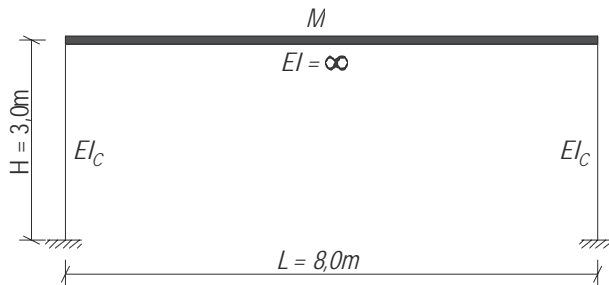
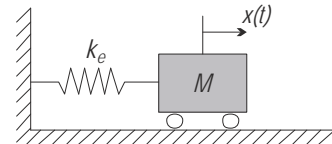


1) **3m** visok i **8m** širok jednopoljni jednokatni okvir sastoji se od krute grede mase  $M = 5000\text{kg}$  i stupova zanemarive mase a krutosti na savijanje  $EI_c = 4,5 \cdot 10^3 \text{kNm}^2$ .

- Odredite vlastitu frekvenciju poprečnih vibracija okvira te vlastiti period.
- Kolika je sila potrebna za poprečni pomak okvira u nivou grede od **25mm**?



Fizikalni model konstrukcije



Matematički model zamjenjujućeg sustava s jednim stupnjem slobode

◆ Krutost zamjenjujućeg sustava (SDOF),  $k_e$

$$k_e = \frac{12EI_c}{H^3} \cdot 2 \quad (\text{paralelna veza dvaju obostrano upetih stupova})$$

$$k_e = 4000 \text{kN/m}$$

◆ Vlastita kružna frekvencija,  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{k_e}{M} = \frac{4000}{5} = 800 \quad \Rightarrow \quad \omega = 28,284 \text{ rad/s}$$

◆ Vlastita frekvencija,  $f$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,502 \text{ Hz}$$

◆ Vlastiti period,  $T$

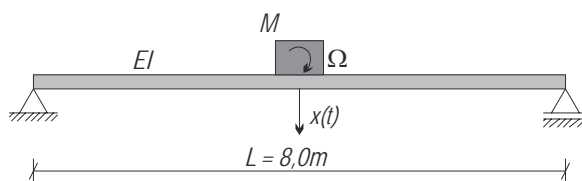
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0,222 \text{ s}$$

◆ Sila potrebna za poprečni pomak okvira od 25mm,  $F$

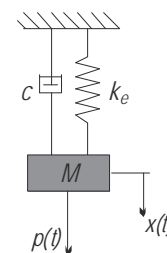
$$F = k_e \cdot x = 4000 \cdot 0,025 = 100 \text{ kN}$$

2) Rashladni uređaj mase **1600kg** montiran je na sredini raspona proste grede zanemarive mase i duljine **8m** čija je krutost na savijanje  $8 \cdot 10^3 \text{kNm}^2$ . Uređaj radi s **300** okretaja u minuti te pri tome proizvodi neuravnoteženo opterećenje od **120kg**.

- Uz pretpostavljeno prigušenje od **5%**, odredite amplitudu trajnog dijela dinamičkog odziva te ukupni progib (*statički* + *dinamički*) sredine raspona grede.
- Koliki broj okretaja rada stroja može dovesti do rezonancije te koliki je pri tome nastali ukupni progib?



Fizikalni model konstrukcije



Matematički model zamjenjujućeg sustava s jednim stupnjem slobode

- ◆ Krutost zamjenjujućeg sustava (SDOF),  $k_e$

$$k_e = \frac{48EI}{L^3} = 750 \text{ kN/m}$$

- ◆ Vlastita kružna frekvencija,  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{k_e}{M} = \frac{750}{1,6} = 468,75 \Rightarrow \omega = 21,651 \text{ rad/s}$$

- ◆ Kružna frekvencija uzbudne sile,  $\Omega$

$$\Omega = 300 \text{ okr/min} = 300 \cdot \frac{2\pi}{60} = 31,416 \text{ rad/s}$$

- ◆ Omjer frekvencija,  $r$

$$r = \Omega/\omega = 1,451$$

- ◆ Amplituda trajnog dijela dinamičkog odziva

$$X_f = \mu_{din} X_0 = \frac{F_0/k_e}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{0,120 \cdot 9,81/750}{\sqrt{(1-1,451^2)^2 + (2 \cdot 0,05 \cdot 1,451)^2}} = 0,00141 \text{ m} = 1,41 \text{ mm}$$

- ◆ Statički progib od vlastite težine sustava

$$X_s = \frac{G}{k_e} = \frac{1,6 \cdot 9,81}{750} = 0,02093 \text{ m} = 20,93 \text{ mm}$$

- ◆ Ukupni progib u sredini raspona

$$X_{ukup} = X_s + X_f = 22,34 \text{ mm}$$

- ◆ Broj okretaja za slučaj rezonancije ( $r=1$ )

