12 STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI

12.1 Uvod

Prvo se valja prisjetiti općih prednosti što ih statički neodređeni nosači imaju u odnosu na statički određene:

- **Manji** su **momenti savijanja** pri **jednaku rasponu** i pod **jednakim opterećenjima**.
- **Manji** su **progibi** pri **jednakoj krutosti**.
- Imaju **veću sigurnost** u **graničnomu stanju nosivosti**.

Ovo vrijedi za **sve** vrsti nosača (bez obzira na gradivo), a **PB nosači** imaju još **dvije** dodatne **prednosti**:

- Potrebno je **manje skupih sidara** i
- **Manji** je **utrošak** (također skupoga) **rada na prednapinjanju**.

Naravno, PB nosači imaju i **nedostataka**, pa i **krupnih**.

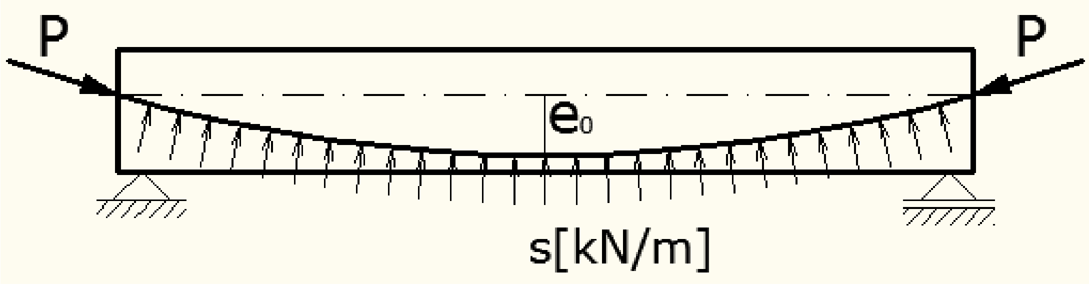
12.1 Uvod

Najkrupniji su ovi nedostatci:

- Vrlo su **osjetljivi** na **prisilna izobličenja**, a osobito na **slijeganje ležajeva**.
- **Učinkovitost prednapinjanja** općenito je **znatno manja** nego u **statički određenih nosača**.

Međutim, vrlo je važno naglasiti kako se **<u>MOGU PREDNAPINJATI</u> SAMO ONI NOSAČI ŠTO SE MOGU <u>NESMETANO SKRAĆIVATI</u> PRI TOMU**.

Prije nego što prijeđemo na razmatranje **učinka statičke neodređenosti**, prisjetimo se kakav je **učinak napinjanja natega** na običan, **statički određen nosač** (slika 12.1).



Slika 12.1: Skretne sile zakrivljene natege

Duž natege djeluju još **sile trenja**.

12.1 Uvod

Na predhodnoj je slici predočen slučaj **jednoliko zakrivljene natege**, kakva se najčešće rabi, a sve što ćemo o njoj reći **načelno vrijedi** i za **natege izlomljene osi**.

Dakle na AB nosač djeluju ove **vanjske sile**:

- **sile uvođenja** iliti **sidrene sile** (najčešće na **čelima nosača**);
- **skretne sile** i
- **sile trenja**.

Kao što smo vidjeli u poglavlju o **djelovanju prednapinjanja na AB sklop**, ovim se silama **AB nosač suprotstavlja sustavom samouravnoteženih naprezanja** (njem. *Eigenspannungszustand*).

Dakle ove **VANJSKE SILE NE IZAZIVAJU NIKAKVE DODATNE PRIDRŽAJNE SILE** (reakcije) u **potporama** pod nosačem.

12.1 Uvod

To oda znači da ako znamo **tijek sile prednapinjanja duž nosača**, što se dobije **odbijanjem gubitaka sile** od **trenja i proklizanuća klina** od **nazivne početne sile**, možemo u **svakom presjeku nosača** dobiti **mjerodavne rezne sile**:

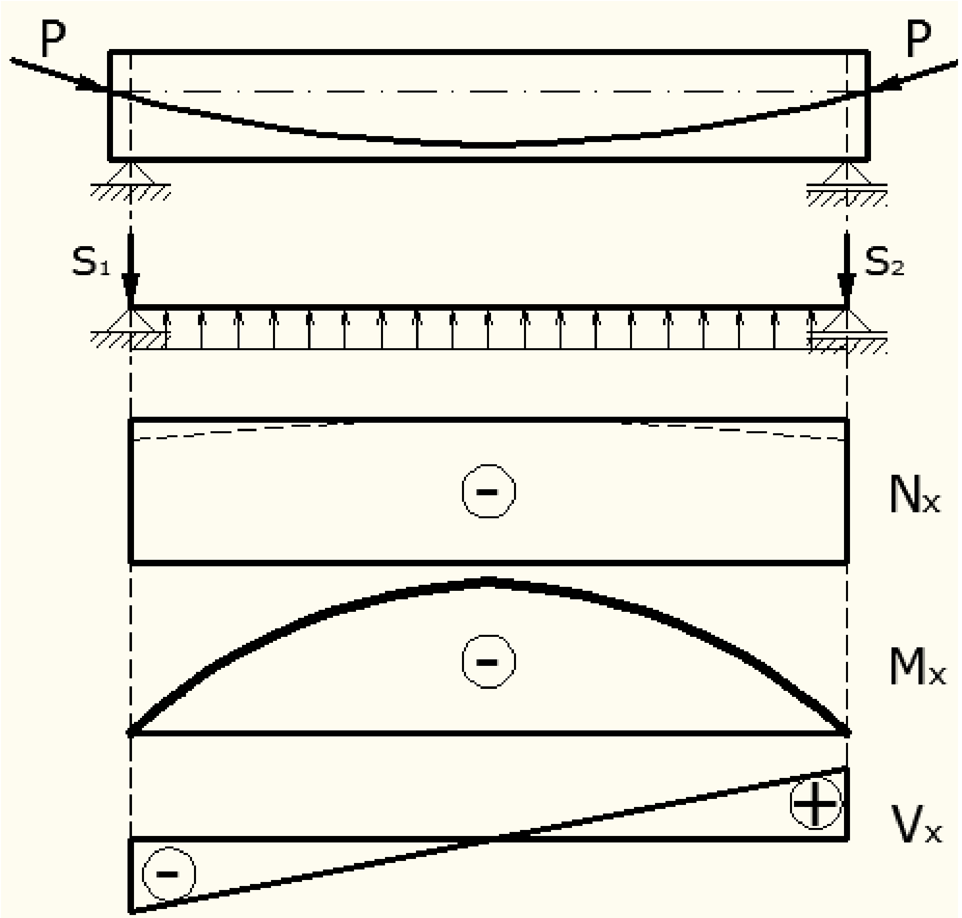
- **uzdužnu silu**;
- **moment savijanja** i
- **poprečnu silu**.

U doba kada su se **proračuni** obavljali **ručno** (“pješice”) u pravilu se je crtao samo **tijek sile prednapinjanja** (što je ujedno i **tijek uzdužne sile**), dok su se **ostale dvije rezne sile** određivale samo u **mjerodavnim presjecima**.

Danas, kada raspolažemo moćnim **računalima**, predočuju se tijekovi **svih triju reznih sila**.

Na slici 12.2 predočeni su, **pojednostavnjeno**, tijekovi triju reznih sila.

12.1 Uvod



Slika 12.2: Rezne sile od djelovanja zakrivljene natege

Pojednostavnjenja se tiču i **uzdužne sile** (isprekidano je predočen "točniji" tijek) i, osobito, **momenta savijanja** i **poprečne sile**.

Naime, ako se prisjetimo određivanja **gubitaka sile prednapinjanja od trenja i prokliznuća klina**, vidjet ćemo da bi **uzdužna sila** trebala biti predočena crtom sastavljenom od **odsječaka pravaca**.

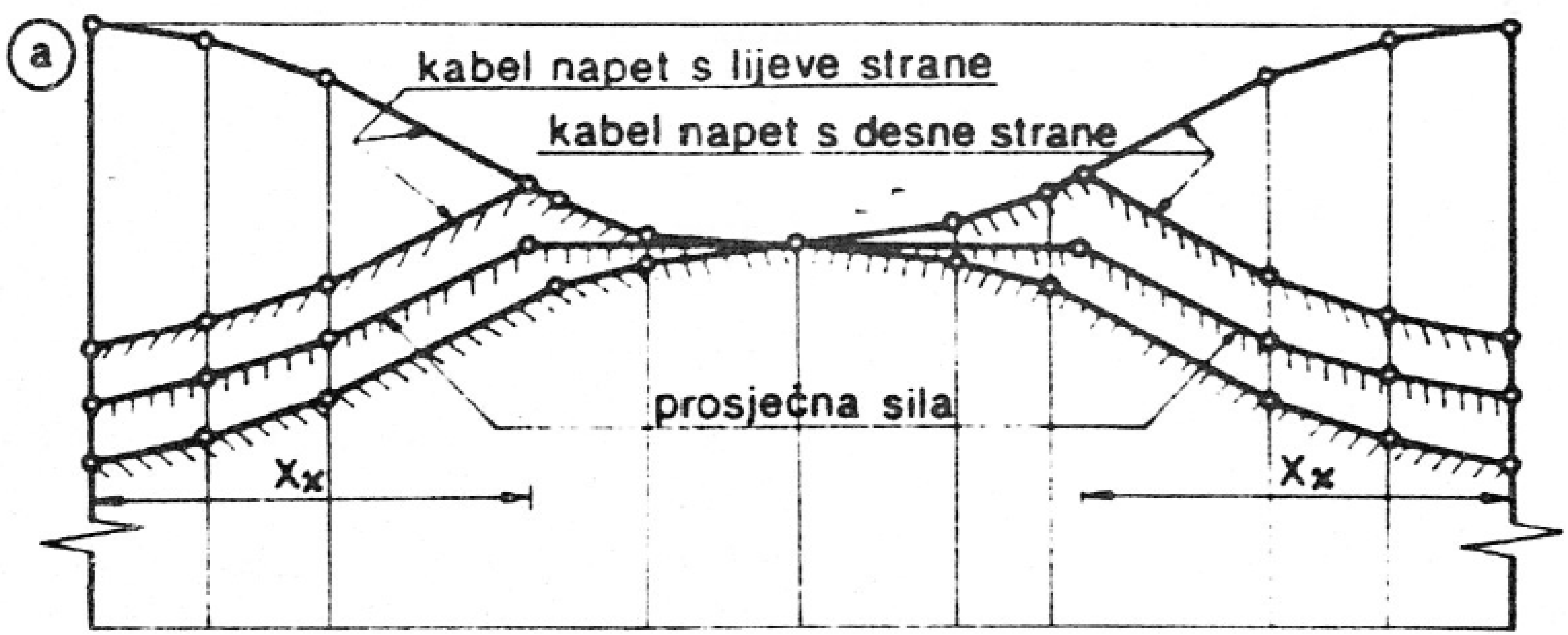
Onda bi se tijek **momenata** savijanja trebao sastojati od odsječaka **parabola** i pravaca.

