# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

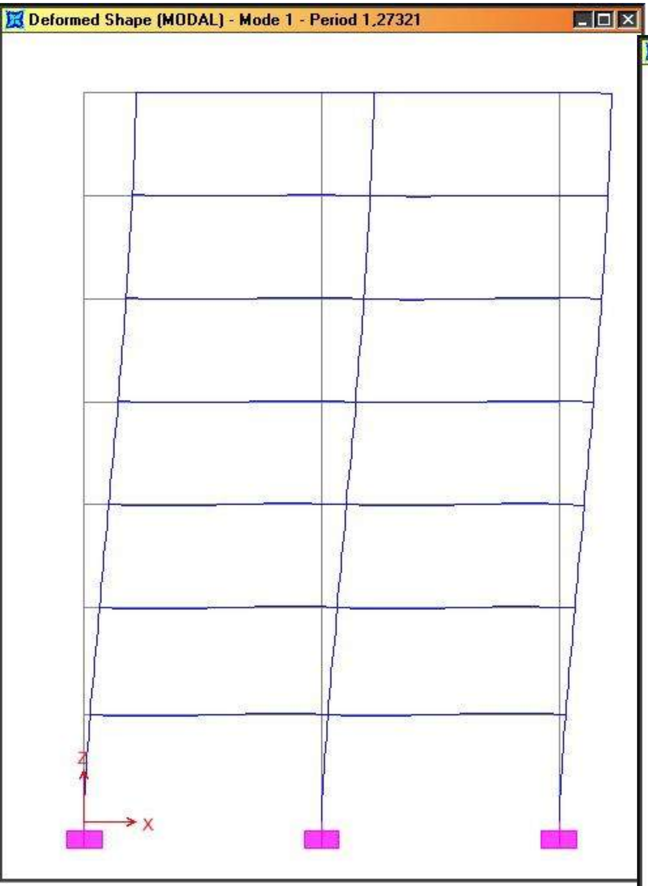
## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

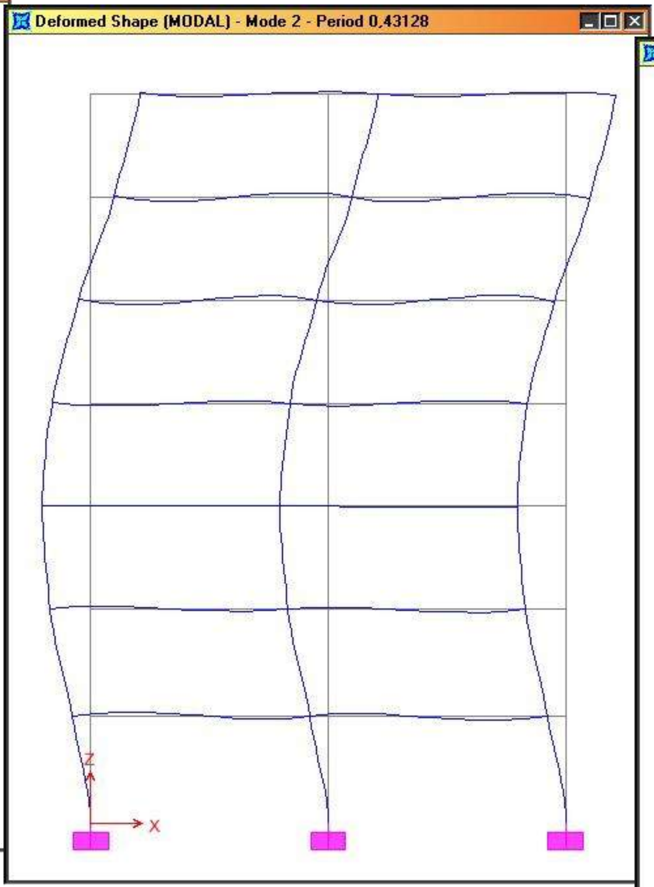
- **Ako se vlastiti oblici (prirodni modovi) vibracija sustava s *n* stupnjeva slobode upotrijebe kao generalizirane koordinate s ciljem definiranja njegova odziva, *n* jednadžbi gibanja postaje neovisno. S takvim koordinatama svaka od neovisnih jednadžbi rješava se zasebno kao da odgovara pojedinom sustavu s jednim stupnjem slobode (SDOF).**

