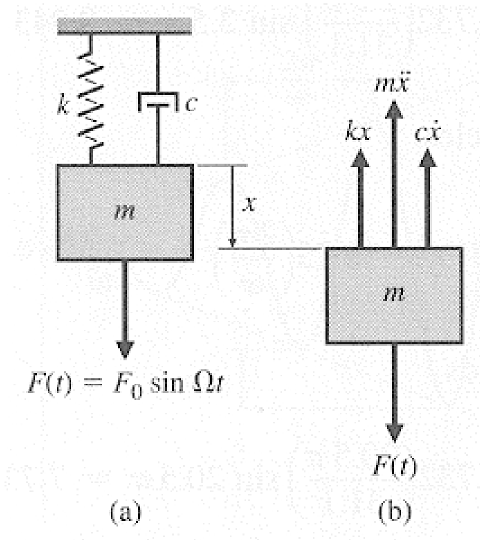
REZONANCIJA

r = 1 : $\Omega = \omega$, $\mu \Rightarrow \infty$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0 \omega}{2} t \sin \omega t$$



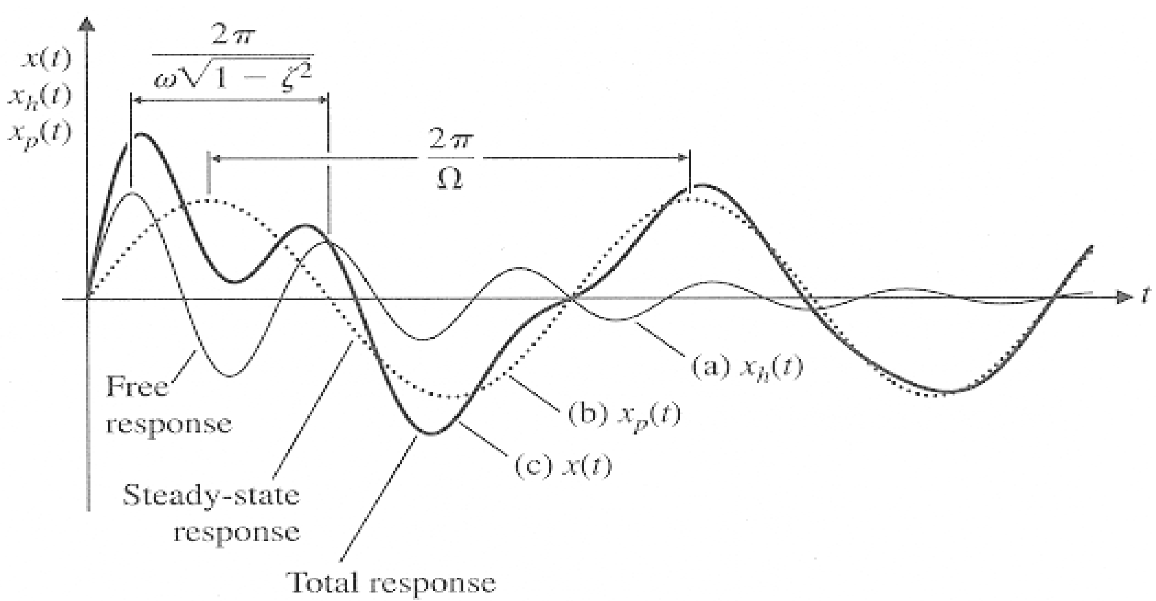
5.3 PRISILNE HARMONIJSKE VIBRACIJE S VISKOZNIM PRIGUŠENJEM