Slično bi tijek **poprečne sile** bio niz odsječaka **pravaca**.

12.1 Uvod

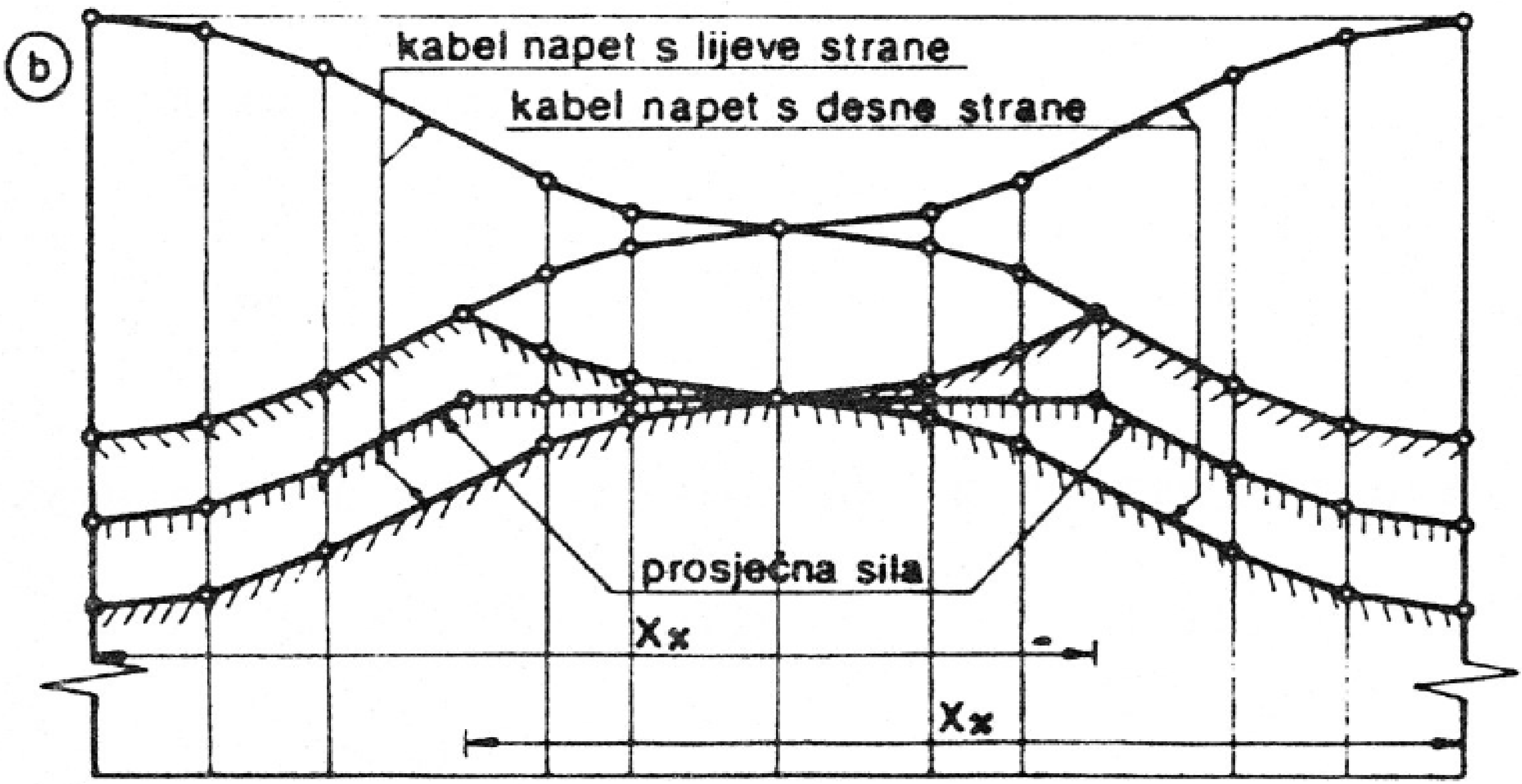
Djelovanje prednapinjanja kao sustava vanjskih sila osobito se rado rabi pri proračunu statički neodređenih sustava, kako ćemo vidjeti kasnije.

Zato predočimo još jednom tijek sile prednapinjanja u zavisnosti od dosega utjecaja prokliznuća klina (slike 12.3 i 12.4).



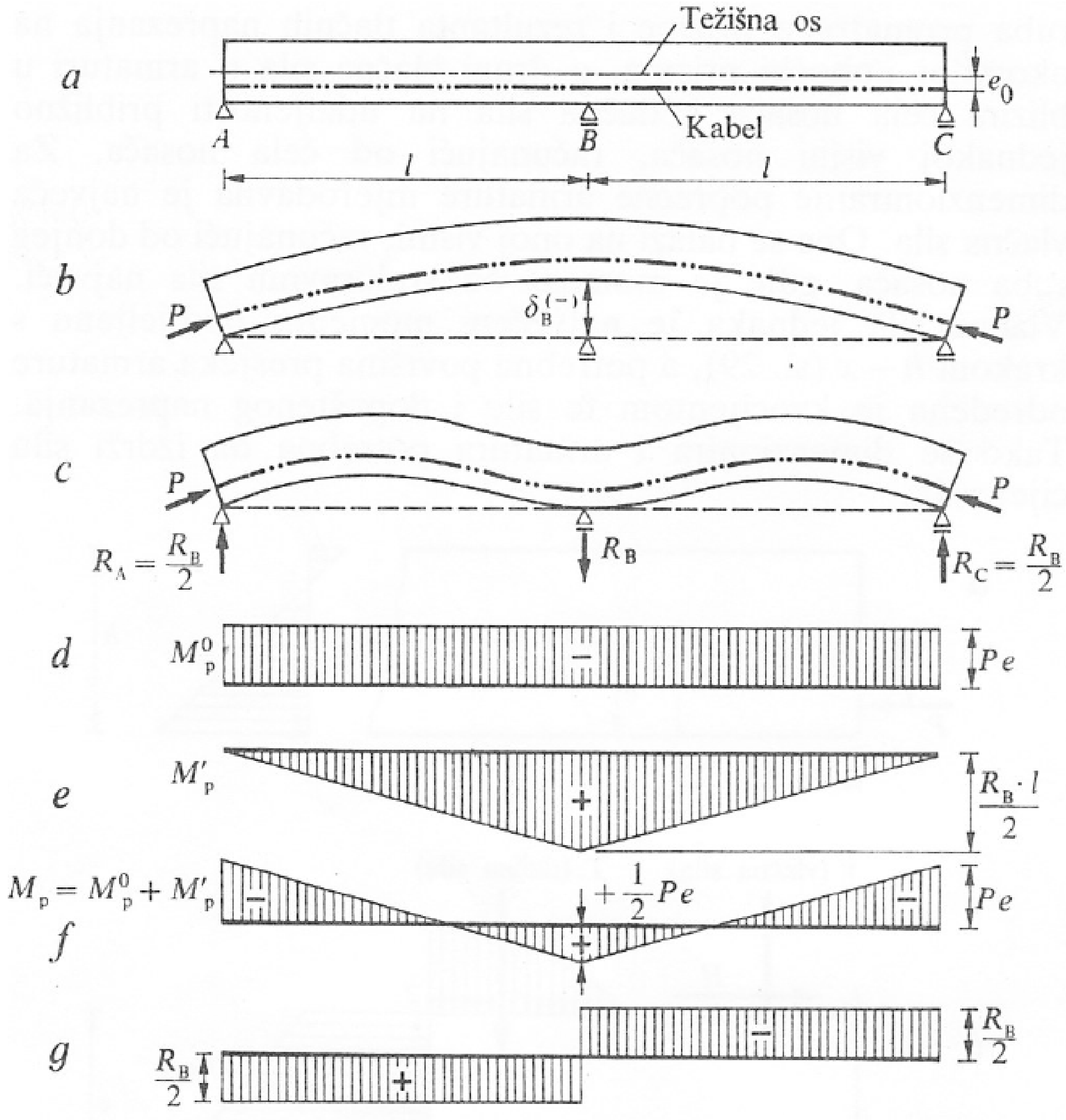
Slika 12.3: Zavisnost veličine sile prednapinjanja od dosega utjecaja prokliznuća klina; utjecaj ne seže do polovišta raspona

12.1 Uvod



Slika 12.4: Zavisnost veličine sile prednapinjanja od dosega utjecaja prokliznuća klina; utjecaj seže do iza polovišta raspona

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti



Slika 12.5: Progibi, momenti savijanja i poprečne sile statički neodređenog PB nosača

U **statički neodređenim** PB nosačima pojavljuju se **dodatne rezne sile**.

