7 NUMERIČKO ODREĐIVANJE DINAMIČKOG ODZIVA

- Analitičko tj. rješenje Duhamelovog integrala u zatvorenom obliku može biti veoma zahtjevno čak i za relativno jednostavne uzbudne funkcije;
- Rješavanje je nemoguće ako se sila uzbude ne može izraziti kao jedinstvena matematička funkcija ili postoji samo njen digitalni zapis;
- Kod većine praktičnih problema, dinamički se odziv konstrukcije određuje nekom od ***numeričkih metoda*** koje se temelje na jednom od dva pristupa:
  - ***Numerička interpolacija*** uzbude ili Duhamelovog integrala
  - ***Direktna numerička integracija*** jednadžbe gibanja;
- Oba su pristupa primjenjiva kod linearnih sustava dok se kod nelinearnih sustava mogu primijeniti samo direktne metode.

7.1 METODE PO PRINCIPU “KORAK PO KORAK”

Jednadžba gibanja neelastičnog sustava koju rješavamo numerički je oblika

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f_s(x, \dot{x}) = p(t) \quad ili \quad -m\ddot{x}_g(t)$$

uz poznate početne uvjete

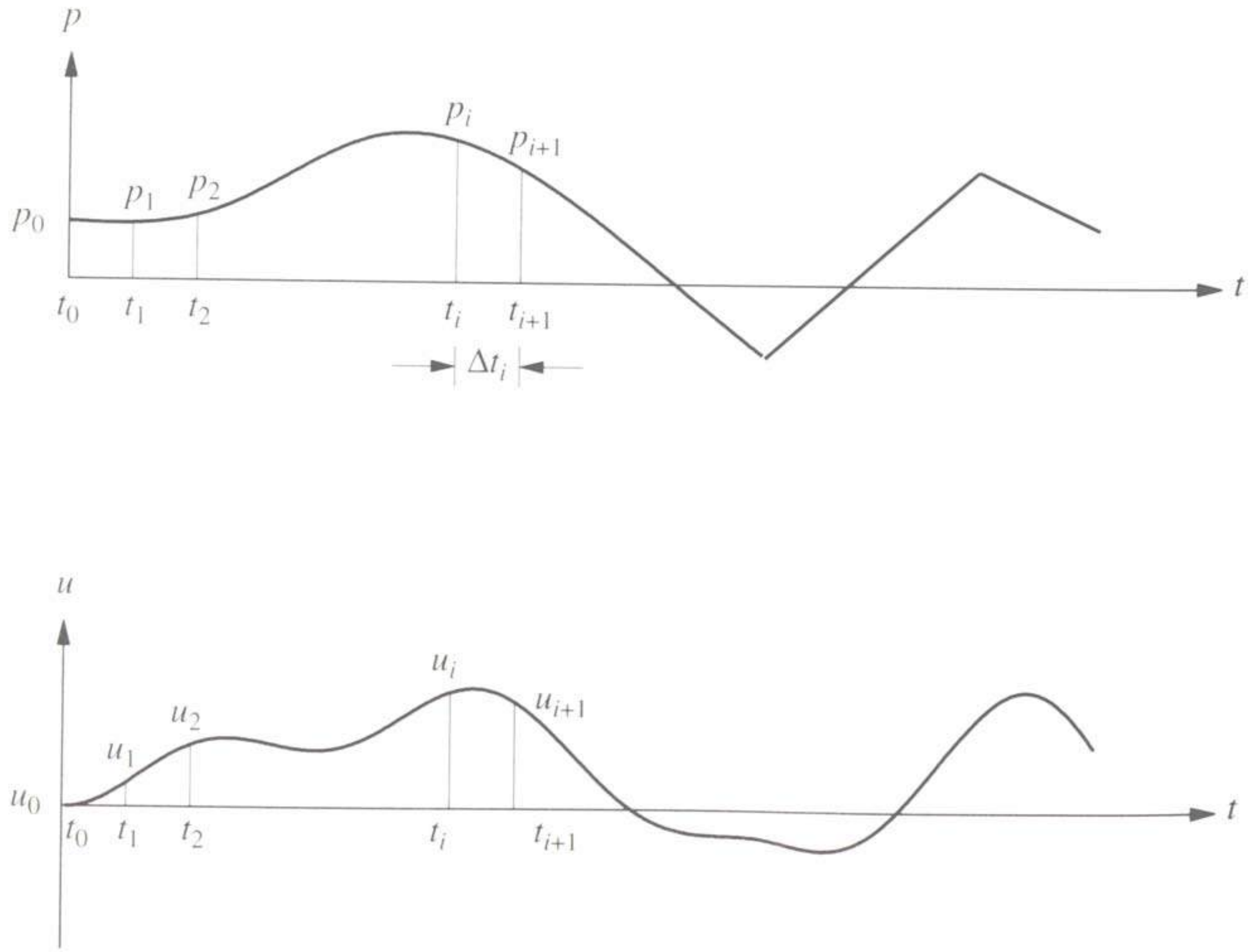
$$x_0 = x(t = 0) \qquad \dot{x}_0 = \dot{x}(t = 0)$$