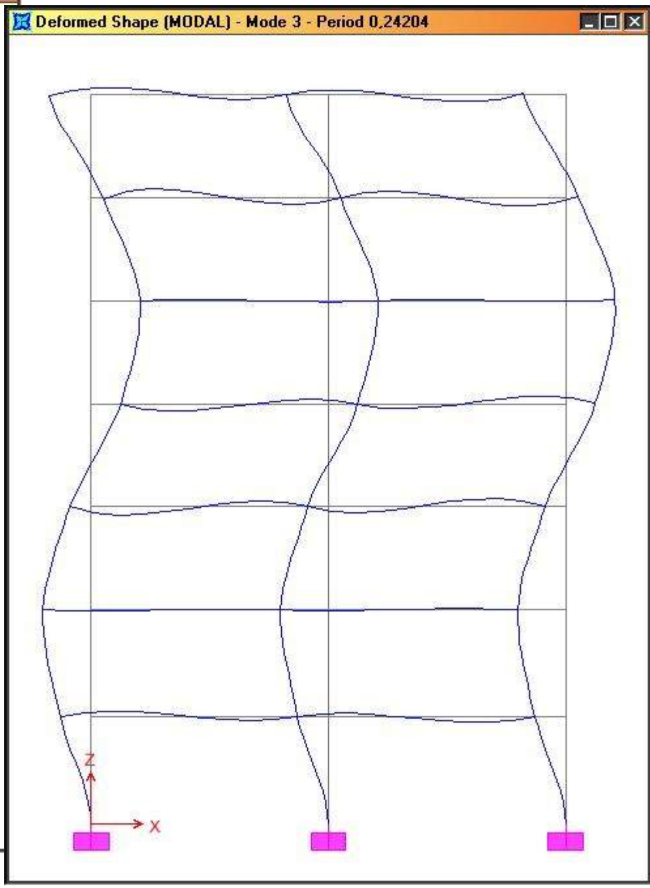
- **Odziv sustava s *n* stupnjeva slobode (MDOF) metodom superpozicije oblika određuje se sumiranjem odziva pojedinih oblika.**

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*



# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- Početni proračuni:
  - Formiranje matrice masa [m], matrice popustljivosti [a] ili matrice krutosti [k] i vektora vanjskih sila {F(t)}
  - Određivanje vlastitih frekvencija i vektora oblika {u} (rješenjem problema vlastitih vrijednosti):

    a) metoda karakterističnog polinoma ili determinante

    - Problem vlastitih vrijednosti definiran je jednadžbom

$$[\mathrm{m}]\{\ddot{\mathrm{u}}\}-\lambda[\mathrm{k}]\{\mathrm{u}\}=\{0\}, \qquad \lambda = 1/\omega^2$$

$$([\mathrm{D}]-\lambda[\mathrm{I}])\{\mathrm{u}\}=\{0\}, \qquad [\mathrm{D}]=[\mathrm{a}][\mathrm{m}]$$

$$\det([\mathrm{D}]-\lambda[\mathrm{I}])=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\mathrm{i}}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}, \qquad T_i = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- Početni proračuni:
  - Vektori oblika vibriranja su međusobno ortogonalni vektori u odnosu na matricu masa. Ukoliko njihov umnožak normiramo, tada kažemo da su vektori ortonormirani u odnosu na matricu masa i vrijedi:

$$\{\overline{\mathrm{u}}\}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}]\{\overline{\mathrm{u}}\}_{\mathrm{j}}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\{\overline{\mathrm{u}}\}_{\mathrm{j}}=\alpha_{\mathrm{i}}\{\mathrm{u}\}_{\mathrm{i}}$$

$$\alpha_{\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{1}{\{\mathrm{u}\}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}]\{\mathrm{u}\}_{\mathrm{i}}}}$$

  - Modalna matrica (matrica transformacije) skup je vektora oblika:

$$[\Phi]=\left[\{\overline{\mathrm{u}}\}_{1}\quad\{\overline{\mathrm{u}}\}_{2}\quad\ldots\quad\{\overline{\mathrm{u}}\}_{\mathrm{n}}\right]$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- Početni proračuni:
  - b) metoda matrične iteracije
    - Polazimo od jednadžbe: $$[D]\{u\}-\frac{1}{\omega^2}\{u\}=\{0\}$$
    - Pretpostavimo prvi vektor pomaka $\{u\}_i$
    - Iteriramo dok rezultantni vektor pomaka ne bude jednak početnom
    - Ortonormiramo vektore oblika
    - Formiramo modalnu matricu
- Provjera ortogonalnosti normiranih vektora oblika