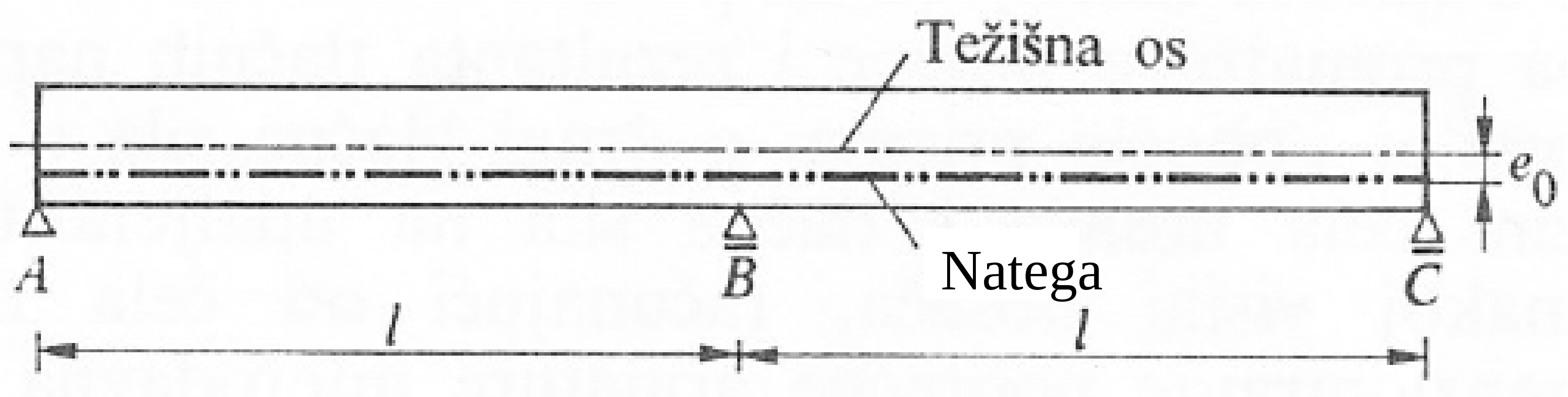
Statički **određeni** nosač, naime, **slobodno se izobličuje** pod djelovanjem momenata od sile prednapinjanja, dok statički **neodređeni** nosač ima prekobrojne veze što **sprječavaju** izobličavanje (slika 12.5).

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Na mjestu tih veza moraju se pojaviti **pridržajne sile** (reakcije) što zajedno s pridržajnim silama u **skrajnjim ležajevima** tvore **uravnotežen sustav sila**.

Djelovanjem tih pridržajnih sila nastaju **prekobrojni** (statički neodređeni) **momenti savijanja** raspodijeljeni **duž** cijeloga **nosača**.

To se najzornije vidi na primjeru grede preko **dvaju jednakih polja** prednapete **pràvom nategom** udaljenom za $\mathbf{e_0}$ od težišne osi nosača (slika 12.5a).

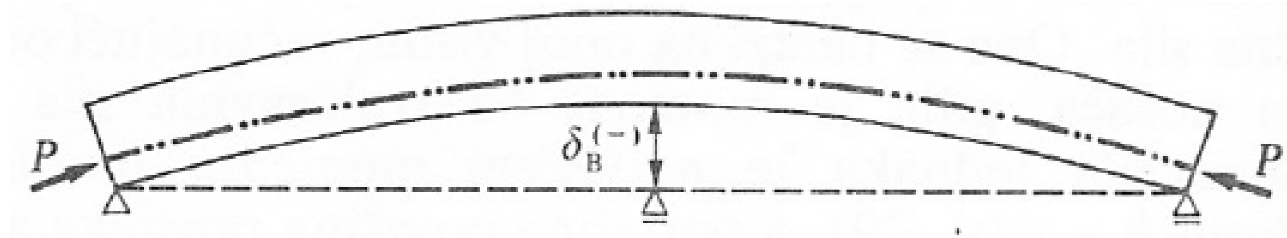


Slika 12.5a: AB nosač preko dvaju polja prije napinjanja natege

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

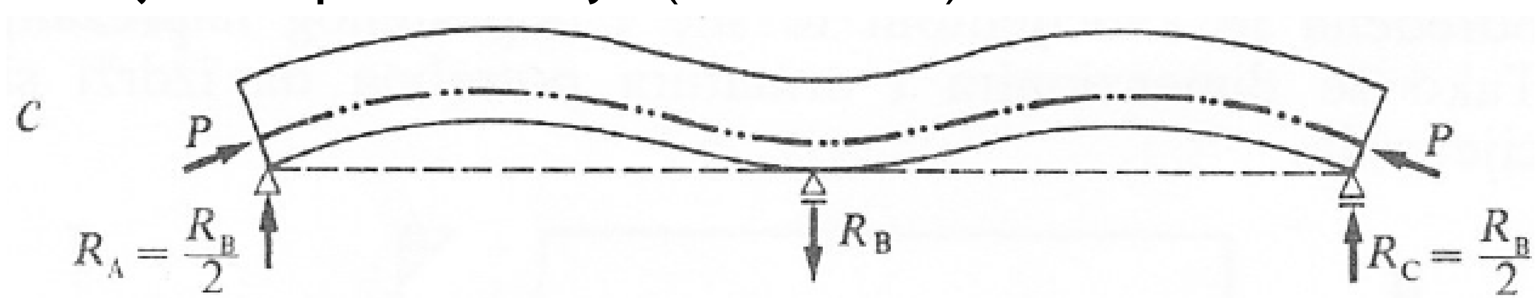
Zbog **sile prednapinjanja** nastaje **moment** savijanja **nepromjenjiv** duž cijeloga raspona.

Kada ne bi bilo **međupotpore B**, nosač bi se **prognuo prema gore** (slika 12.5b).



Slika 12.5b: AB nosač nakon napinjanja natege; međupotpora ne pridržava nosač

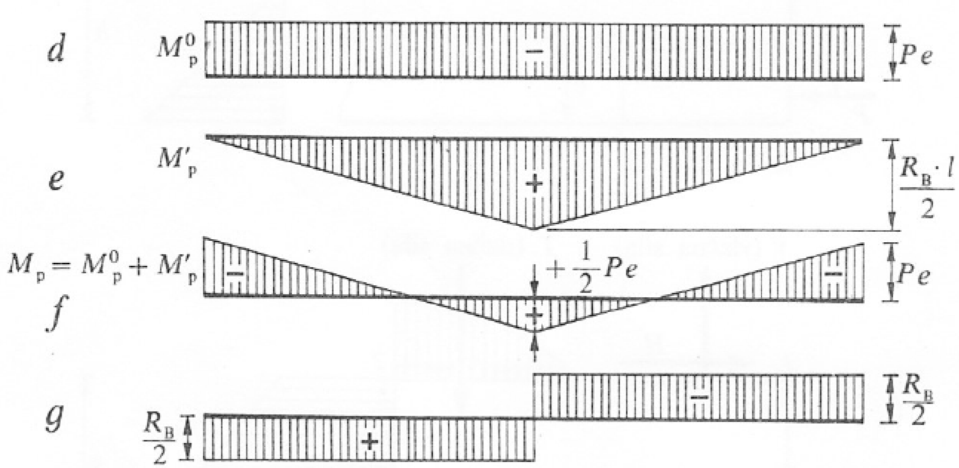
Budući da **međupotpora postoji**, zbog čega se **nosač ne može uzdići**, na tom mjestu djeluje **pridržajna sila R_B** usmjerena prema **dolje** (slika 12.5c).



Slika 12.5c: AB nosač nakon napinjanja natege; međupotpora pridržava nosač

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Kako bi nosač bio u **ravnoteži**, moraju na **skrajnje ležajeve**, **A** i **C**, djelovati **suprotno usmjerene**, **međusobno jednake**, pridržajne sile, R_A i R_C (slika 12.5c).



Slika 12.5d:Tijekovi reznih sila duž PB nosača

Momenti, M_x, što nastaju djelovanjem **pridržajnih sila zbrajaju se algebarski** s **momentima** od **sile prednapinjanja**, pa je moment u presjeku x (slika 12.5d):

$$M_{px} = P \cdot e_0 + M_x \quad (12.1)$$

Na istoj je slici predočen i tijek poprečnih sila.

Iz izraza (12.1) lako se dobije djelotvorna mimoosnost (efektivna ekscentričnost) sile u statički neodređenu nosaču:

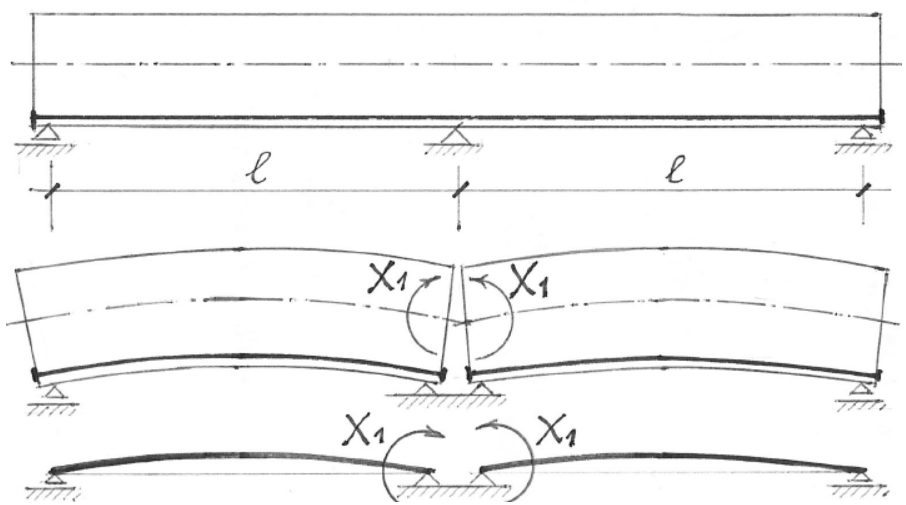
$$e_{eff} = e_0 + \frac{M_x}{P} \quad (12.2)$$

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Za proračun **statički neodređenih PB nosača** mogu se primijeniti **svi postupci** s pomoću kojih se proračunavaju **statički neodređeni** nosači.

Ipak, za **niže stupnjeve statičke neodređenosti** najprikladniji su **metoda sila** i **postupak zaokretnih kutova**.

Pokažimo metodu sila na primjeru nosača predočena na slici 12.5a i pretpostavimo da smo ga **rasjekli nad potporom** u dva dijela (slika 12.6).



Slika 12.6: Postupak određivanja nepoznatog momenta od statičke neodređenosti

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Svaki je od ovih dijelova nosača **statički određen**.

Međutim, moramo imati na umu kako su oni **spojeni nad potporom**, dakle da čine **cjelinu**.