Zadano vanjsko opterećenje ***p(t)*** promatramo kao skup diskretnih vrijednosti ***$p_i = p(t_i)$, $i = 1$ do N***.

Vremenski je interval ***$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$*** najčešće konstantan (nije neophodno).

Odziv konstrukcije (pomak, brzina, ubrzanje) se određuje u diskretnim vremenskim trenucima ***t_i***.

7.1 METODE PO PRINCIPU "KORAK PO KORAK"



7.1 METODE PO PRINCIPU “KORAK PO KORAK”

Pretpostavimo da su nam u trenutku ***t=i*** poznati pomak, brzina i ubrzanje, tj.

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + \left(f_s\right)_i = p_i$$

gdje je $(f_s)_i$ reakcija u trenutku i,

$(f_s)_i = kx_i$ za linearno elastične sustave.

Numeričkim postupcima pomoću poznatih veličina u trenutku ***t=i*** određujemo pomak, brzinu i ubrzanje u trenutku ***t=i+1***,

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + \left(f_s\right)_{i+1} = p_{i+1}$$

Ponavljanjem koraka za ***i=0,1,2,3,...,*** dobivamo odziv u svakom trenutku vremena ***i=1,2,3...***

Početni uvjeti za ***t=0*** neophodni su za početak iterativnog postupka.

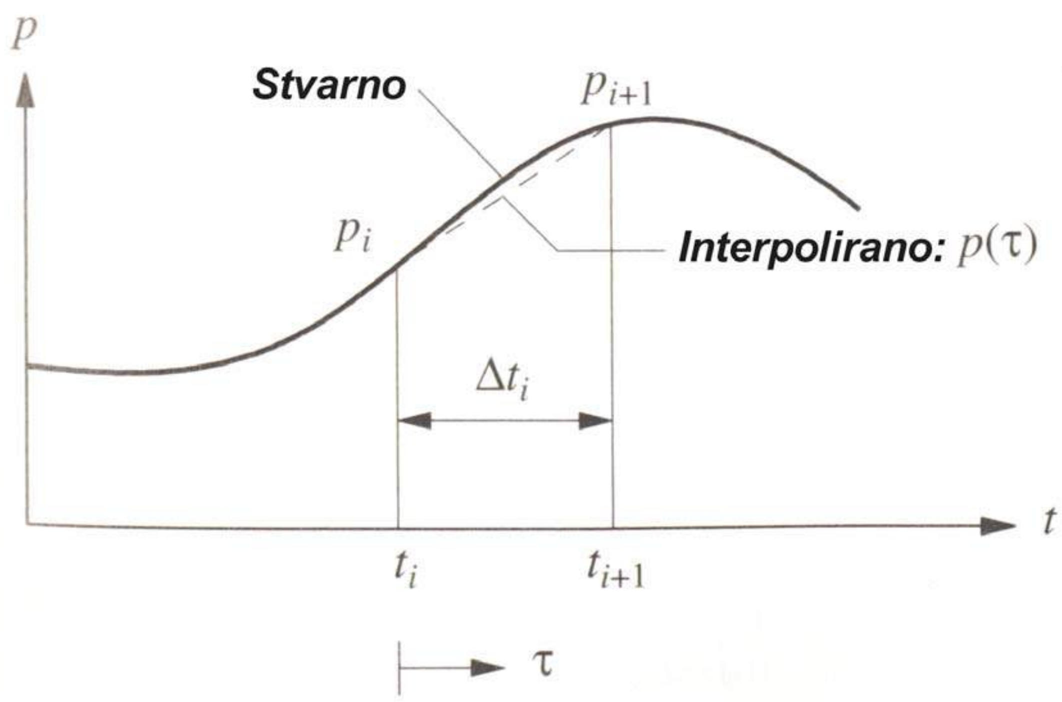
7.1 METODE PO PRINCIPU “KORAK PO KORAK”