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

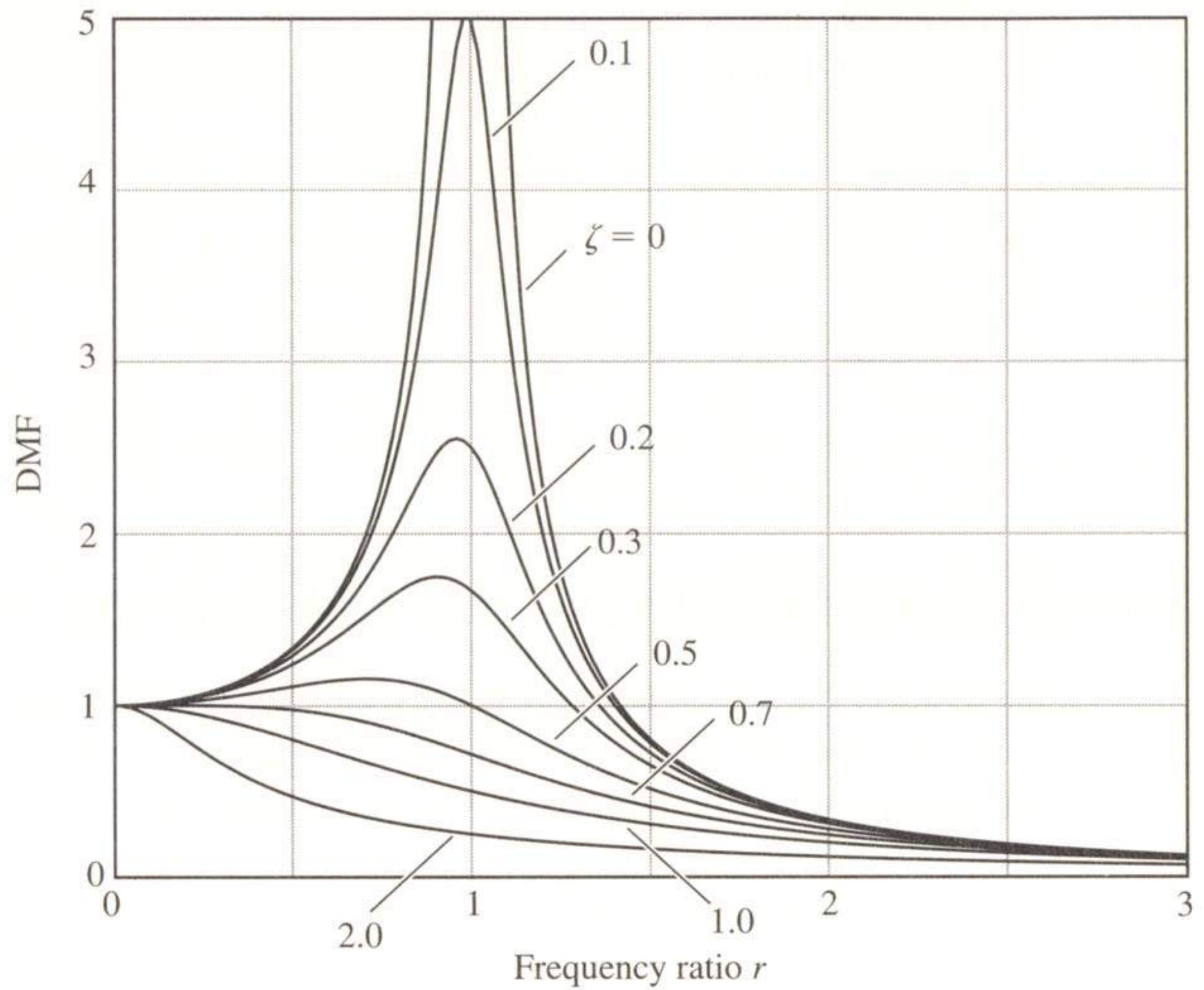
$$x(t) = e^{-\xi \omega t}\left(A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \sin\left(\Omega t - \psi\right)$$

$$x(t) = X e^{-\xi \omega t}\left(\sin \omega_d t + \varphi\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \sin\left(\Omega t - \psi\right)$$