U tu ćemo svrhu ispisati **jednačbu protežnosti** (**kontinuiteta**):

$$\boldsymbol{X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1v} = 0} \qquad (12.3)$$

Iz nje se neposredno dobije vrijednost **statički neodređenoga momenta** nad potporom:

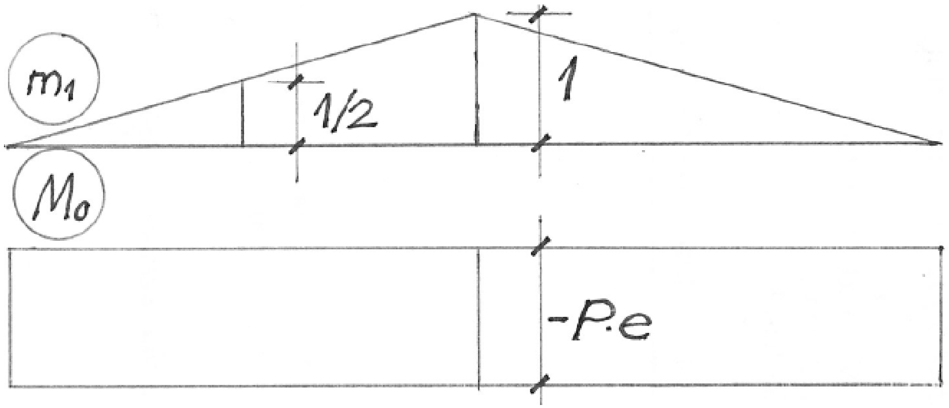
$$X_1 = -\frac{\delta_{1v}}{\delta_{11}} \qquad (12.4)$$

A sada odredimo kutove zaokreta, $\boldsymbol{\delta_{11}}$ i $\boldsymbol{\delta_{1v}}$.

U tu svrhu treba nacrtati tijekove momenata savijanja (slika 12.7):

- od nepoznatog momenta $\boldsymbol{X_1}$, za koji uzimamo da nad potporom ima jediničnu vrijednost i
- od sile prednapinjanja.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti



Slika 12.7: Momenti savijanja duž PB nosača:
od jediničnog momenta (gore);
od sile prednapinjanja (dolje)

Prisjetimo se kako je **kut zaokreta** jednak **ploštini** lika što predočuje **tijek momenata** pomnoženoj s **ordinatom tijeka jediničnog momenta** na **apscisi težišta lika** što predočuje tijek **dotičnoga momenta**.

Tako se dobije da je kut zaokreta od jediničnoga momenta:

$$EI\delta_{11} = \underbrace{\frac{1\cdot l}{2}}_{\text{ploština lika}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{ordinata ispod težišta}} \cdot \underbrace{2}_{\text{dva lika}} \qquad (12.5)$$

Pri određivanju odgovarajućega kuta zaokreta od **sile prednapinjanja zanemarujemo** i **trenutačne** i **vremenske gubitke** te sile.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Dakle uzimamo da je **sila prednapinjanja nepromjenjiva duž nosača**, a takva je i **u vremenu**.

Kut je zaokreta od nje:

$$EI\delta_{1v} = -P \cdot e \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -P \cdot e \cdot l \quad (12.6)$$

Uvrstimo dobivene vrijednosti u jedn. (12.4):

$$X_1 = -\frac{3P \cdot e \cdot l}{2l} = -\frac{3}{2} P \cdot e \quad (12.7)$$

S druge strane, **ukupni** se **moment** savijanja u bilo kojemu presjeku nosača sastoji od **momenta na osnovnomu**, statički određenom, **sustavu**, $\boldsymbol{M^0}$, i **momenta od statičke neodređenosti**, $\boldsymbol{m_1 \cdot X_1}$:

$$\boldsymbol{M = M^0 + m_1 \cdot X_1} \qquad (12.8)$$

pri čemu je $\boldsymbol{m_1}$ **-** ordinata na tijeku jediničnoga momenta u danomu presjeku.

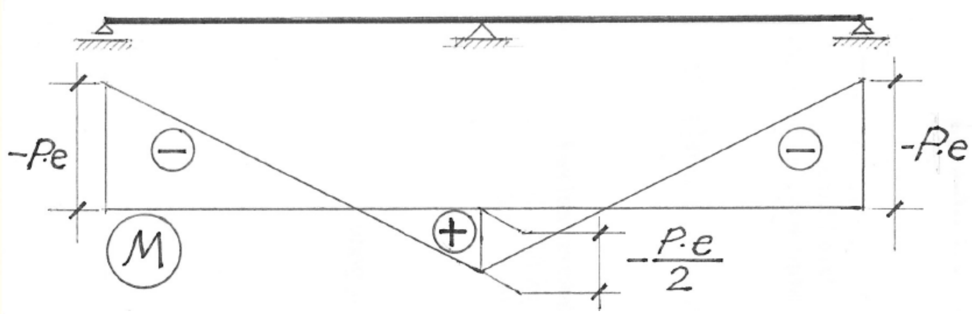
12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Ako za ***M⁰*** uvrstimo njegovu vrijednost, jedn. (12.8) poprima za presjek nad potporom oblik:

$$M_B = -P \cdot e + \frac{3}{2} P \cdot e = \frac{1}{2} P \cdot e \quad (12.9)$$

Pri tomu smo se držali **dogovora** uvriježena u ***Građevnoj statici***: moment je **pozitivan** ako u **donjim** vlaknima izaziva **vlak**.

A sada nacrtajmo tijek ukupnih momenata savijanja duž nosača od djelovanja prednapinjanja (slika 12.8).



Slika 12.8: Tijek ukupnih momenata duž PB nosača

Uočavamo **zapanjujuću razliku** između **statički određenih** i **statički neodređenih** nosača: u presjeku nad potporom nastaje moment **SUPROTNOGA** PREDZNAKA od onoga što bi se dobio jednostavnim množenjem ***P·e***.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

To onda znači da se uz **rub presjeka bliži natezi** pojavljuje **VLAK**, a ne tlak, kako bi se očekivalo.

Naravno da to ima **nepovoljan utjecaj** na **učinak prednapinjanja**.

Pogledajmo sada što je s **pridržajnim silama**.

$$B = -\frac{X_1}{l} \cdot 2 = -\frac{3P \cdot e}{l} \qquad (12.10)$$

$$A = C = \frac{B}{2} = \frac{3P \cdot e}{2l} \qquad (12.11)$$

Dakle nad srednjom se potporom dobije pridržajna sila što SPRJEČAVA ODIZANJE nosača.

Sve **pridržajne sile zajedno** tvore **međusobno uravnotežen sustav**.

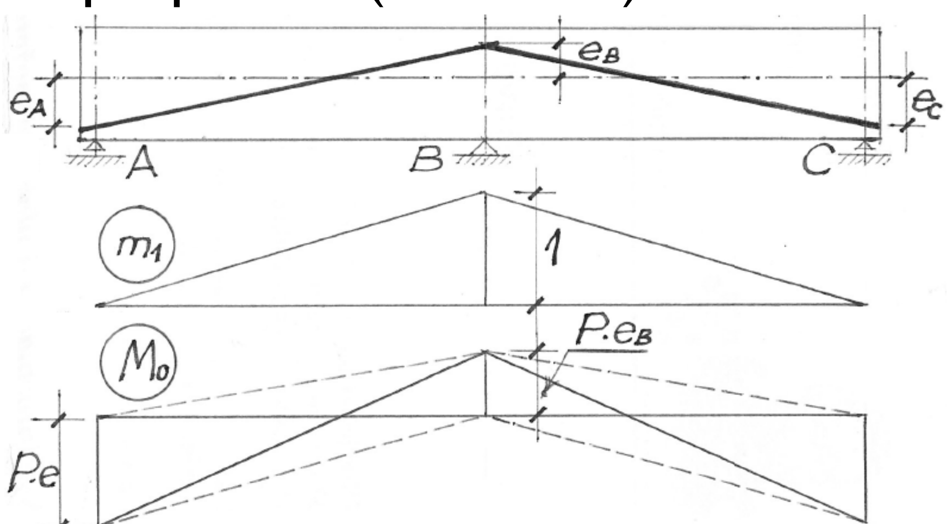
Tako dolazimo do **temeljne razlike** između **statički određenih** i **statički neodređenih** sustava.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

- U statički **određenih** sustava NE NASTAJU PRIDRŽAJNE SILE prigodom **napinjanja** natega.
- U statički **neodređenih** sustava NASTAJU PRIDRŽAJNE SILE prigodom **napinjanja** natega.

To su statički **neodređene** iliti PREKOBROJNE **pridržajne sile**.

Razmotrimo sada slučaj pràve natege sa skretanjem nad potporom (slika 12.9).



Slika 12.9: AB nosač prednapet nategom lomljene osi

Uočimo kako je u **svim** presjecima nad potporama natega **mimoosna**, s tim što je $\mathbf{e_A = e_C = e}$.

Odgovarajući tijekovi **momenata savijanja** također su predočeni na slici.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Kut zaokreta od **jediničnoga** momenta savijanja jednak je kao u **predhodnomu** slučaju:

$$EI\delta_{11} = \frac{2l}{3} \quad (12.5)$$

Za dobivanje kuta zaokreta od **vanjskog opterećenja** (od mimoosnosti nategе) služimo se **pojedinačnim** prinosima mimoosnostî nad pojedinim potporama (isprekidane crte na donjem dijelu slike 12.9):

$$EI\delta_{1v} = -\frac{1}{2}P\cdot e\cdot l\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot P\cdot e_B\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}P\cdot l\left(e_B - \frac{e}{2}\right) \quad (12.12)$$

Punom je crtom predočeno **ukupno** djelovanje mimoosnosti nategе.

Vrijednost nepoznatog **momenta nad potporom** dobije se uvrštavanjem dobivenih kutova zaokreta u jedn. (12.4):

$$X_1 = \frac{(2/3)P\cdot l\left(e_B - (e/2)\right)}{(2/3)l} = P\left(e_B - \frac{e}{2}\right) \quad (12.13)$$

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Sada možemo dobiti **ukupni moment savijanja** nad potporom:

$$M_B = P \cdot e_B - P\left(e_B - \frac{e}{2}\right) = P \cdot \frac{e}{2} \quad (12.14)$$

Uočavamo kako se u izrazu za $\boldsymbol{M_B}$ UOPĆE NE POJAVLJUJE $\mathbf{e_B}$!