$$[\Phi]^T[m][\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}\quad [\Phi]^T[k][\Phi]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2\end{bmatrix}$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- Početni proračuni:
  - Transformacija sustava u sustav nezavisnih diferencijalnih jednadžbi pomoću modalne matrice $[\Phi]$

$$[\mathrm{m}]\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{c}]\{\dot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{k}]\{\mathrm{x}\}=\{\mathrm{F}(\mathrm{t})\} \quad / \ [\Phi]^{\mathrm{T}} \quad / \ [\Phi][\Phi]^{-1}$$

$$[\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}][\Phi][\Phi]^{-1}\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{c}][\Phi][\Phi]^{-1}\{\dot{\mathrm{x}}\}+[\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}][\Phi][\Phi]^{-1}\{\mathrm{x}\}=[\Phi]^{\mathrm{T}}\{\mathrm{F}(\mathrm{t})\}$$

$$[\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}][\Phi]=[\mathrm{I}], \qquad [\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{c}][\Phi]=[2\xi\omega] \qquad [\Phi]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}][\Phi]=\left[\omega^{2}\right]$$

$$\{\ddot{\eta}\}+[2\xi\omega]\{\dot{\eta}\}+\left[\omega^{2}\right]\{\eta\}=\{f(t)\}$$

  - Odabir odgovarajućeg vremenskog intervala numeričke integracije

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{10}$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *9 Određivanje dinamičkog odziva superpozicijom vlastitih oblika (modova) – MODALNA ANALIZA*

- Proračuni za svaki pojedinačni vremenski korak:
  - Zasebni iterativni proračuni svake pojedinačne nezavisne jednadžbe nekom od numeričkih metoda (metoda inetrpolacije uzbude, metoda konačnih diferenci, Newmarkova metoda)
  - Određivanje tzv. modalnih veličina (pomaka, brzina i ubrzanja)

$$\{\eta\}_{i+1}, \quad \{\dot{\eta}\}_{i+1}, \quad \{\ddot{\eta}\}_{i+1}$$

  - Transformacija modalnih u stvarne pomake, brzine i ubrzanja cjelokupnog sustava

$$[\Phi]^{-1}\{\ddot{x}\} = \{\ddot{\eta}\} \qquad \Rightarrow \qquad \{\ddot{x}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\}$$

$$[\Phi]^{-1}\{\dot{x}\} = \{\dot{\eta}\} \qquad \Rightarrow \qquad \{\dot{x}\} = [\Phi]\{\dot{\eta}\}$$

$$[\Phi]^{-1}\{x\} = \{\eta\} \qquad \Rightarrow \qquad \{x\} = [\Phi]\{\eta\}$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *10 Određivanje dinamičkog odziva pomoću direktne integracije*

- **Jednadžbe gibanja općeg sustava s više stupnjeva slobode:**

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F(t)\}$$

**gdje su [m], [c], [k] = matrice masa, prigušenja i krutosti**
**{F(t)} = vektor vanjskih sila**
**{x}, {x}, {x}= vektori ubrzanja, brzina i pomaka.**

- **Direktnom se integracijom ove diferencijalne jednadžbe integriraju numeričkom metodom u koracima. "Direktno" znači da nema transformacija jednadžbi u neki alternativni koordinatni sustav (kao što je to slučaj u modalnoj analizi) već se one rješavaju "direktno" u vezanom obliku.**
- **Vremensko područje u kojem tražimo rješenje dijeli se na diskretne vremenske intervale $\Delta t$, te se algoritmom direktne integracije dobiva rješenje u trenutku $t+\Delta t$ pomoću poznatog rješenja u trenutku t, počev od t=0.**

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## 10.1 Metoda centralnih diferenci

***Početni proračuni:***

**Formiranje matrice krutosti [k], matrice masa [m] i matrice prigušenja [c]**

**Definiranje početnih uvjeta $\{x\}_0$ i $\{x\}_0$**

**Proračun početnog ubrzanja $\{x\}_0$:**

$$\{\ddot{x}\}_0 = [\mathbf{m}]^{-1}\left(\{F(0)\} - [\mathbf{c}]\{\dot{x}\}_0 + [\mathbf{k}]\{x\}_0\right)$$

**Odabir koraka integracije $\Delta t$, tako da je $\Delta t < \Delta t_{cr} = T_n/\pi$ i proračun konstanti integracije**

$$a_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \qquad a_1 = \frac{1}{2\,\Delta t} \qquad a_2 = 2a_0 \qquad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

