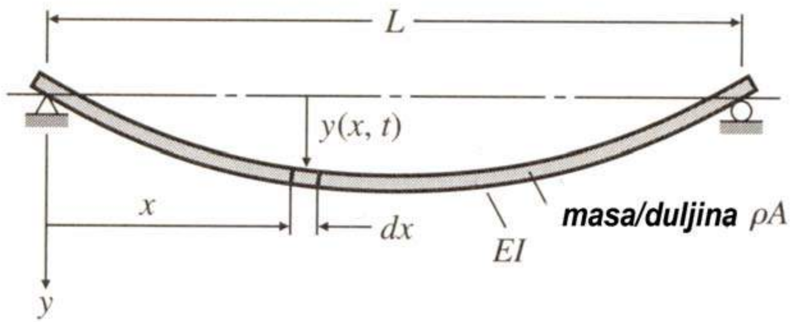
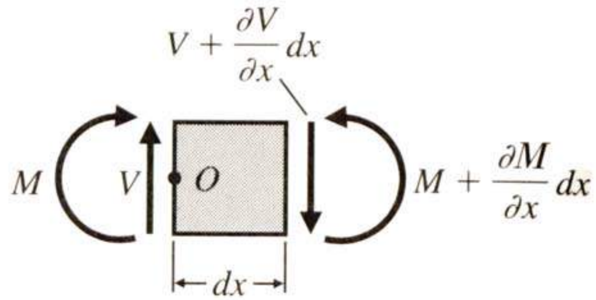
11 VIBRACIJE KONTINUIRANIH SUSTAVA

- Sustavi s distribuiranom (raspodjeljenom) masom i krutosti;
- Beskonačno mnogo stupnjeva slobode;
- Jednadžbe matematičkog modela su parcijalne diferencijalne jednadžbe;
- Pretpostavke rješenja:
  - materijal je homogen, elastičan i Hookeov,
  - materijal je izotropan;
- Analitičko zatvoreno rješenje moguće je samo za relativno jednostavne kontinuirane sustave s jasno definiranim rubnim uvjetima.

11.1 SLOBODNE POPREČNE VIBRACIJE JEDNOLIKIH GREDA

- ***Bernoulli – Eulerova greda***





- zanemarimo inercijska svojstva pri rotaciji:

$$\sum M_O = 0$$

$$V dx = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\sum F_y = 0, \quad uz\ II.\ Newtonov\ zakon$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

11.1 SLOBODNE POPREČNE VIBRACIJE JEDNOLIKIH GREDA

- ***Bernoulli – Eulerova greda***

$$M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$-\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad gdje\ je \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

11.1 SLOBODNE POPREČNE VIBRACIJE JEDNOLIKIH GREDA

- ***Metoda separacije varijabli:*** ***$y(x,t) = f(x) \cdot g(t)$***

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} g(t), \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 g(t)}{dt^2} f(x)$$

$$\frac{-c^2}{f(x)} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

- *Da bi dvije nezavisne funkcije bile jednake, one moraju biti jednake do na konstantu. Pretpostavimo da je odabrana konstanta:* ***$-\omega_n^2$***

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega_n^2 g(t) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \frac{\omega_n^2}{c^2} f(x) = 0 \qquad (2)$$

11.1 SLOBODNE POPREČNE VIBRACIJE JEDNOLIKIH GREDA

- *Rješenja su prethodnih jednadžbi:*

$$(1) \qquad g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$(2) \qquad f(x) = C_1 \sinh\beta x + C_2 \cosh\beta x + C_3 \sin\beta x + C_4 \cos\beta x$$

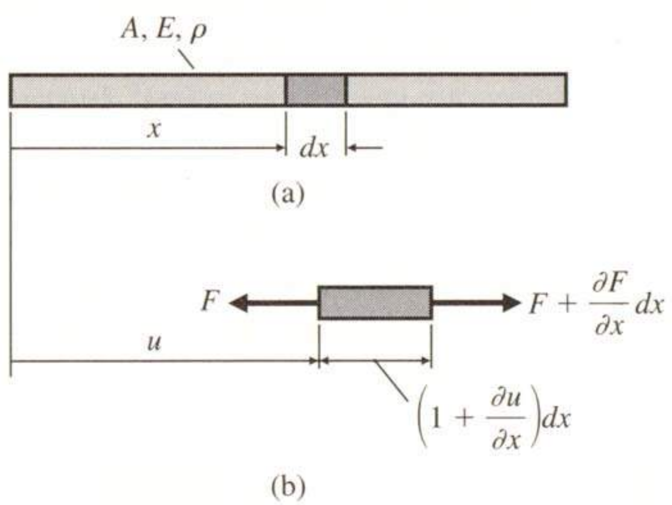
$$gdje\ \ je \quad \beta^4 = \frac{\omega_n^2}{c^2}$$

- *Ukupno je rješenje*

$$y(x,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)(C_1 \sinh\beta x + C_2 \cosh\beta x + C_3 \sin\beta x + C_4 \cos\beta x)$$

- *Konstante se određuju iz rubnih i početnih uvjeta.*

11.2 UZDUŽNE VIBRACIJE JEDNOLIKOG ŠTAPA



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial x}dx - F = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$F = EA\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (Hooke)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Jednadžba vala:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad gdje\ je \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad valna\ brzina.$$

11.2 UZDUŽNE VIBRACIJE JEDNOLIKOG ŠTAPA

- *Metoda separacije varijabli:* ***u(x,t) = f(x) · g(t)***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} f(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} g(t)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} g(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{g(t)} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}$$

- *Nakon separacije varijabli, parcijalne derivacije više nisu potrebne;*
- *Jedino je moguće rješenje da su obje funkcije konstante;*
- *Odaberimo da je to konstanta oblika* ***-(ω /c)*** *:*

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad i \quad \frac{1}{c^2} \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 \quad i \quad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0$$

11.2 UZDUŽNE VIBRACIJE JEDNOLIKOG ŠTAPA

- *Rješenja su prethodnih diferencijalnih jednadžbi*

$$f(x) = C_1 \sin\frac{\omega}{c}x + C_2 \cos\frac{\omega}{c}x$$

$$g(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

- *Ukupno je rješenje*

$$u(x,t) = \left(C_1 \sin\frac{\omega}{c}x + C_2 \cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right)$$

za proizvoljne konstante određene iz početnih i rubnih uvjeta.