Dapače, dobili smo POTPUNO JEDNAKU VRIJEDNOST kao u predhodnomu slučaju!

Iz ovoga slijedi da KAKAV GOD BIO $\mathbf{e_B}$, UVIJEK DOBIVAMO <u>JEDNAKE MOMENTE</u> DUŽ NOSAČA, POD UVJETOM DA SU <u>JEDNAKE MIMOOSNOSTI NA SKRAJNJIM POTPORAMA</u>.

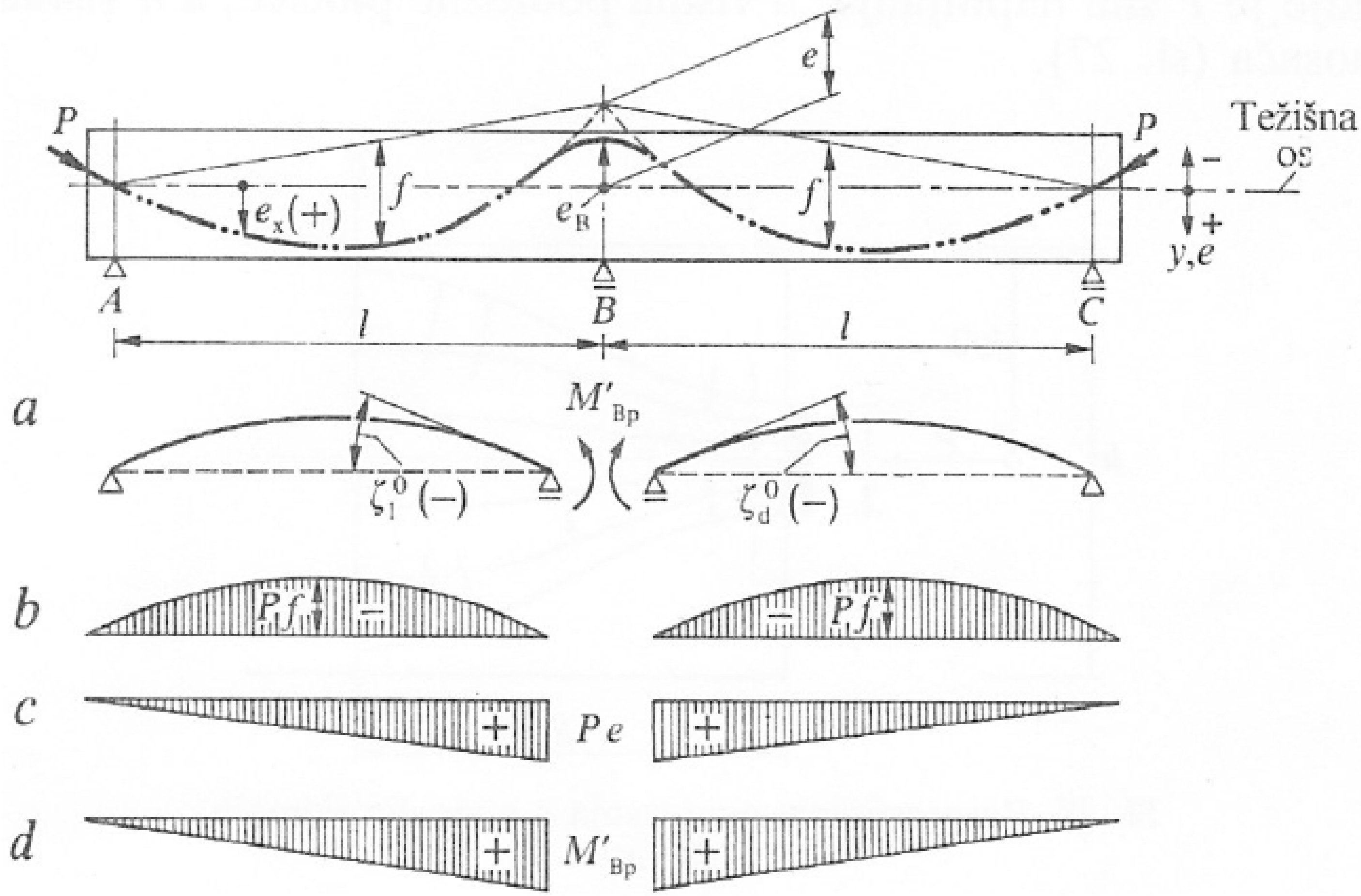
Ovo je važna vlastitost **statički neodređenih nosača**:

- Dokle god je duž raspona **ista krivulja mimoosnosti natege**, možemo **po volji** mijenjati **mimoosnost nad srednjom potporom**.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Pogledajmo kako to izgleda u slučaju natege jednolike zakrivljenosti (slika 12.10).

Radi jednostavnosti, zaobljenje osi natege nad međupotporom nadomjestit ćemo lomom.



Slika 12.15: Određivanje nepoznatog momenta nad potporom u slučaju zakrivljene natege

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Kut zaokreta od jediničnog momenta ovoga puta ne ćemo ni ispisivati.

S druge strane, kut zaokreta od vanjskog opterećenja)od mimoosnosti natege) sastoji se od prinosa lika pod parabolom i prinosa trokuta:

$$EI\delta_{1v} = -\frac{2}{3}P\cdot f\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}P\cdot e\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}P\cdot l\cdot\left(e-f\right) \quad (12.15)$$

Vrijednost nepoznatog **momenta nad potporom** dobije se uvrštavanjem dobivenih kutova zaokreta u jedn. (12.4):

$$X_1=\frac{\left(2/3\right)P\cdot l\cdot\left(e-f\right)}{\left(2/3\right)l}=P\cdot\left(e-f\right) \quad (12.16)$$

Ukupni je moment nad potporom:

$$M_B=P\cdot e-P\cdot\left(e-f\right)=P\cdot f \quad (12.17)$$

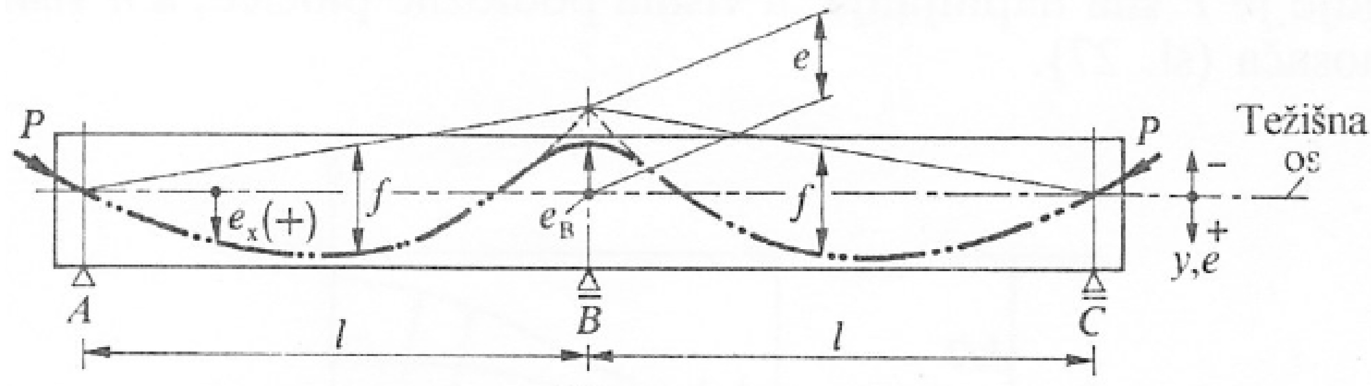
Prema tome, **natega jednoliko zakrivljene osi zadane strjelice može se po volji pomicati gore-dolje**, pod uvjetom da **os natege prolazi težištem presjeka** nad skrajnjim potporama.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Dakle taj **pomak ne utječe na učinak prednapinjanja**.

Međutim, **najmanji utrošak čelika** i **najveća granična nosivost pri savijanju** postižu se kada mimoosnost nad ležajem, **e_0**, i strjelica parabole, ***f***, imaju **najveće moguće vrijednosti**.

Praktično ostvariv oblik natege predočen je na slici 12.11.



Slika 12.11: Praktično ostvariv oblik protežne zakrivljene natege

Gornji odnosi vrijede i ako rasponi polja nisu jednaki: ukupni je moment savijanja nad međupotporom jednak zbroju umnoška ***P·e*** i momenta od statičke neodređenosti, ***X***:

$$M_B = P \cdot e + X \qquad (12.18)$$

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Uočimo još kako iz izraza (12.16) slijedi da u slučaju kada je **e = *f* moment statičke neodređenosti iščezava**.

To onda znači da **iščezavaju** i **pridržajne sile**.

Vlastitost **oblika osi natega** pri kojoj se to ostvaruje naziva se VLASTITOŠĆU KONKORDANTNOSTI.

Do prije 50-ak godina toj je vlastitosti pridavana **nesrazmjerno velika važnost**, pa su projektanti nastojali postići takav oblik osi natega.

Naravno da je to iziskivalo **višekratno opetovanje proračuna**, a kako u ono doba **nije bilo** moćnih **računala**, sve je to iziskivalo **dugotrajno** i **mukotrpno računanje**.

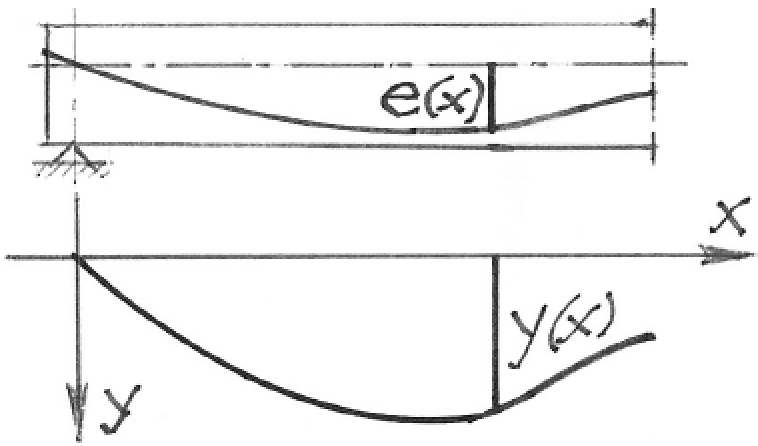
Srećom, inženjeri su postupno uvidjeli kako je to **jalov posao**, pa se danas držimo onoga što je rečeno u svezi sa slikom 12.11: mimoosnost nad ležajem, $\mathbf{e}_0$, i strjelica parabole, ***f***, trebaju imati **najveće moguće vrijednosti**.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Već je rečeno kako pri određivanju **statički prekobrojnih reznih sila** vrijede **svi** poznati **postupci građevne statike**.

