

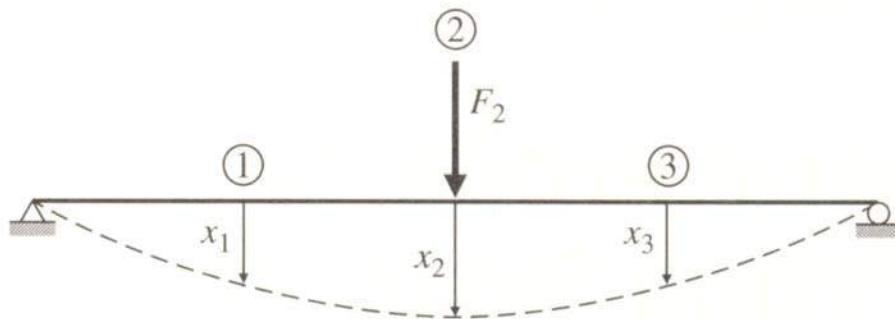
SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstava vibrirajućeg sustava

8.1 MATRICA POPUSTLJIVOSTI [a]

- veza između sila i pomaka;



Pretpostavimo da sila djeluje na mjestu 2, tada su pripadajući progibi:

$$x_1 = a_{12} F_2$$

$$x_2 = a_{22} F_2$$

$$x_3 = a_{32} F_2$$

gdje su a_{12} , a_{22} i a_{32} – koeficijenti popustljivosti, tako da je

a_{12} – progib na mjestu 1 usljed jedinične sile na mjestu 2

a_{22} – progib na mjestu 2 usljed jedinične sile na mjestu 2

a_{32} – progib na mjestu 3 usljed jedinične sile na mjestu 2

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

Ako na isti način primijenimo sile \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 i \mathbf{F}_3 redom na mjestima 1, 2 i 3, jednadžbe su pomaka oblika:

$$x_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + a_{13} F_3$$

$$x_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + a_{23} F_3$$

$$x_3 = a_{31} F_1 + a_{32} F_2 + a_{33} F_3$$

ili u matičnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{x\} = [a]\{F\}.$$

Matrica popustljivosti linearno-elastičnih sustava je simetrična, što je posljedica Maxwellovog zakona o uzajamnosti pomaka:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

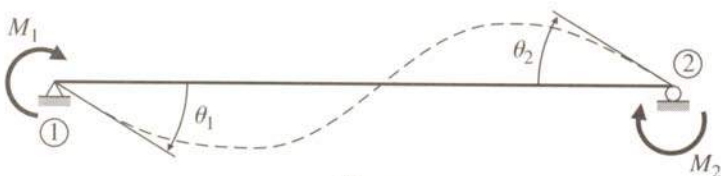
8.2 MATRICA KRUTOSTI [k]



(a)

- veza između sila i deformacija;
Pretpostavimo da moment savijanja M_1 djeluje na mjestu 1:

$$M_1 = k_{11} \theta_1$$



(b)

gdje je k_{11} - koeficijent krutosti (moment na mjestu 1 usljed jedinične rotacije na mjestu 1).

$$\begin{aligned} M_1 &= k_{11} \theta_1 + k_{12} \theta_2 \\ M_2 &= k_{21} \theta_1 + k_{22} \theta_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad \{F\} = [k]\{x\}$$

Općenito, vektor sila sadrži sile i momente a vektor deformacija translacijske pomake i rotacije.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

Elementi matrice krutosti $[k]$ predstavljaju sile (momente) potrebne za dobivanje jediničnog pomaka (rotacije) na određenom mjestu konstrukcije a da je pri tome spriječen pomak (rotacija) u svim ostalim čvorovima konstrukcije.

(Čvor konstrukcije je mjesto u kojem je definirana koncentrirana masa tj. pripadajući stupanj slobode.)