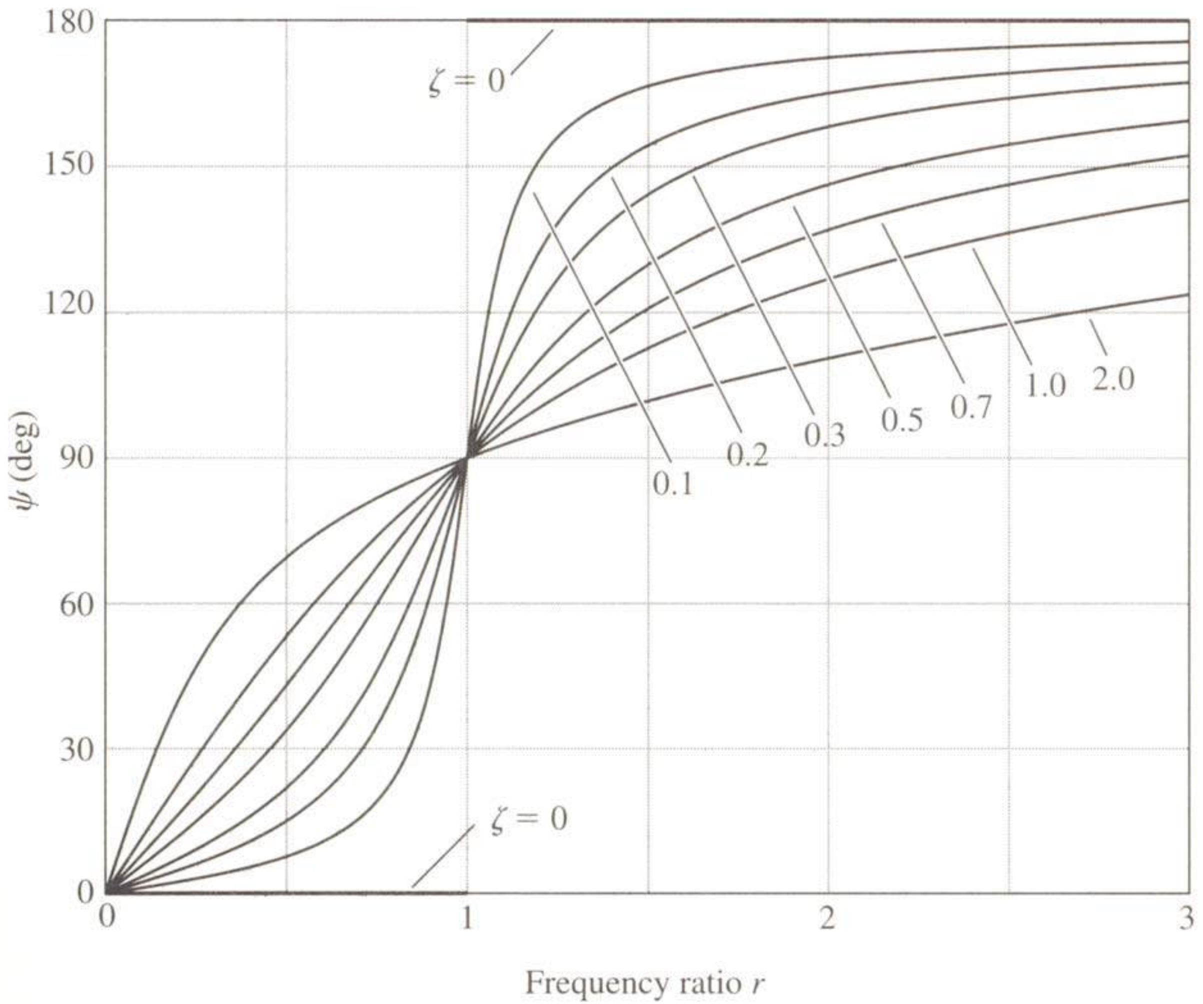
Odziv viskozno prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode na harmonijsku uzbudu