Naravno, u **složenijim** slučajevima rabe se u pravilu **računalni programi** što su danas **dostupni** gotovo svima.

Za **nešto manje složene** sustave vrlo je prikladan postupak **skretnih sila** iliti **jednakovrijednih poprečnih opterećenja**.



Slika 12.12: Geometrija osi natege

Razmotrimo PB nosač predočen na slici 12.12.

Geometrijski su **pokazatelji** osi natege:

* **mimoosnost**:

$$\boldsymbol{e(x) = f(x)} \qquad (12.19)$$

* **kut nagiba tangente na os**:

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x) \qquad (12.20)$$

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

* **zakrivljenost osi natege**:.

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \qquad (12.21)$$

S druge strane, pogledajmo **geometrijske pokazatelje progibne krivulje nosača**:

y → **ordinata progibne krivulje**;

$\frac{dy}{dx}$ → **kut zaokreta progibne krivulje**;

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ → **zakrivljenost osi nosača**.

Pokušajmo uspostaviti **svezu** između **geometrije osi natege** i **progibne krivulje nosača**.

Dakle treba naći **jednakovrijedno okomito** (skretno) **opterećenje** p(x) što će dati **rezne sile jednake** onima pri **napinjanju natege**.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Pođimo od izraza za **moment savijanja od sile prednapinjanja**:

$$\boldsymbol{M(x) = P \cdot f(x)} \qquad (12.22)$$

Zatim se prisjetimo ***Mohrova*** stavka o odnosu **momenta savijanja** i **vanjskog opterećenja**:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = P \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = EI\frac{d^4y}{dx^4} = s(x) \quad (12.23)$$

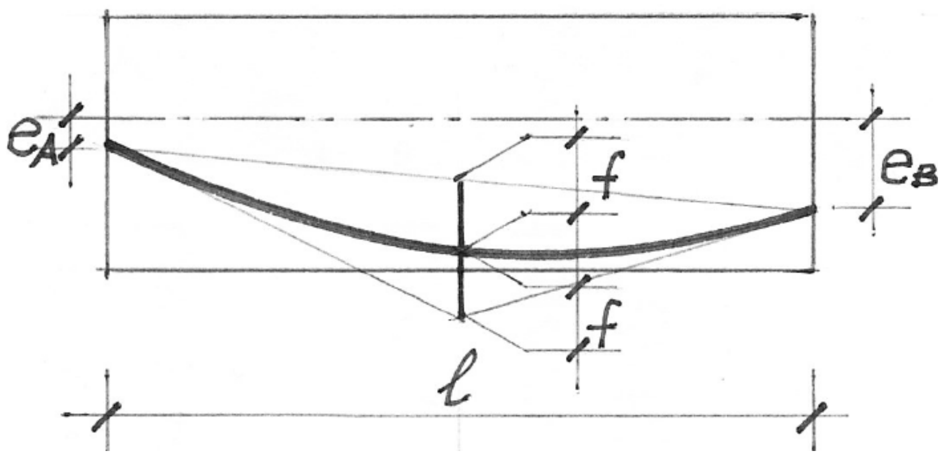
Odavde se izravno dobiva **odnos** između **progibne krivulje** nosača i **jednakovrijednoga skretnog opterećenja** što djeluje **okomito** na os nosača:

$$P \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -s(x) \quad (12.24)$$

Za **zadani oblik osi natege** treba odrediti **pripadno okomito** (skretno) **opterećenje**.

Najzornije se to vidi iz primjera.

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti



Slika 12.13: Odsječak statički neodređenoga PB nosača

Na slici 12.13 predočen je odsječak statički neodređenoga PB nosača napeta **nadomjesnom nategom** jednolike zakrivljenosti.

Položaj je osi **općenit** (različite mimoosnosti na krajevima polja).

Traži se **poprečno opterećenje** što nadomješta djelovanje natege.

Ispišimo prvo opći izraz za **mimoosnost** natege:

$$e = f\left(x\right) = e_A + \frac{e_B - e_A}{l} \cdot x + \frac{2f}{l/2} \cdot x - \frac{4f}{l^2} \cdot x^2 \quad (12.25)$$

Zatim derivirajmo ovaj izraz dva puta po x:

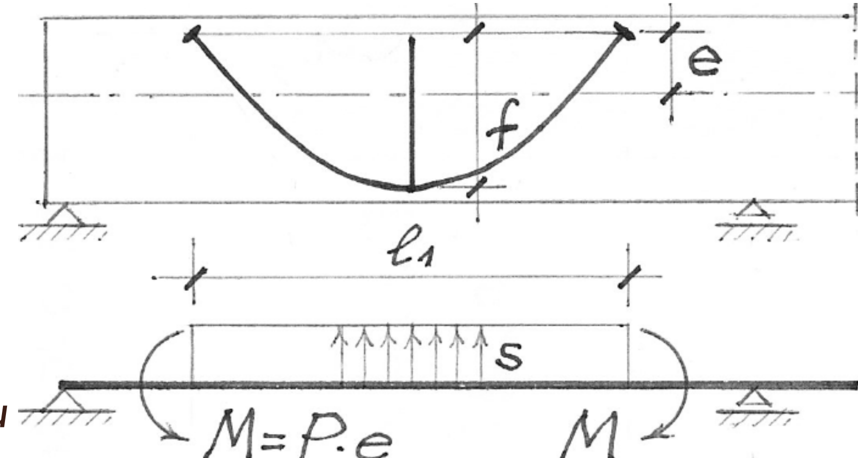
$$\frac{d^2 f\left(x\right)}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2} \quad (12.26)$$

12.2 Djelovanje statičke neodređenosti

Iz ovoga se neposredno dobije:

$$s(x) = -\frac{8f}{l^2} \cdot P \quad (12.27)$$

Drugi se primjer odnosi na **nategu** što se **ne proteže duž cijeloga polja** (slika 12.14).



Slika 12.14: Umetnuta kratka natega u polju

Primjer se razlikuje od predhodnoga samo utoliko što se moraju uzeti u obzir momenti savijanja što djeluju na mjestima usidrenja natege.

Skretno je opterećenje kao i u predhodnomu slučaju:

$$s(x) = -\frac{8f}{l^2} \cdot P \quad (12.27)$$

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Za statički ODREĐENE nosače vrijedi da kada u **najjače napregnutu presjeku** dođe do **iscrpljenja nosivosti**, nastupa SLOM CIJELOGA NOSAČA.

Dakle ako poznajemo **oblik poprečnoga presjeka** i **vlastitosti gradivâ**, možemo odrediti moment savijanja što odgovara ISCRPLJENJU NOSIVOSTI.

Valja naglasiti da taj moment **ne zavisi** od **jačine** ni **raspodjelbe vanjskog opterećenja**.

Od **raspodjelbe produljenja/skraćenja** po visini presjeka zavisi hoće li **slom** nastupiti zbog **iscrpljenja nosivosti betona** ili **čelika**.

U svakomu slučaju, kako je već rečeno, **iscrpljenjem nosivosti** PRESJEKA, nastupa SLOM CIJELOGA NOSAČA.

U statički NEODREĐENIH nosača u pravilu nije tako – oni imaju **zalihu nosivosti** NAKON ISCRPLJENJA NOSIVOSTI NAJJAČE NAPREGNUTOGA PRESJEKA.

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

U statički **neodređenih** sklopova nosivi se sklop **postupno** pretvara u **mehanizam**.

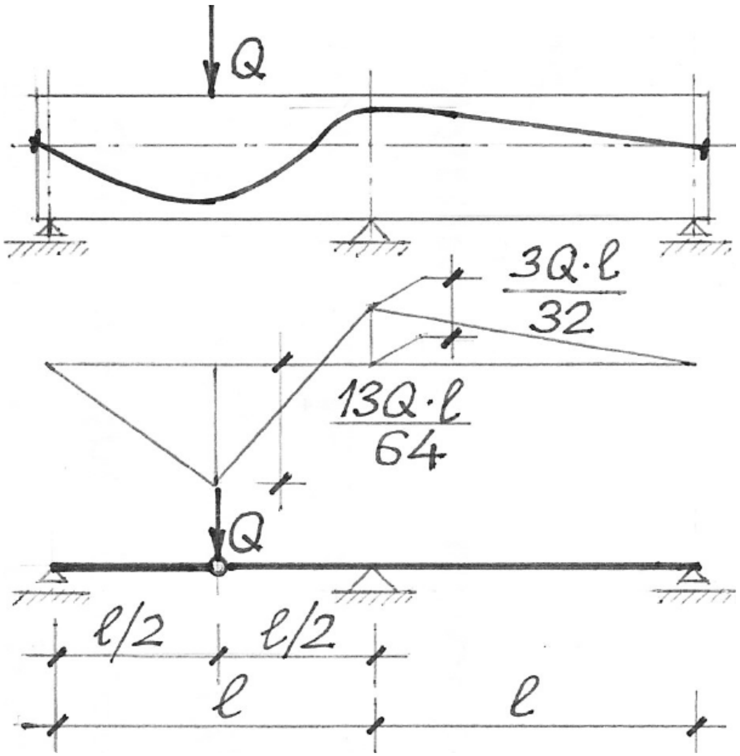
Opterećenje se **postupno povećava** dok **moment savijanja** ne dosegne granicu **iscrpljenja nosivosti** u **broju presjekā** koji **premašuje stupanj statičke neodređenosti za jedan**.

Valja naglasiti da u presjeku u kojem **moment savijanja** doseže granicu **iscrpljenja nosivosti** nastaje tzv. PLASTIČNI ZGLOB.

Uočimo bitnu razliku između običnog i plastičnoga zgloba:

- **Obični** je zglob dio sklopa što NE MOŽE PREUZETI MOMENTA SAVIJANJA.
- **Plastični** je pak zglob mjesto u sklopu što preuzima MOMENT SAVIJANJA JEDNAK GRANIČNOJ NOSIVOSTI, dakle NAJVEĆI MOGUĆI.