Nadalje, vrijedi:

$$[k]^{-1} \{F\} = \{x\} \quad \Rightarrow \quad [k]^{-1} = [a]$$
$$[a]^{-1} = [k]$$

Matrica krutosti linearno-elastičnih sustava je simetrična, što je posljedica Maxwellovog zakona o uzajamnosti pomaka:

$$k_{ij} = k_{ji}.$$



Koeficijenti krutosti elemenata izloženih savijanju

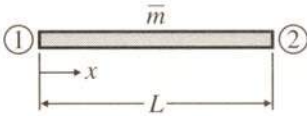
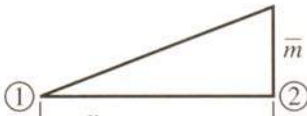
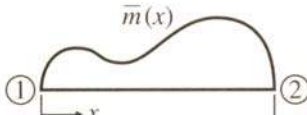
$F_1 = \frac{12EI}{L^3}x_1$ $F_2 = \frac{6EI}{L^2}x_1$		$F_3 = -\frac{12EI}{L^3}x_1$ $F_4 = \frac{6EI}{L^2}x_1$
$F_1 = \frac{6EI}{L^2}x_2$ $F_2 = \frac{4EI}{L}x_2$		$F_3 = -\frac{6EI}{L^2}x_2$ $F_4 = \frac{2EI}{L}x_2$
$F_1 = \frac{3EI}{L^3}x_1$ $F_2 = \frac{3EI}{L^2}x_1$		$F_3 = -\frac{3EI}{L^3}x_1$ $F_4 = 0$ $x_4 = -\frac{3}{2} \frac{x_1}{L}$
$F_1 = \frac{3EI}{L^2}x_2$ $F_2 = \frac{3EI}{L}x_2$		$F_3 = -\frac{3EI}{L^2}x_2$ $F_4 = 0$ $x_4 = -\frac{1}{2}x_2$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.3 INERCIJSKA SVOSTVA: MATRICA MASA [m]

Raspodjela mase	Koeficijenti koncentriranih masa
 <p>(a) Uniform: $\bar{m}(x) = \bar{m}$</p>	$m_1 = \frac{\bar{m}L}{2}$ $m_2 = \frac{\bar{m}L}{2}$
 <p>(b) Linear: $\bar{m}(x) = \frac{\bar{m}}{L}x$</p>	$m_1 = \frac{\bar{m}L}{6}$ $m_2 = \frac{\bar{m}L}{3}$
 <p>(c) General: $\bar{m}(x)$</p>	$m_1 = \frac{\int_0^L \bar{m}(x)(L-x) dx}{\int_0^L \bar{m}(x) dx}$ $m_2 = \frac{\int_0^L \bar{m}(x)x dx}{\int_0^L \bar{m}(x) dx}$

- sustav koncentriranih masa;
raspodijeljena masa konstrukcije koncentrira se tj. lokalizira u predefinirane čvorove – mjesta u kojima su definirani stupnjevi slobode.

Matrica koncentriranih masa je najčešće dijagonalna (s obzirom da se najčešće uzimaju u obzir inercijski učinci samo usljed translacijskih stupnjeva slobode).

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.4 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U ANALIZI VIBRACIJA

- Analiza neprigušenih slobodnih vibracija sustava s n stupnjeva slobode traži rješenje standardnog problema vlastitih vrijednosti:

$$[D]\{A\} = \lambda\{A\}.$$

gdje su $[D]$ – kvadratna, simetrična matrica n -tog reda
 $\{A\}$ – vektor rješenja
 λ – skalar.

- Postoji n netrivialnih rješenja.
- r -to netrivialno rješenje sastoji se od
 - vlastite vrijednosti λ_r
 - vlastitog vektora $\{A\}_r$, tako da je:

$$[D]\{A\}_r = \lambda_r \{A\}_r, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

- Nadalje je:

$$[[\mathbf{D}] - \lambda[\mathbf{I}]]\{\mathbf{A}\} = \{0\}$$

$$|[\mathbf{D}] - \lambda[\mathbf{I}]| = 0$$

karakteristična jednačba s n korjena (rješenja)

$[\mathbf{D}]$ - dinamička matrica

$\{\lambda\}$ - vlastite frekvence sustava

$\{\mathbf{A}\}$ - vlastiti vektori (vlastiti, normalni ili glavni oblici – forme vibriranja)

- Pomnožimo vlastiti vektor proizvoljnom konstantom:

$$[\mathbf{D}]\mathbf{c}_r\{\mathbf{A}\}_r = \lambda_r \mathbf{c}_r\{\mathbf{A}\}_r$$

$$\mathbf{c}_r\{\mathbf{A}\}_r = \{\Phi\}_r \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{D}]\{\Phi\}_r = \lambda_r \{\Phi\}_r$$

$\{\Phi\}_r$ - modalni vektor pripadajućem vlastitom broju λ_r .

