

Betonske konstrukcije 2

Prof. dr. sc. Damir Varevac

dvarevac@gfos.hr

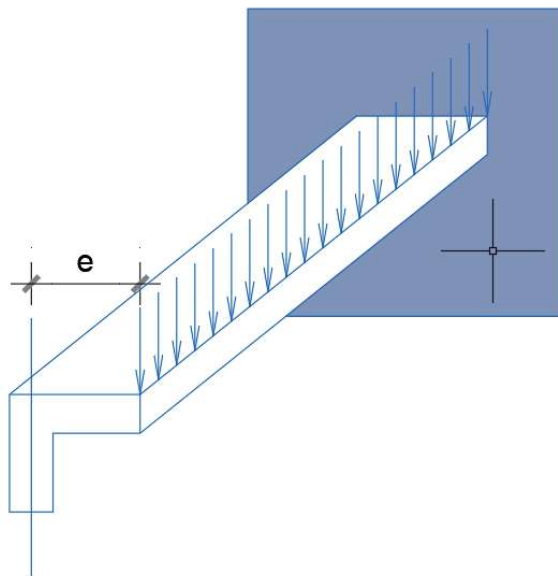
TORZIJA

Z. Sorić, T. Kišiček: Betonske konstrukcije 2

Str. 125 - 161

Podjela djelovanja torzije

Ravnotežna (primarna) torzija

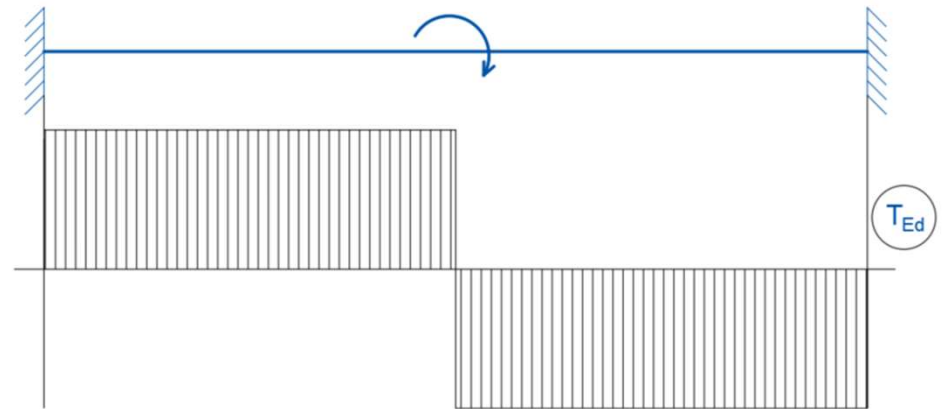
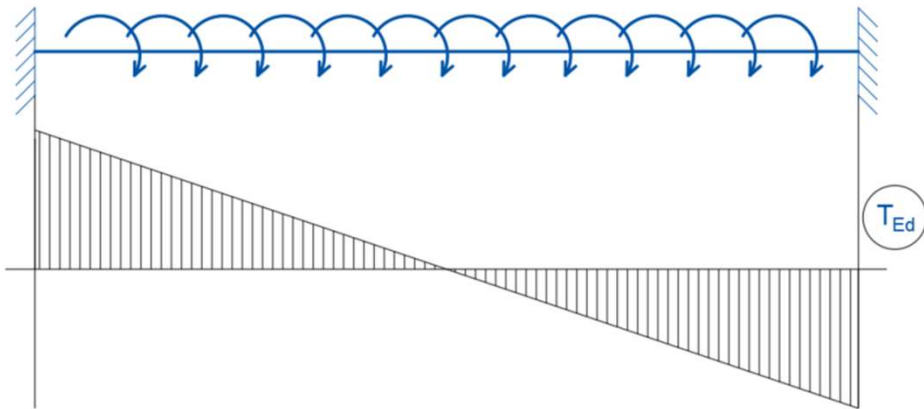