5.4 UTJECAJ KOEFICIJENTA PRIGUŠENJA NA USTALJENI ODZIV



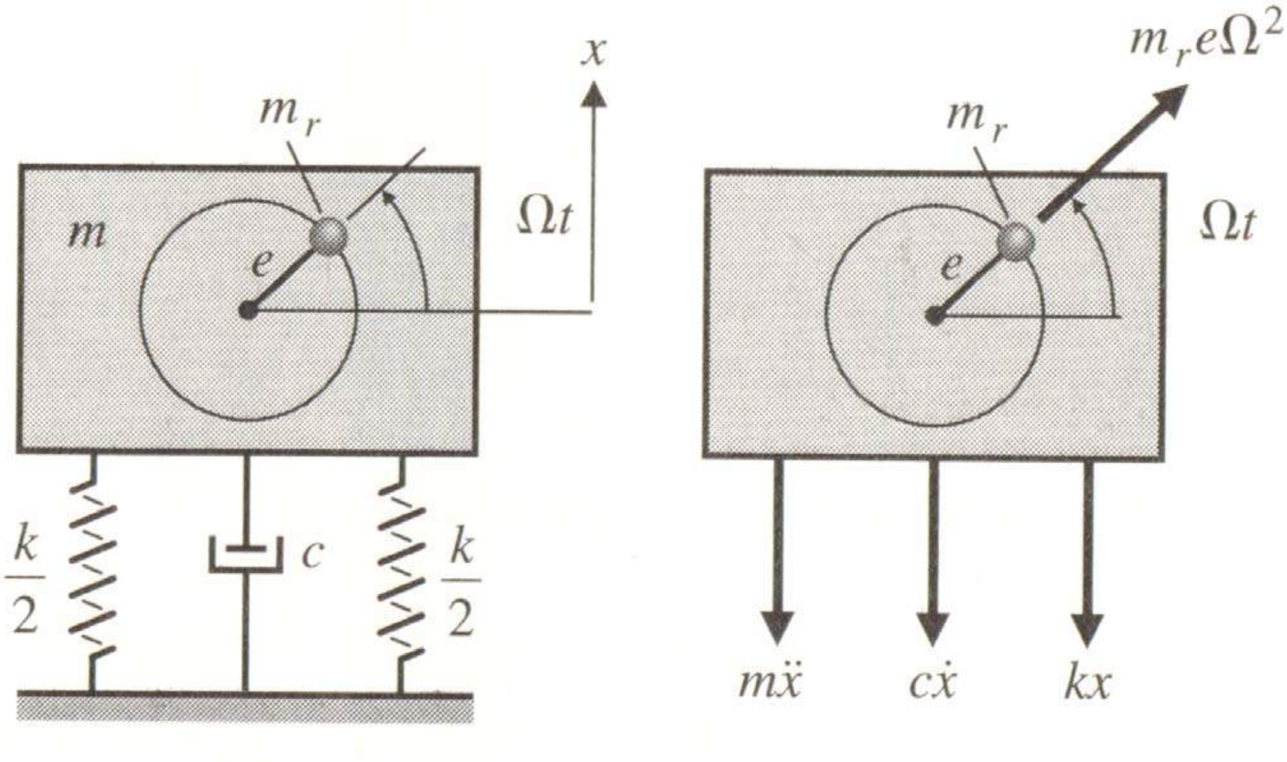
Odnos koeficijenta dinamičkog uvećanja (DMF) i omjera frekvencija r za različite stupnjeve prigušenja

5.4 UTJECAJ KOEFICIJENTA PRIGUŠENJA NA USTALJENI ODZIV



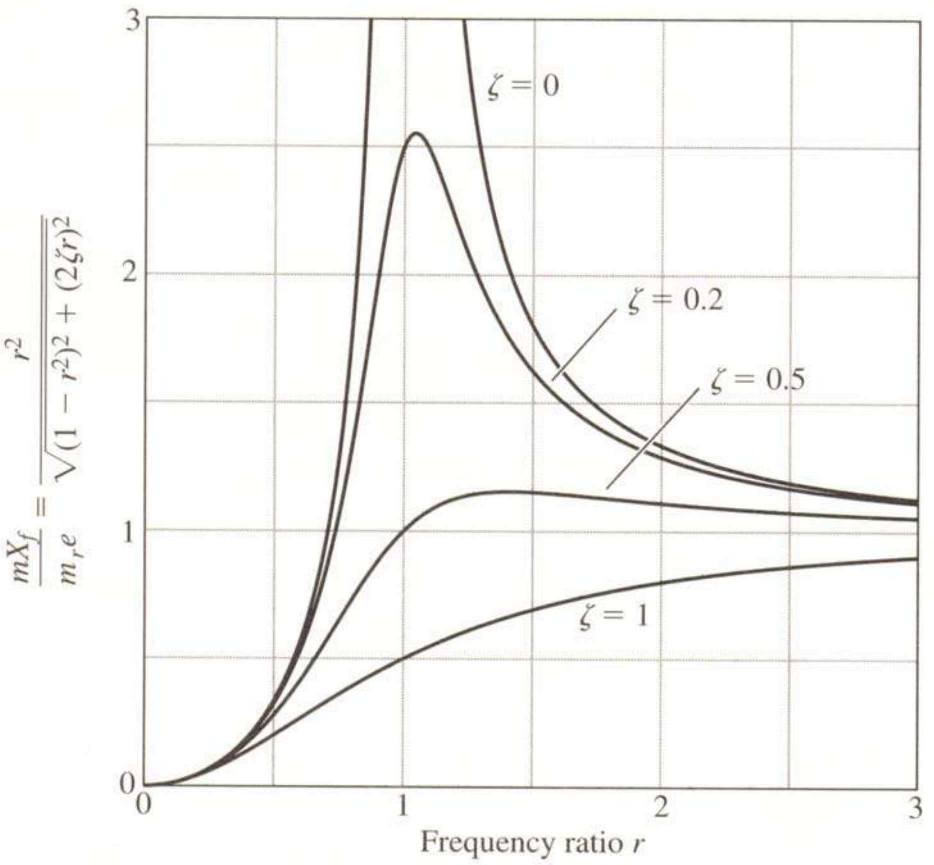
Odnos faznog kuta i omjera frekvencija za različite stupnjeve prigušenja