12.3 Granična nosivost SN PB nosača



Slika 12.15: Momenti od pojedinačne sile u jednom polju

Pokazat ćemo na primjeru grede preko dvaju polja (slika 12.15) opterećene **pojedinačnom silom Q** u prvomu kako se nakon pojave **plastičnoga zgloba** u presjeku pod silom **opterećenje** (ta sila) može **znatno povećati** dok se nosač ne pretvori u **mehanizam** pri pojavi **drugoga plastičnoga zgloba** (u presjeku nad potporom).

Lako se može pokazati da je moment nad potporom:

$$M_B = \frac{3Q \cdot l}{32} \qquad (12.28)$$

(Dobro bi bilo to provjeriti **za vježbu** i, naravno, izračunati i **moment u polju**).

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Moment je u polju:

$$M_{AB} = \frac{13Q \cdot l}{64} \quad (12.29)$$

Uzmimo da sila **Q** postupno raste do vrijednosti $\mathbf{Q_{pl}}$ pri kojoj moment u presjeku u polju doseže **granicu iscrpljenja nosivosti** presjeka.

Pretpostavimo li dalje da nosač ima **po cijeloj duljini jednaku graničnu nosivost**, izlazi da je **sljedeći presjek** u kojem će biti dosegnuta **granična nosivost** onaj **nad potporom**.

Međutim, sada nosač djeluje po **drugoj statičkoj shemi** (donji dio slike) – postao je tzv. ***Gerberov*** nosač.

Sada sila **Q** djeluje **na kraju prijepusta** grede s prijepustom.

Zaliha je nosivosti presjeka nad potporom:

$$\Delta M = \left(\frac{13}{64} - \frac{3}{32} \right) Q \cdot l = \frac{7}{64} Q \cdot l \quad (12.30)$$

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Taj moment izaziva sila **Δ*Q*** na kraku ***l*/2**:

$$\Delta Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{7Q \cdot l}{64} \qquad (12.31)$$

Odavde možemo dobiti koliko je **povećanje** sile **Q** u odnosu na onu što je izazvala pojavu **prvoga plastičnoga zgloba**:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{7}{32} \qquad (12.32)$$

Prema tome povećanje je oko **21,9 %**, dakle **znatno**.

Nakon pojave **drugoga plastičnoga zgloba** nosač se pretvara u **mehanizam** i **gubi sposobnost nošenja opterećenja**.

Valja naglasiti kako spomenuti **plastični zglobovi** imaju **ograničenu zaokretnu sposobnost** (rotacijski kapacitet) već i zbog toga što su **ograničena granična skraćenja betona** (3,5 $^{o}/_{oo}$) i produljenja čelika (10 $^{o}/_{oo}$).

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Statički se **neodređeni** (SN) nosači **razlikuju** od statički **određenih** u još jednoj bitnoj pojedinosti: dok je u statički određenih **unaprijed određen položaj presjeka** u kojem dolazi do **iscrpljenja nosivosti**, u statički **neodređenih nije tako**.

Zapravo se u statički neodređenih samo u **idealnomu** slučaju može dogoditi iscrpljenje nosivosti **istodobno u svim najjače napregnutim presjecima** (mjestima najvećih momenata savijanja).

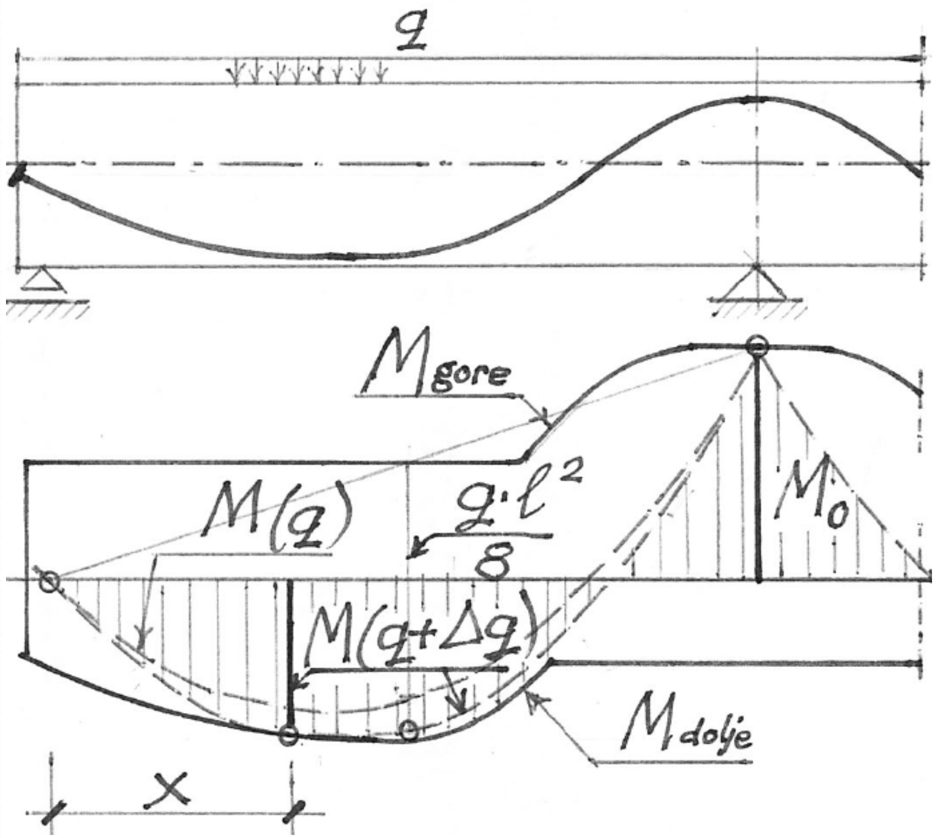
U praksi tomu u pravilu **nije tako**, pa se pri određivanju **slomnog opterećenja**, **položaja plastičnih zglobova** i **slomnog mehanizma** prvo nacrta **ovojnica** (envelopa) **graničnih nosivosti**, pa se u nju unose **tijekovi momenata savijanja od vanjskog opterećenja**.

U **dodirnim točkama** ovih krivulja nalaze se **plastični zglobovi**.

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Naravno, **ovojnicu** je moguće dobiti samo uz pomoć **računala**.

Izneseno ćemo pokazati na jednostavnu primjeru PB nosača **preko dvaju polja** pod **jednoliko rasprostrtim opterećenjem** (slika 12.16).



Slika 12.16: Granični moment PB nosača

Uzmimo da **prvi plastični zglob** nastaje u **presjeku nad potporom**.

Počev od toga trenutka nosač se pretvara u **dvije slobodno poduprte grede**.

Opterećenje može i dalje **rasti** sve dok **krivulja momenata ne dodirne ovojnicu**.

12.3 Granična nosivost SN PB nosača

Uočimo kako postoje **dvije ovojnice**: jedna za **pozitivne**, a druga za **negativne** momente savijanja.

Naravno, obje vrijede za **zadani presjek nosača** i **zadani razred betona**.

Pri tomu se granične nosivosti računaju uz ove **pretpostavke**:

- Na **vlačnoj** je **strani najveći smjestivi broj natega** i **najveća dopustiva količina nenapete armature**.
- Na **tlačnoj** je **strani** samo **najmanja potrebna količina armature** (minimalna armatura).
- Za svaki **pojedinačni presjek** vrijede **pretpostavke** što inače vrijede pri **proračunu granične nosivosti**.

12.4 Primjena teorije plastičnosti

Gradivo teorije plastičnosti toliko je **opsežno** da bi ga treblo izlagati cio **semestar**.

Međutim, ograničit ćemo se na iznošenje **dvaju temeljnih teorema**, <u>statičkog</u> i <u>kinematičkoga</u>, i na prikaz **dvaju osnovnih postupaka proračuna**, <u>statičkog</u> i <u>kinematičkoga</u>, na primjeru **jednostrano upete grede** opterećene dvjema jednakim **pojedinačnim silama** u trećinskim točkama raspona.

- ***<u>Statički teorem</u>***

  Ako se za nosivi **štapni sustav** može naći **statičko polje momenata savijanja** (preraspodjelba) što **zadovoljava uvjete ravnoteže i plastičnosti**, te **rubne uvjete**, onda je **jačina opterećenja manja** ili **najviše jednaka graničnoj**.

  Ni u jednomu presjeku **moment savijanja ne premašuje moment plastičnosti**.

  Granično je **opterećenje najviša vrijednost** svih **opterećenja** što odgovaraju **raznim raspodjelbama momenata savijanja**.

12.4 Primjena teorije plastičnosti

Drugim riječima, pošto za **zadani razmještaj opterećenja** nađemo **najveći moment savijanja** (moment plastičnosti), tražimo **povećanje sile** što je nužno da bi se u **sljedećem najjače napregnutom presjeku** pojavio **moment plastičnosti**.

Pri tomu se služimo uvriježenom **metodom sila**.

- ***Kinematički teorem***

  Ako je za **štapni sustav** jačina opterećenja **veća ili najmanje jednaka graničnoj** za **kinematički mogući oblik sloma**, pri kojem **zaokreti plastičnih zglobova** zadovoljavaju uvjete **kinematičkoga lanca** i kinematičke **rubne** uvjete, **granično** je **opterećenje** sustava **najmanja vrijednost** svih opterećenja što odgovaraju **različitim kinematičkim mehanizmima**.

Kinematički mogući oblik sloma jest onaj oblik u kojem je broj plast. zglobova veći za jedan od stupnja stat. neodređenosti.

12.4 Primjena teorije plastičnosti

Broj je mogućih kinematičkih mehanizama jednak broju plastičnih zglobova.

Dakle po **kinematičkom teoremu** svakom je mogućem **kinematičkomu mehanizmu** pridružena **jačina graničnog opeterećenja**, a **mjerodavna** je **najmanja vrijednost**.