Kompatibilnosna (sekundarna) torzija



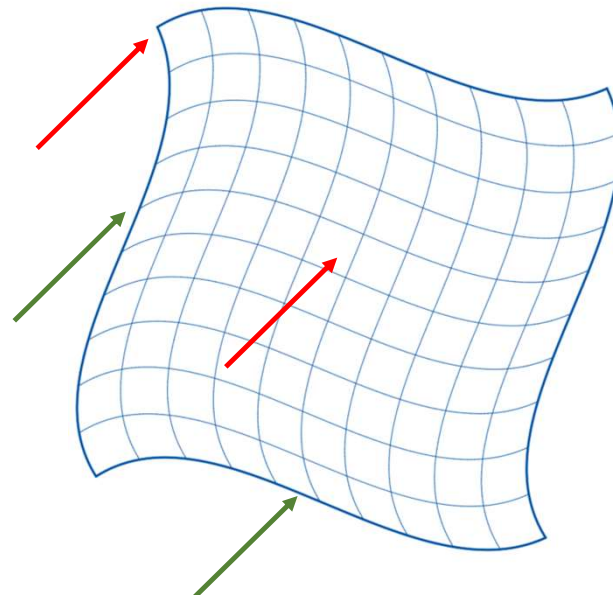
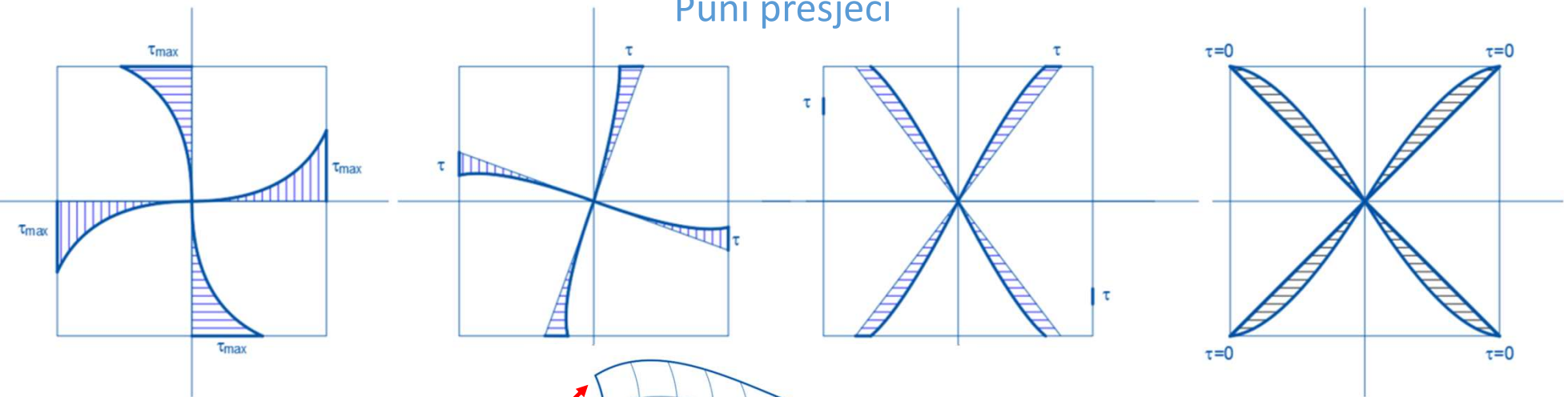
Podjela djelovanja torzije

Ravnotežna (primarna) torzija



Naprezanja u presjeku

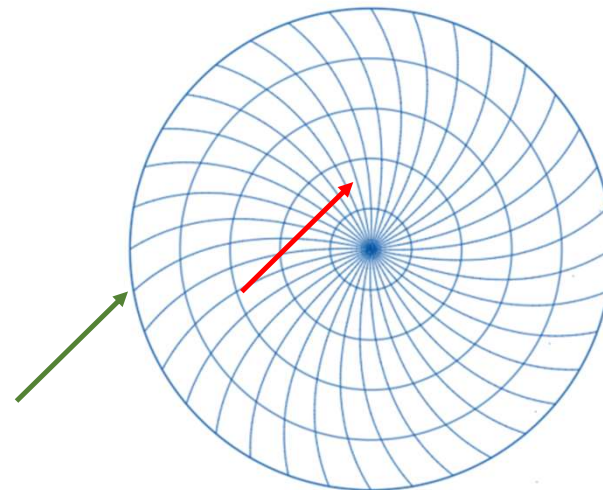
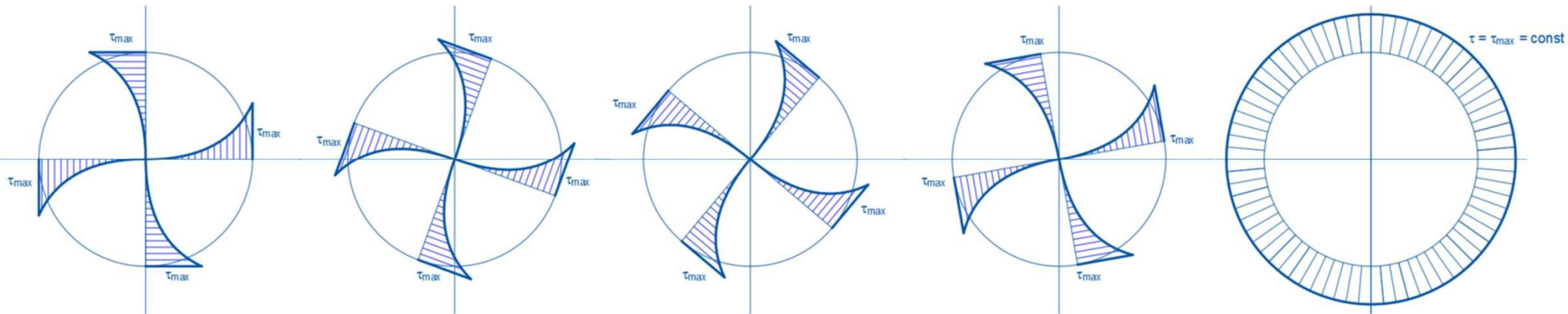
Puni presjeci