5.5 HARMONIJSKE OSCILACIJE USLJED ROTACIJE EKSCENTRIČNE MASE



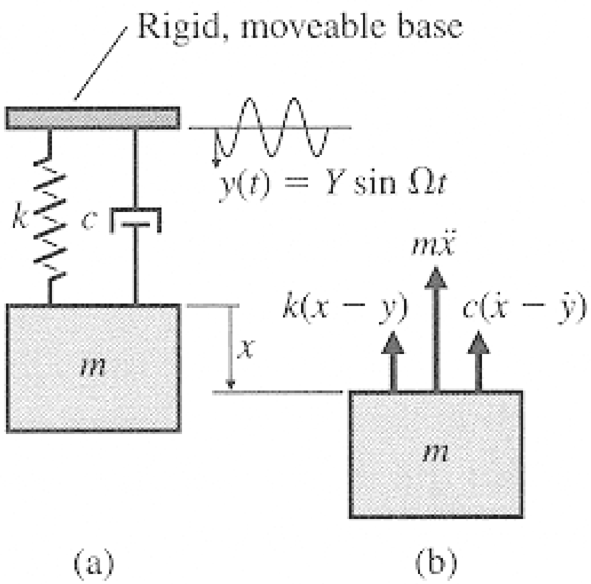
(a) (b)

5.5 HARMONIJSKE OSCILACIJE USLJED ROTACIJE EKSCENTRIČNE MASE



Trajni dio amplitude odziva SDOF sustava s ekscentričnom rotacijom

5.6 OSCILACIJE TEMELJA



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kY\,sin\,\Omega t+c\Omega Y\,cos\,\Omega t$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=Y\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}\,sin(\Omega t-\gamma)$$

$$\gamma=tg^{-1}\left(-\frac{c\Omega}{k}\right)=tg^{-1}(-2\xi r)$$

Trajni dio pomaka mase:

X_f

$$x(t)=\frac{Y\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\,sin(\Omega t-\beta)$$

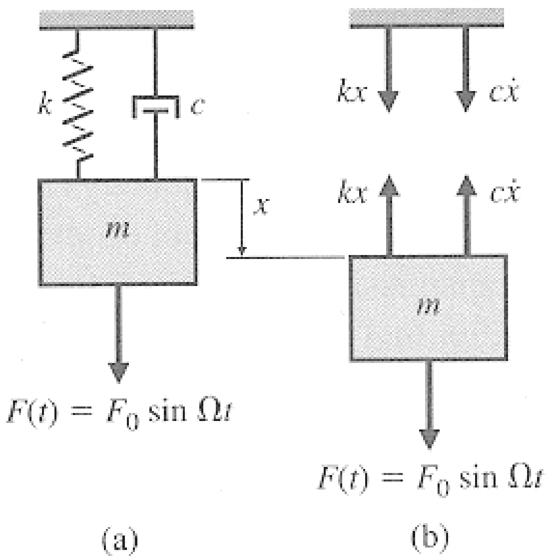
$$\beta=\gamma+\psi,\quad \psi=tg^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

PRENOSIVOST (transmissibility)
mjera gibanja koje se prenosi na masu uslijed oscilacija temelja

$$Tr=\left|\frac{X_f}{Y}\right|=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