12 ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI

Rayleigheva metoda

- *Temelji se na zakona očuvanja energije:* ***V_{max} = T_{max}.***

$$V_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l M d\varphi$$

$$M = -EIy'', \qquad d\varphi = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = y''dx \qquad T_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dm$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2}E\int_0^l Iy''y''dx = \frac{1}{2}E\int_0^l I\left(y''\right)^2 dx \qquad T_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l \omega^2 y^2 \mu dx = \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \mu\, y^2 dx$$

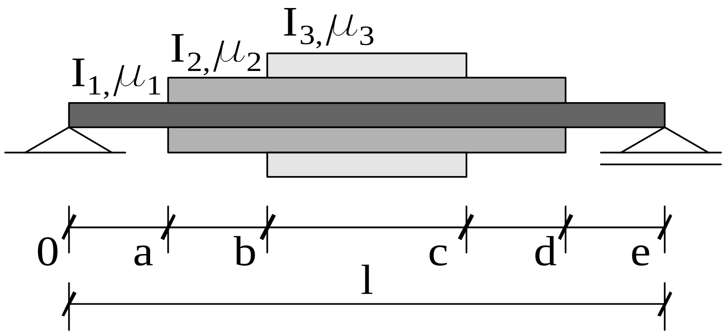
Rayleighev kvocijent za pretpostavljenu funkciju y

$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^l \mu\, y^2 dx = \frac{1}{2}E\int_0^l I\left(y''\right)^2 dx \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{E\int_0^l I\left(y''\right)^2 dx}{\int_0^l \mu\, y^2 dx}$$

12 ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI

Rayleigheva metoda

- *Metoda je pogodna kod kontinuiranih sustava s promjenjivim poprečnim presjekom :*



$$\omega^2 = \frac{E\left(\int_0^a I_1\left(y''\right)^2 dx + \int_a^b I_2\left(y''\right)^2 dx + \int_b^c I_3\left(y''\right)^2 dx + \cdots + \int_d^e I_1\left(y''\right)^2 dx\right)}{\int_0^a \mu_1\, y^2 dx + \cdots + \int_d^e \mu_1\, y^2 dx}$$

ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI

Rayleigheva metoda

- *Ako osim kontinuirane, postoje i koncentrirane mase, primjenjuje se sljedeći modificirani izraz :*

$$\omega^2 = \frac{E\int_0^l I(x)\left(y''\right)^2 dx}{\int_0^l \mu(x)\, y^2 dx + \sum M_i y_i^2}$$

gdje je *M_i – koncentrirana masa*

y_i – ordinata ispod mase M_i (pomak).

ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI
Ritzova metoda

- *Temelji se na Rayleighevom kvocijentu:*

$$\omega^2 = \frac{E\int_0^l I(x)(y'')^2 dx}{\int_0^l \mu(x)\, y^2 dx}$$

- *Pretpostavljamo da je približno rješenje suma niza približnih rješenja:*

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \quad y'' = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \quad \varphi_i - bazne\ \ funkcije$$

- *Tako je na primjer za i=2:*

$$y = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \quad y'' = a_1\varphi_1'' + a_2\varphi_2''$$

ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI

Ritzova metoda

$$\int_0^l EI(x)\left(y''\right)^2 dx - \omega^2 \int_0^l \mu(x)\, y^2 dx = 0$$

$$\int_0^l EI(x)\left(a_1\varphi_1'' + a_2\varphi_2''\right)^2 dx - \omega^2 \int_0^l \mu(x)\left(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\right)^2 dx = 0$$

$$\omega^2 = \frac{V}{T} \quad \Rightarrow \quad V - \omega^2 T = 0$$

- *Uvjet minimuma potencijala:* $\dfrac{\partial\left(V - \omega^2 T\right)}{\partial a_i} = 0$
- *Sustav od* ***n*** *linearnih homogenih jednadžbi*

ENERGETSKE METODE ZA ODREĐIVANJE KRUŽNIH FREKVENCI

Ritzova metoda

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_1''dx + a_2\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''dx - a_1\omega^2\int_0^l \mu\,\varphi_1\varphi_1 dx - a_2\omega^2\int_0^l \mu\,\varphi_1\varphi_2 dx = 0$$

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''dx + a_2\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_2''dx - a_1\omega^2\int_0^l \mu\,\varphi_1\varphi_2 dx - a_2\omega^2\int_0^l \mu\,\varphi_2\varphi_2 dx = 0$$

- *Pojednostavljeni zapis*

$$a_1\left(u_1 - \omega^2 w_1\right) + a_2\left(u_{12} - \omega^2 w_{12}\right) = 0$$
$$a_1\left(u_{12} - \omega^2 w_{12}\right) + a_2\left(u_2 - \omega^2 w_2\right) = 0$$

- *Matrični zapis*

$$\begin{bmatrix} \left(u_1 - \omega^2 w_1\right) & \left(u_{12} - \omega^2 w_{12}\right) \\ \left(u_{12} - \omega^2 w_{12}\right) & \left(u_2 - \omega^2 w_2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

- *Rješenje:*

$$\det\left[\quad\right] = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \omega^2$$