Obratiti pažnju na deformacije presjeka!

Naprezanja u presjeku

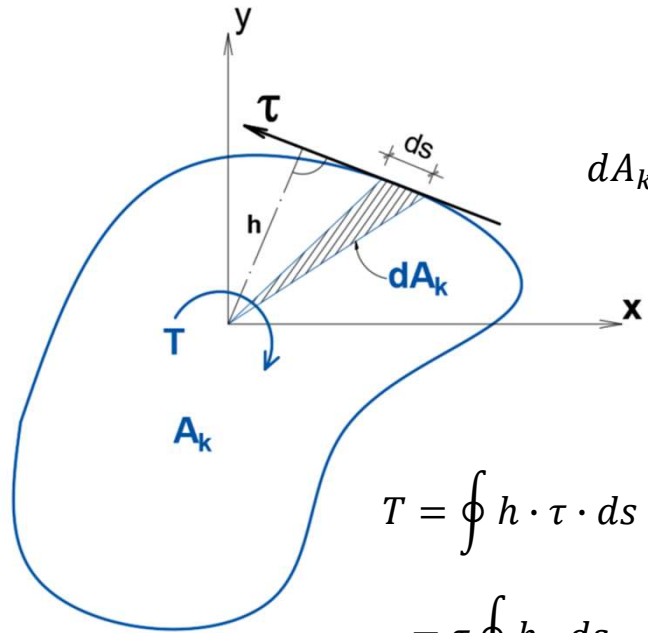
Puni presjeci



Obratiti pažnju na deformacije presjeka!

Ravnoteža presjeka

Puni presjeci



$$\Sigma T = 0$$

$$dA_k = \frac{h \cdot ds}{2} \Rightarrow h \cdot ds = 2dA_k$$

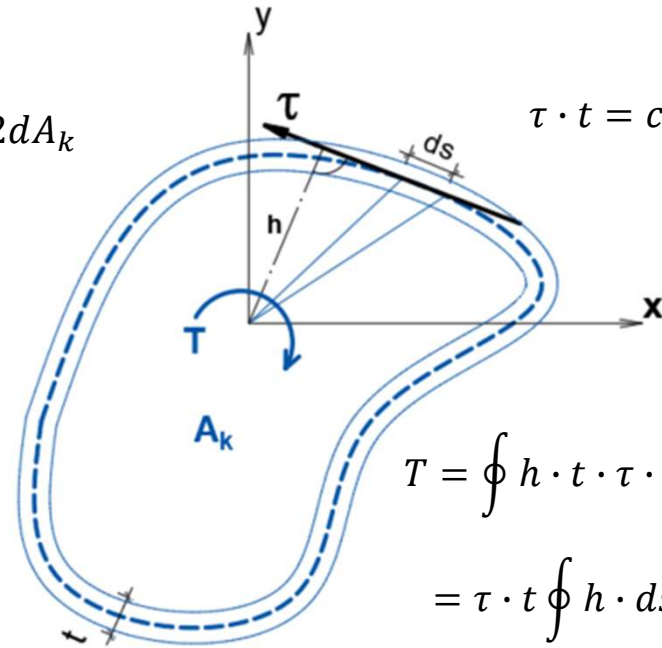
$$T = \oint h \cdot \tau \cdot ds \quad \tau = \text{const!}$$