Prijelaz iz trenutka ***i*** do ***i+1*** je približan postupak.

Svaka numerička metoda mora zadovoljavati tri neophodna uvjeta:

- **Konvergencija** (smanjivanjem vremenskog koraka, numeričko rješenje treba težiti točnom rješenju);
- **Stabilnost** (numeričko rješenje mora biti stabilno s obzirom na numeričku pogrešku zaokruživanja);
- **Točnost** (numerički postupka mora davati rješenja koja su dovoljno bliska točnom rješenju).

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE



$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

Pomak u trenutku ***t = i+1***:

$$x_{i+1} = e^{-n\Delta t}\left(x_i \cos\omega_D\Delta t + \frac{\dot{x}_i + n x_i}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right) + \frac{F_i}{k}\left[1 - e^{-n\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t + \frac{n}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)\right] +$$

$$+\frac{F_{i+1} - F_i}{k\Delta t}\left[\Delta t - \frac{2n}{\omega_D^2} + e^{-n\Delta t}\left(2\frac{n}{\omega^2}\cos\omega_D\Delta t - \frac{\omega^2 - n^2}{\omega\cdot\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)\right]$$

Brzina u trenutku ***t = i+1***:

$$\dot{x}_{i+1} = e^{-n\Delta t}\left(\dot{x}_i \cos\omega_D\Delta t - \frac{n\dot{x}_i + \omega^2 x_i}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right) + \frac{F_i}{k}\frac{\omega^2}{\omega_D}e^{-n\Delta t}\sin\omega_D\Delta t +$$

$$+\frac{F_{i+1} - F_i}{k\Delta t}\left[1 - e^{-n\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t + \frac{n}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)\right]$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

Prethodne se jednažbe mogu zapisati u obliku:

$$x_{i+1} = Ax_i + B\dot{x}_i + Cp_i + Dp_{i+1}$$

$$\dot{x}_{i+1} = A'x_i + B'\dot{x}_i + C'p_i + D'p_{i+1}$$

pri čemu su:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}, \quad n = \xi\omega$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

$$A = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)$$

$$B = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1-\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

7.2 METODE INTERPOLACIJE UZBUDNE SILE

$$A' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

Primjer

Sustav s jednim stupnjem slobode (SDOF) ima sljedeća svojstva:

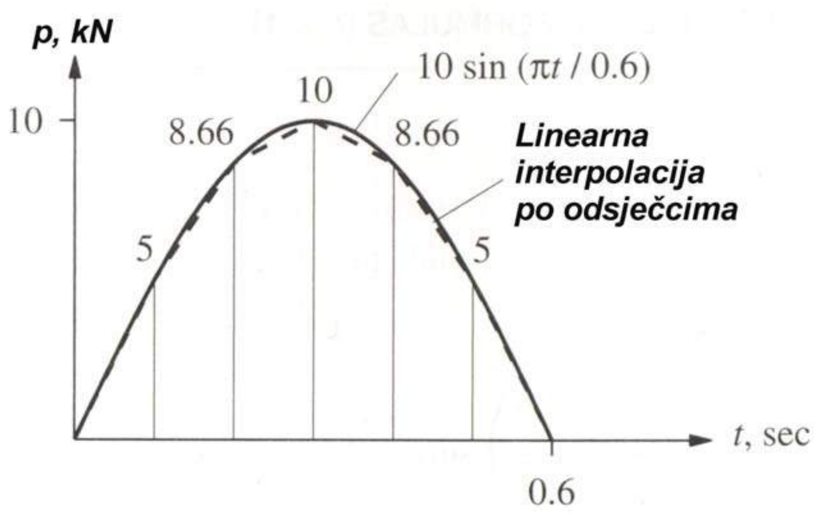
m = 0,2533 kN-sec2/cm

k = 10 kN/cm

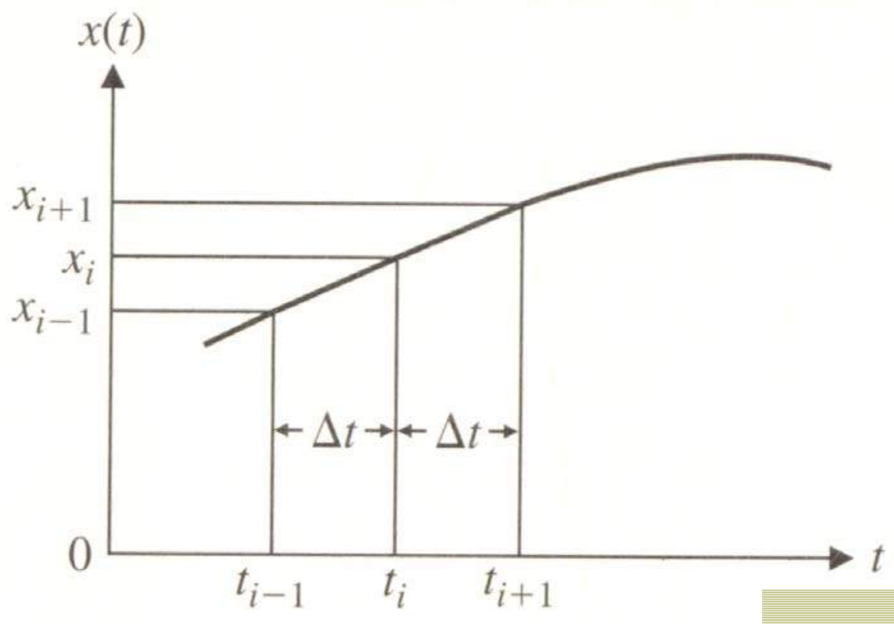
T = 1 sec (ω=6,283 rad/sec)

ξ = 0,05.

Odredite odziv sustava x(t) na djelovanjeuzbude p(t) jednog poluciklusa sinusnog vala (prikazano na slici) numeričkom metodom s vremenskim intervalom (korakom iteracije) Δt=0,1 sec.



7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI
(aproksimacija diferencijalnih izraza diferencijskim)



$$\dot{x}_i = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{x}_i = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_{t_i} = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i+(\Delta t/2)} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i-(\Delta t/2)}\right]}{\Delta t}$$

$$\ddot{x}_i = \frac{\left[(x_{i+1} - x_i)/\Delta t - (x_i - x_{i-1})/\Delta t\right]}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} + kx_i = p_i$$

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]x_i$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\hat{k}x_{i+1} = \hat{p}_i$$

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}$$

$$\hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]x_i$$

$$x_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{x}_0 = \frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$x_{-1} = x_0 - \Delta t(\dot{x}_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{x}_0$$

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = p_0$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$$

7.3 METODA CENTRALNIH DIFERENCI

Odabrani vremenski interval mora biti dovoljno mali da bi dobili rezultate zadovoljavajuće točnosti, tj.

$$\frac{\Delta t}{T} < \frac{1}{\pi}$$

Obično se uzima: $\frac{\Delta t}{T} \leq 0{,}1$

ALGORITAM
METODE CENTRALNIH DIFERENCI

1.0 Početni proračuni

1.1 $\ddot{x}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$

1.2 $x_{-1} = x_0 - \Delta t\, \dot{x}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{x}_0$

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t}$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t}$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2}$

2.0 Proračuni za vremenski trenutak i

2.1 $\hat{p}_{\mathrm{i}} = p_i - ax_{i-1} - bx_i$

2.2 $x_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$

3.0 Sljedeći vremenski trenutak

*Zamijeniti **i** sa **i+1** i ponoviti korake 2.1 i 2.2 za sljedeći trenutak vremena.*