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

- Ako uzmemo u obzir svih n vlastitih vrijednosti λ_r , tada n modalnih vektora $\{\Phi\}_r$ čini modalnu matricu $[\Phi]$ koja u sebi okuplja sve normalne oblike vibracija sustava, tj.:

$$[\Phi]_{n \times n} = [\{\Phi\}_1, \{\Phi\}_2, \dots, \{\Phi\}_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.4.1 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U IZRAŽEN POMOĆU KRUTOSTI

- Za neprigušene slobodne vibracije sustava s n stupnjeva slobode, vrijedi:

$$\begin{aligned} [m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} &= \{0\} \quad / \quad [m]^{-1} \\ [I]\{\ddot{x}\} + [D]\{x\} &= \{0\} \end{aligned}$$

gdje je $[D]=[m]^{-1}[k]$ – dinamička matrica (matrica sustava).

- Pretpostavimo harmonijski oblik rješenja:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{A\} \sin \omega t \\ \{\ddot{x}\} &= -\lambda \{A\} \sin \omega t, \quad \lambda = \omega^2 \\ [[D] - \lambda[I]]\{A\} &= \{0\} \end{aligned}$$

što je standardni problem vlastitih vrijednosti.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.4.2 PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI U IZRAŽEN POMOĆU POPUSTLJIVOSTI

- Za neprigušene slobodne vibracije sustava s n stupnjeva slobode, vrijedi:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad / \quad [a] = [k]^{-1}$$

$$[a][m]\{\ddot{x}\} + [I]\{x\} = \{0\}$$

gdje je $[D] = [a][m]$ – dinamička matrica (matrica sustava).

- Pretpostavimo harmonijski oblik rješenja:

$$\{x\} = \{A\} \sin \omega t$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\} \sin \omega t$$

$$-\omega^2 [D]\{A\} + [I]\{A\} = \{0\}$$

$$[[D] - \lambda [I]]\{A\} = \{0\}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

što je također standardni problem vlastitih vrijednosti, pri čemu su

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n.$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.5 ORTOGONALNOST VLASTITIH (PRIRODNIH) OBLIKA

- s obzirom na matricu masa [m]
- s obzirom na matricu krutosti [k]

Za ***r-ti*** vlastiti oblik vrijedi: $[\mathbf{k}]\{\mathbf{A}\}_r - \omega_r^2[\mathbf{m}]\{\mathbf{A}\}_r = \{\mathbf{0}\}$

- Promotrimo dva para različitih rješenja problema vlastitih vrijednosti: $\omega_r^2, \{\Phi\}_r$ i $\omega_s^2, \{\Phi\}_s$:

$$[\mathbf{k}]\{\Phi\}_r - \omega_r^2[\mathbf{m}]\{\Phi\}_r = \{\mathbf{0}\} \quad / \quad \{\Phi\}_s^T$$

$$[\mathbf{k}]\{\Phi\}_s - \omega_s^2[\mathbf{m}]\{\Phi\}_s = \{\mathbf{0}\} \quad / \quad \{\Phi\}_r^T$$

$$\{\Phi\}_s^T [\mathbf{k}]\{\Phi\}_r - \omega_r^2 \{\Phi\}_s^T [\mathbf{m}]\{\Phi\}_r = \{\mathbf{0}\} \quad (1)$$

$$\{\Phi\}_r^T [\mathbf{k}]\{\Phi\}_s - \omega_s^2 \{\Phi\}_r^T [\mathbf{m}]\{\Phi\}_s = \{\mathbf{0}\} \quad (2)$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