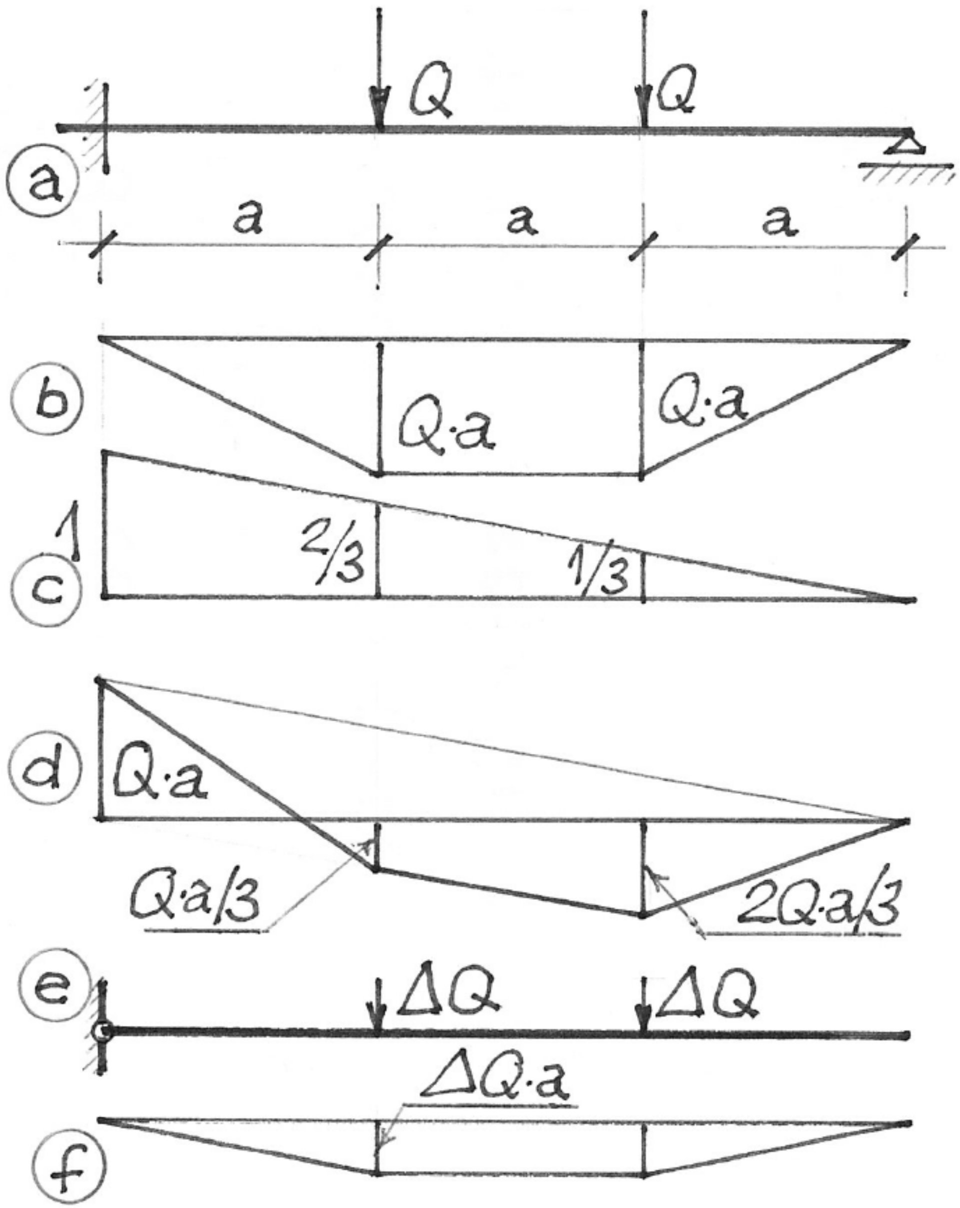
- ***Statički postupak***

Prvo se odredi **tijek momenata savijanja**, a zatim se uzima da se u presjeku s **najvećim momentom** pojavljuje **plastični zglob**.

To dovodi do **promjene statičkog sustava** (sniženja stupnja statičke neodređenosti).

Zatim se na **novom sustavu** računa **priraštaj sile** što je nuždan kako bi se u **sljedećem najjače napregnutomu presjeku** pojavio **plastični zglob** (slika 12.17).

12.4 Primjena teorije plastičnosti



Slika 12.17: Granična nosivost po statičkom postupku

Kut zaokreta od **vanjskog opterećenja**:

$$\vartheta_Q = \frac{1}{2} Q \cdot a^2 \cdot 2 = Q \cdot a^2 \quad (12.33)$$

Od jediničnog momenta:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} = a \quad (12.34)$$

Odavde je **moment** na **upetomu** kraju:

$$\boldsymbol{M_0 = Q_0 \cdot a} \quad (12.35)$$

iz čega se dobije **sila** pri kojoj nastaje **prvi plastični zglob**:

$$Q_0 = \frac{M_0}{a} \quad (12.36)$$

12.4 Primjena teorije plastičnosti

Novi je **statički sustav slobodno poduprta greda** (slika 12.17e).

Budući da je moment savijanja u **sljedećem najjače napregnutomu presjeku** jednak (***2Q₀·a/3***), priraštaj sile, Δ**Q**, treba biti tolik da se u tomu presjeku dosegne moment $\boldsymbol{M_0}$:

$$\Delta Q \cdot a + \frac{2}{3} Q_0 \cdot a = Q_0 \cdot a \quad (12.37)$$

Odavde se dobije:

$$\Delta Q \cdot a = \frac{Q_0 \cdot a}{3} \quad (12.38)$$

Dakle priraštaj je sile:

$$\Delta Q = \frac{Q_0}{3} \quad (12.39)$$

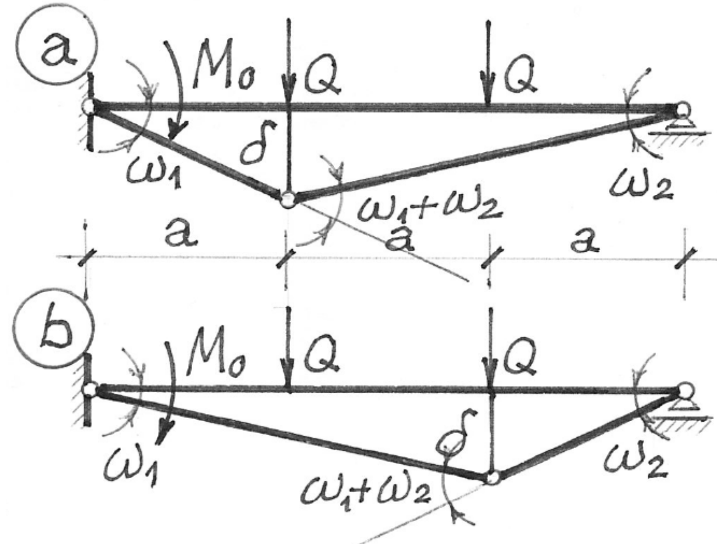
To znači da je najveća sila:

$$\boldsymbol{Q_{max} = Q_0 + \Delta Q = (4/3)Q_0} \quad (12.40)$$

12.4 Primjena teorije plastičnosti

- ***Kinematički postupak***

Prvo nacrtajmo **dva kinematički moguća mehanizma** (slika 12.18).



Slika 12.18: Granična nosivost po kinematičkom postupku

Za oba mehanizma treba ispisati **jednačbe rada** i **izjednačiti rad unutarnjih** s **radom vanjskih sila**.

Počnimo od mehanizma ***a***.

Rad je **unutarnjih** sila:

$$\mathbf{R_u} = \boldsymbol{M_0} \cdot \omega_1 + \boldsymbol{M_0}(\omega_1 + \omega_2) = \boldsymbol{M_0}(2\omega_1 + \omega_2) \qquad (12.41)$$

pri čemu su kutovi zaokreta:

$$\omega_1 = \delta/\boldsymbol{a}; \qquad \omega_2 = \delta/2\boldsymbol{a}; \qquad \omega_1 = 2\,\omega_2; \qquad (12.42)$$

Iz ovoga slijedi da je rad **unutarnjih** sila:

$$\mathbf{R_u} = \boldsymbol{M_0} \cdot \mathbf{5}\omega_2 = (\mathbf{5}\boldsymbol{M_0}\cdot\delta)/(\mathbf{2}\boldsymbol{a}) \qquad (12.43)$$

12.4 Primjena teorije plastičnosti

S druge strane rad je **vanjskih** sila:

$$R_v = \frac{3Q \cdot \delta}{2} \quad (12.44)$$

Izjednačimo rad **unutarnjih** s radom **vanjskih** sila:

$$\frac{5M \cdot \delta}{2a} = \frac{3Q \cdot \delta}{2} \quad (12.45)$$

Odavde se dobiva **najveće vanjsko opterećenje**:

$$\max Q = \frac{5M_0}{3a} \quad (12.46)$$

A sada pogledajmo mehanizam ***b***.

Ispišimo izraz za rad unutarnjih sila:

$$\boldsymbol{R_u} = \boldsymbol{M_0} \cdot \omega_1 + \boldsymbol{M_0}(\omega_1 + \omega_2) = \boldsymbol{M_0}(2\omega_1 + \omega_2) \qquad (12.41)$$

Uočimo da smo dobili **potpuno jednak** izraz.

Sada **kutovi zaokreta** imaju **obrnute** vrijednosti:

$\omega_1 = \delta/2\boldsymbol{a}$; $\quad \omega_2 = \delta/\boldsymbol{a}$; $\quad \omega_2 = 2\,\omega_1$; $\quad$ *(12.42a)*

12.4 Primjena teorije plastičnosti

Uvrstimo li ove vrijednosti u jedn. (12.41) dobit ćemo:

$$\boldsymbol{R_u = M_0 \cdot 2\omega_2 = (2M_0 \cdot \delta)/a} \quad (12.43a)$$

Rad je **vanjskih** sila **jednak** kao i u predhodnom slučaju.

Izjednačavanjem rada **unutarnjih** s radom **vanjskih** sila dobije se:

$$\frac{2M_0 \cdot \delta}{a} = \frac{3Q \cdot \delta}{2} \quad (12.46)$$

Iz ove se jednačbe dobiva **najveće vanjsko opterećenje**:

$$\max Q = \frac{4}{3} Q_0 \quad (12.47)$$

Dakle dobili smo **potpuno jednaku vrijednost** kao po **statičkom** postupku, jedn. (12.40).