**Proračun pomaka $\{x\}_{-\Delta t}$**

$$\{x\}_{-\Delta t} = \{x\}_0 - \Delta t\{\dot{x}\}_0 + a_3\{\ddot{x}\}_0$$

**Formiranje efektivne matrice masa**

$$[\hat{\mathbf{m}}] = a_0[\mathbf{m}] + a_1[\mathbf{c}]$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *10.1 Metoda centralnih diferenci*

***Za svaki korak integracije:***

**Proračun efektivnog vektora sila u trenutku vremena t**

$$\left\{\hat{F}\right\}_t = \left\{F\right\}_t - \left[\left[\mathbf{k}\right] - a_2\left[\mathbf{m}\right]\right]\left\{x\right\}_t - \left[a_0\left[\mathbf{m}\right] - a_1\left[\mathbf{c}\right]\right]\left\{x\right\}_{t-\Delta t}$$

**Određivanje pomaka u trenutku vremena t+Δt**

$$\left[\hat{\mathbf{m}}\right]\left\{x\right\}_{t+\Delta t} = \left\{\hat{F}\right\}_t \rightarrow \left\{x\right\}_{t+\Delta t} = \left[\hat{\mathbf{m}}\right]^{-1}\left\{\hat{F}\right\}_t$$

**Određivanje ubrzanja i brzina u trenutku t**

$$\left\{\ddot{x}\right\}_t = a_0\left(\left\{x\right\}_{t-\Delta t} - 2\left\{x\right\}_t + \left\{x\right\}_{t+\Delta t}\right)$$

$$\left\{\dot{x}\right\}_t = a_1\left(-\left\{x\right\}_{t-\Delta t} + \left\{x\right\}_{t+\Delta t}\right)$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## 10.2 Newmarkova integracijska metoda

***Početni proračuni:***

**Formiranje matrice krutosti [k], matrice masa [m] i matrice prigušenja [c]**

**Definiranje početnih uvjeta $\{x\}_0$ i $\{x\}_0$**

**Proračun početnog ubrzanja $\{x\}_0$:**

$$\{\ddot{x}\}_0 = [\mathbf{m}]^{-1}\left(\{F(0)\} - [\mathbf{c}]\{\dot{x}\}_0 + [\mathbf{k}]\{x\}_0\right)$$

**Odabir koraka integracije $\Delta$t, parametara $\alpha$ i $\delta$ te proračun konstanti integracije**

$$\delta \geq 0{,}50 \qquad \alpha \geq 0{,}25(0{,}50 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\,\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\,\Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) \quad a_6 = \Delta t(1-\delta) \quad a_7 = \delta\Delta t$$

**Formiranje efektivne matrice krutosti**

$$[\hat{\mathbf{k}}] = [\mathbf{k}] + a_0[\mathbf{m}] + a_1[\mathbf{c}]$$

# SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE

## *10.2 Newmarkova integracijska metoda*

***Za svaki korak integracije:***

**Proračun efektivnog vektora sila u trenutku vremena t+Δt**

$$\left\{\hat{F}\right\}_{t+\Delta t} = \left\{F\right\}_{t+\Delta t} + \left[\mathbf{m}\right]\left(a_0\left\{x\right\}_t + a_2\left\{\dot{x}\right\}_t + a_2\left\{\ddot{x}\right\}_t\right)$$
$$+\left[\mathbf{c}\right]\left(a_1\left\{x\right\}_t + a_4\left\{\dot{x}\right\}_t + a_5\left\{\ddot{x}\right\}_t\right)$$

**Određivanje pomaka u trenutku vremena t+Δt**

$$\left[\hat{\mathbf{k}}\right]\left\{x\right\}_{t+\Delta t} = \left\{\hat{F}\right\}_{t+\Delta t} \rightarrow \left\{x\right\}_{t+\Delta t} = \left[\hat{\mathbf{k}}\right]^{-1}\left\{\hat{F}\right\}_{t+\Delta t}$$

**Određivanje ubrzanja i brzina u trenutku t+Δt**

$$\left\{\ddot{x}\right\}_{t+\Delta t} = a_0\left(\left\{x\right\}_{t+\Delta t} - \left\{x\right\}_t\right) - a_2\left\{\dot{x}\right\}_t - a_3\left\{\ddot{x}\right\}_t$$

$$\left\{\dot{x}\right\}_{t+\Delta t} = \left\{\dot{x}\right\}_t + a_6\left\{\ddot{x}\right\}_t + a_7\left\{\ddot{x}\right\}_{t+\Delta t}$$