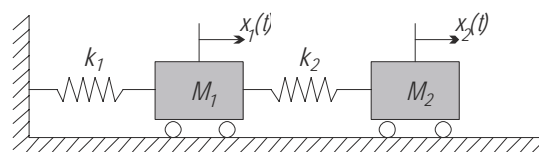
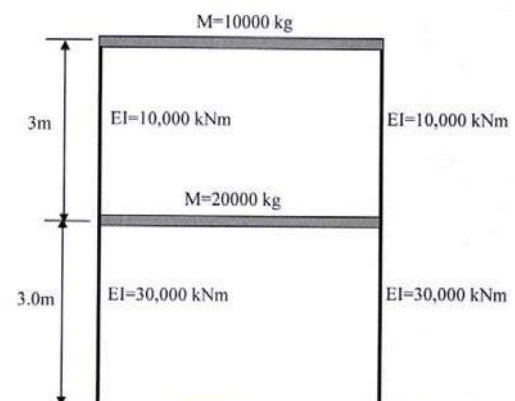
$$\Omega = \omega = 21,651 \cdot \frac{60}{2\pi} = 206,7 \text{ okr/min}$$

- ◆ Ukupni progib u sredini raspona pri rezonanciji

$$X_{ukup} = X_s + X_f = X_s + \frac{X_0}{2\xi} = 36,63 \text{ mm}$$

- 3) Dvokatna okvirna konstrukcija krutih greda i zanemarivih masa stupova, prikazana je na slici.

- Odredite vlastite frekvencije i oblike poprečnih vibracija;
- Normirajte vlastite vektore i skicirajte njihove oblike;
- Provjerite da li su ispunjeni uvjeti ortogonalnosti vlastitih oblika s obzirom na matrice masa i krutosti.



Matematički model zamjenjujućeg sustava s dva stupnja slobode

- a)

Uz pretpostavku o krutim gredama, primjenjujemo slaganje krutosti pojedinih stupova jedne etaže u paralelnom spoju. Krutost je pojedinog stupa  $k_s = 12EI/H^3$ .

- ♦ Matrica krutosti,  $\mathbf{K}$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } k = \frac{12 \cdot 10000}{3^3} = 4444,4 \text{ kN/m}$$

- ♦ Matrica masa

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } m = 10000 \text{ kg} = 10 \text{ t}$$

- ♦ Karakteristična jednadžba i vlastite frekvencije

$$\det[\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}] = \begin{vmatrix} 8k - 2\lambda_i m & -2k \\ -2k & 2k - \lambda_i m \end{vmatrix} = (8k - 2\lambda_i m)(2k - \lambda_i m) - 4k^2 = 0$$

$$m^2 \lambda_i^4 - 6km \lambda_i^2 + 6k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \omega_i^2 = \frac{6km \pm \sqrt{36k^2 m^2 - 24k^2 m^2}}{2m^2}$$

$$\omega_1^2 = (3 - \sqrt{3}) \frac{k}{m} = 563,53 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 23,74 \text{ rad/s}, \quad f_1 = 3,78 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = (3 + \sqrt{3}) \frac{k}{m} = 2103,11 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 45,86 \text{ rad/s}, \quad f_2 = 7,30 \text{ Hz}$$

- ♦ Vlastiti oblici

$$\begin{bmatrix} 8k - 2(3 - \sqrt{3})k & -2k \\ -2k & 2k - (3 - \sqrt{3})k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

prvi vlastiti oblik

$$5,464k\phi_{11} - 2k\phi_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{11} = 0,366\phi_{12}$$

$$\begin{bmatrix} 8k - 2(3 + \sqrt{3})k & -2k \\ -2k & 2k - (3 + \sqrt{3})k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

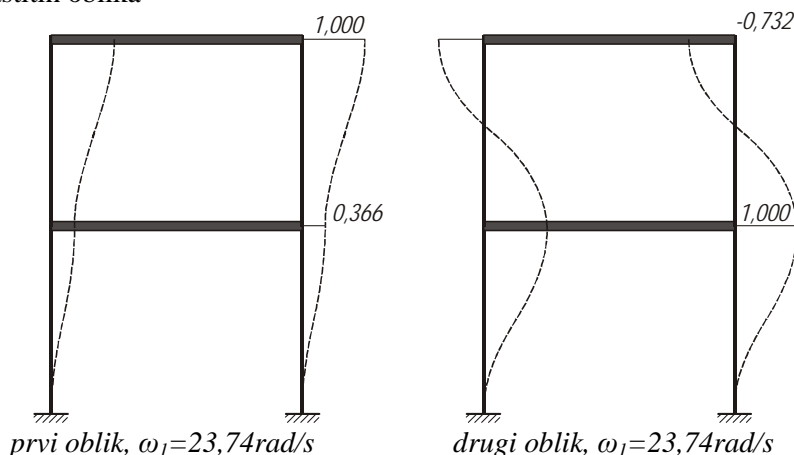
drugi vlastiti oblik

$$-1,464k\phi_{21} - 2k\phi_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{22} = -0,732\phi_{21}$$

b)

- ♦ Normirani vlastiti oblici:  $\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,366 \\ 1,000 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ -0,732 \end{bmatrix}$ .

- ♦ Skice vlastitih oblika



c)

Uvjeti ortogonalnosti

$$\phi_1^T \mathbf{M} \phi_2^T = [0,366 \quad 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,732 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\phi_1^T \mathbf{K} \phi_2^T = [0,366 \quad 1] \begin{bmatrix} 8k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,732 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$