7.4 NEWMARKOVA METODA

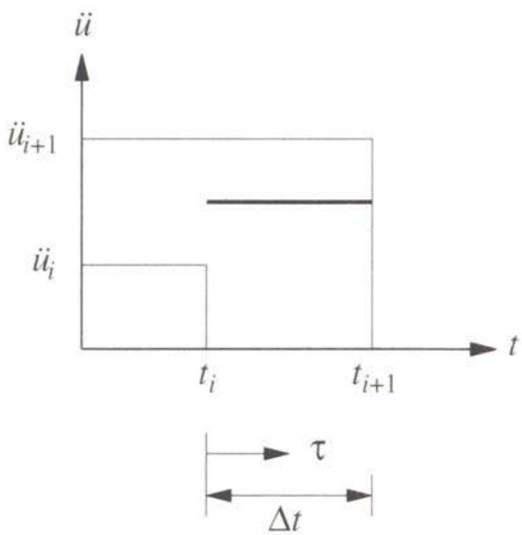
$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \left[(1-\gamma)\Delta t\right]\ddot{x}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{x}_{i+1}$$

$$x_{i+1} = x_i + (\Delta t)\dot{x}_i + \left[(0,5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_{i+1}$$

Parametri β i γ definiraju promjenu ubrzanja preko intervala vremena te stabilnost i točnost metode.

7.4 NEWMARKOVA METODA

Prosječno (konstantno) ubrzanje



$$\ddot{u}(\tau) = \tfrac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

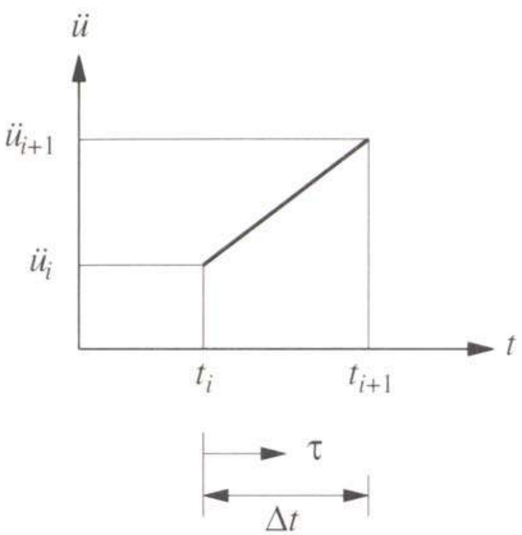
$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \tfrac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \tfrac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \tfrac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + \tfrac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

Linearno promjenjivo ubrzanje



$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \tfrac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\tau + \tfrac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \tfrac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \ddot{u}_i\tfrac{\tau^2}{2} + \tfrac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + (\Delta t)^2\left(\tfrac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \tfrac{1}{3}\ddot{u}_i\right)$$

ALGORITAM NEWMARKOVE METODE

Specijalni slučajevi

(1) Metoda prosječnog ubrzanja (γ =1/2, β =1/4)

(2) Metoda linearno promjenjivog ubrzanja (γ =1/2, β =1/6)

1.0 Početni proračuni

1.1 $\ddot{x}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{x}_0 - kx_0}{m}$

1.2 Odabrati Δt

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$

1.4 $a = \dfrac{1}{\beta \Delta t} m + \dfrac{\gamma}{\beta} c$

1.5 $b = \dfrac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$

2.0 Proračuni za vremenski trenutak *i*

2.1 $\Delta \hat{p}_{\mathrm{i}} = \Delta p_i + a\dot{x}_i - b\ddot{x}_i$

2.2 $\Delta x_i = \dfrac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

2.3 $\Delta \dot{x}_i = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta x_i - \dfrac{\gamma}{\beta} \dot{x}_i + \Delta t \left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{x}_i$

2.4 $\Delta \ddot{x}_i = \dfrac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta x_i - \dfrac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_i - \dfrac{1}{2\beta} \ddot{x}_i$

2.5 $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i, \quad \ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x}_i$

3.0 Sljedeći vremenski trenutak

*Zamijeniti **i** sa **i+1** i ponoviti korake 2.1 do 2.5 za sljedeći trenutak vremena.*