- Kako su $[k]$ i $[m]$ simetrične matrice: $[k]=[k]^T$ i $[m]=[m]^T$, transponiranjem jednačbe (2) dobijemo:

$$\{\Phi\}_s^T [k] \{\Phi\}_r - \omega_s^2 \{\Phi\}_s^T [m] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (3)$$

- Ako sada od jednačbe (3) oduzmemo jednačbu (1), dobije se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\Phi\}_s^T [m] \{\Phi\}_r = \{0\}$$

- Za oblike bitno različitih frekvencija ($\omega_r \neq \omega_s$) mora vrijediti

$$\{\Phi\}_s^T [m] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad \omega_r \neq \omega_s$$

Stoga kažemo da su **r-ti** i **s-ti** vlastiti oblik **ORTOGONALNI** s obzirom na matricu masa.

- Kako također vrijedi $\{\Phi\}_s^T [k] \{\Phi\}_r = \{0\}$

kažemo da su **r-ti** i **s-ti** vlastiti oblik **ORTOGONALNI** s obzirom na matricu krutosti.

- Uvjeti ortogonalnosti vlastitih oblika temelj su metode superpozicije oblika ili modalne analize.

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.6 GENERALIZIRANE MATRICE MASA I KRUTOSTI

- Uvjeti ortogonalnosti s obzirom na masu, za $r=s$:

$$\{\Phi\}_r^T [m] \{\Phi\}_r = M_r$$

Generalizirana ili modalna masa r -tog oblika

- Uvjeti ortogonalnosti s obzirom na krutost, za $r=s$:

$$\{\Phi\}_r^T [k] \{\Phi\}_r = K_r$$

Generalizirana ili modalna krutost r -tog oblika

- Pri tome je

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.6 GENERALIZIRANE MATRICE MASA I KRUTOSTI

- Za cjelokupni konstruktivni sustav vrijedi:

$[M] = \{\Phi\}^T [m] \{\Phi\}$
generalizirana ili
modalna matrica masa

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & M_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$[K] = \{\Phi\}^T [k] \{\Phi\}$
generalizirana ili
modalna matrica krutosti

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & K_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

8.7 PRIBLIŽNE METODE ZA PROCJENU OSNOVNE FREKVENCije - RAYLEIGHOVA METODA

- Problem vlastitih vrijednosti sustava s više stupnjeva slobode:

$$\lambda [m][\Phi] = [k][\Phi]$$

gdje je

$$\lambda = \omega^2$$

$[m]$, $[k]$ – simetrične matrice

$[\Phi]$ – modalna matrica

- Za r -ti je vlastiti oblik:

$$\lambda_r [m][\Phi]_r = [k][\Phi]_r \quad / \quad [\Phi]_r^T$$

$$\lambda_r [\Phi]_r^T [m][\Phi]_r = [\Phi]_r^T [k][\Phi]_r$$

$$\lambda_r = \frac{[\Phi]_r^T [k][\Phi]_r}{[\Phi]_r^T [m][\Phi]_r} \equiv \frac{V}{T}$$

SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM (MDOF) SYSTEMS

8 Generalne matrice svojstva vibrirajućeg sustava

- Ako modalni vektor $\{\Phi\}_r$ zamijenimo proizvoljnim vektorom $\{A\}$:

$$\lambda_r = R(\{A\}) = \frac{[A]^T [k] [A]}{[A]^T [m] [A]}$$

gdje je $R(\{A\})$ – Rayleighev kvocijent, pri čemu je $\lambda_1 \leq R(\{A\}) \leq \lambda_n$

$$\lambda_R = \omega_R^2 = R(\{A\})$$

- Točnost Rayleigheve frekvencije ω_r ovisi isključivo o vektoru pomaka $\{A\}$ kojim opisujemo oblik vibracija.
- Razumna je pretpostavka vektora pomaka $\{A\}$:
Vektor statičkih pomaka usljed djelovanja na koncentrirane mase silama proporcionalnim njihovim težinama.