5.7 IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST

- izolacija sila i pomaka;
- **izolatori vibracija** (prirodne frekvencije mnogo manje od frekvencije uzbude koju izoliramo);



Sila koja se prenosi na temelje:

$$F_T = kx + c\dot{x} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}\, sin(\Omega t - \beta)$$

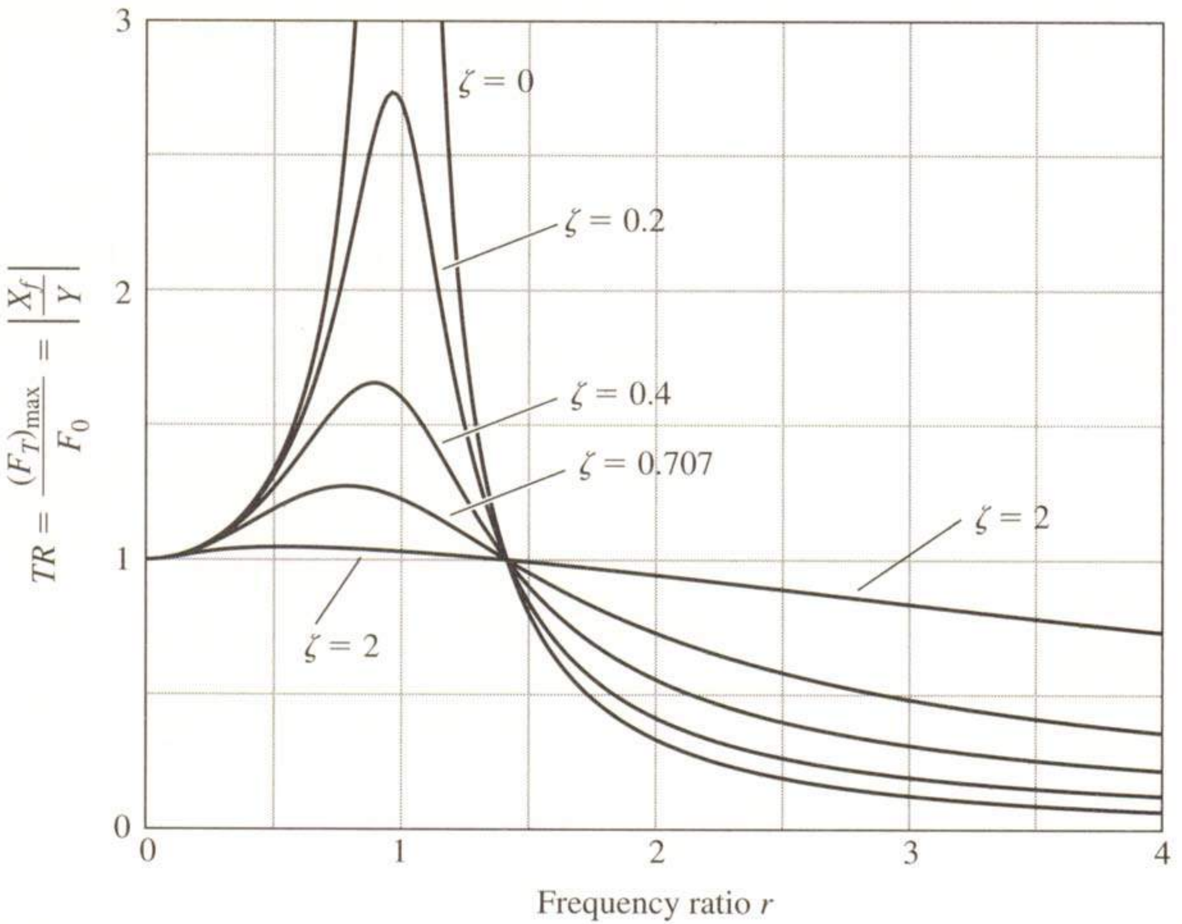
$$(F_T)_{max} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} = \frac{X_0 \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Prenosivost :

$$Tr = \frac{(F_T)_{max}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \mu_{din} \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

Izolacija vibracija može se postići samo u području $r > \sqrt{2}$, pri čemu su najučinkovitiji apsorberi opruge s malim ili gotovo nikakvim prigušenjem.

5.7 IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST



Prenosivost ***TR*** kao funkcija omjera frekvencija i prigušenja