$$= \tau \oint h \cdot ds$$

$$= \tau \oint 2dA_k$$

$$T = 2 \cdot \tau \cdot A_k \quad \tau = \frac{T}{2 \cdot A_k}$$

Šuplji presjeci s tankom stijenkom



$$\tau \cdot t = \text{const!}$$

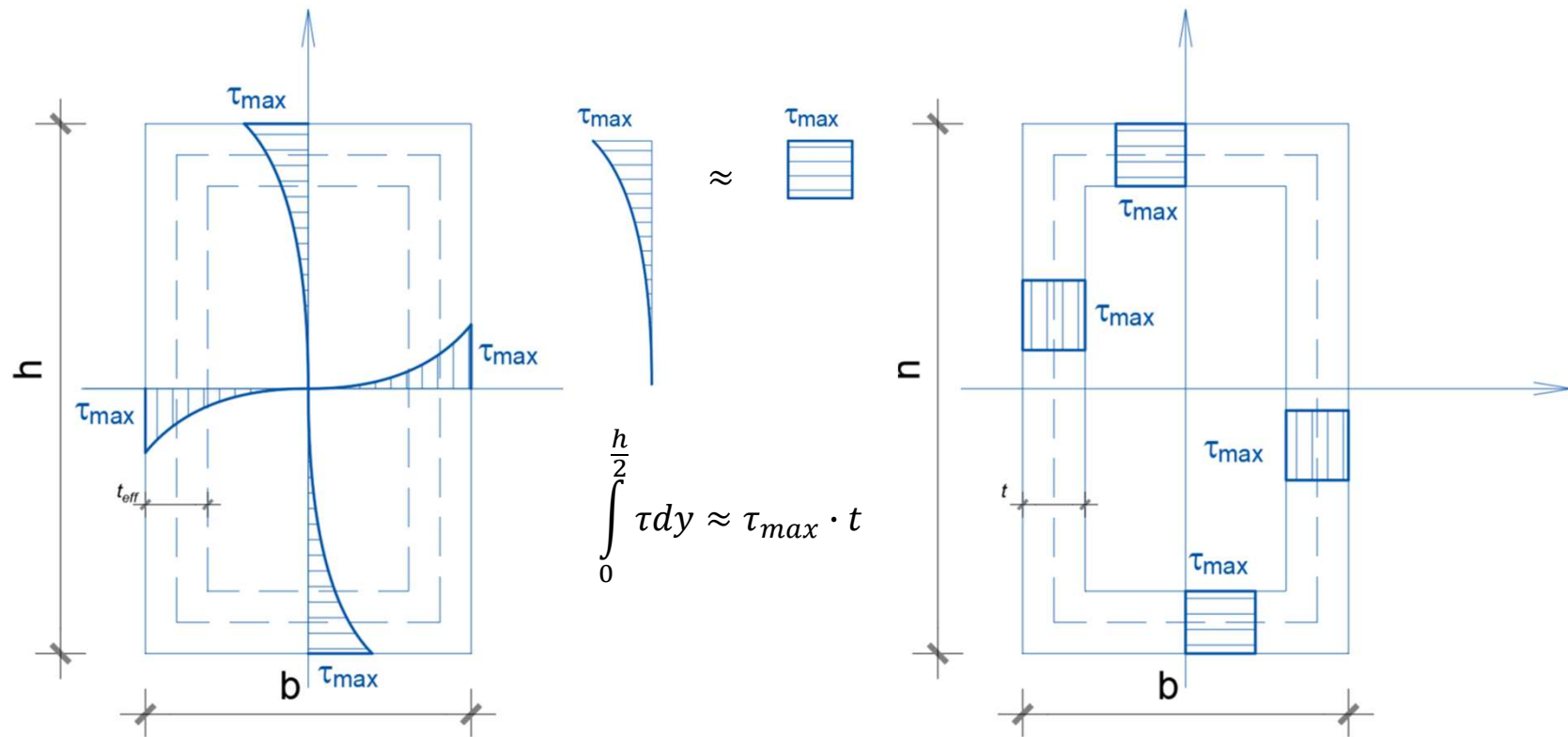
$$T = \oint h \cdot t \cdot \tau \cdot ds$$

$$= \tau \cdot t \oint h \cdot ds$$

$$= \tau \cdot t \oint 2dA_k$$

$$T = 2 \cdot \tau \cdot t \cdot A_k \quad \tau = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_k}$$

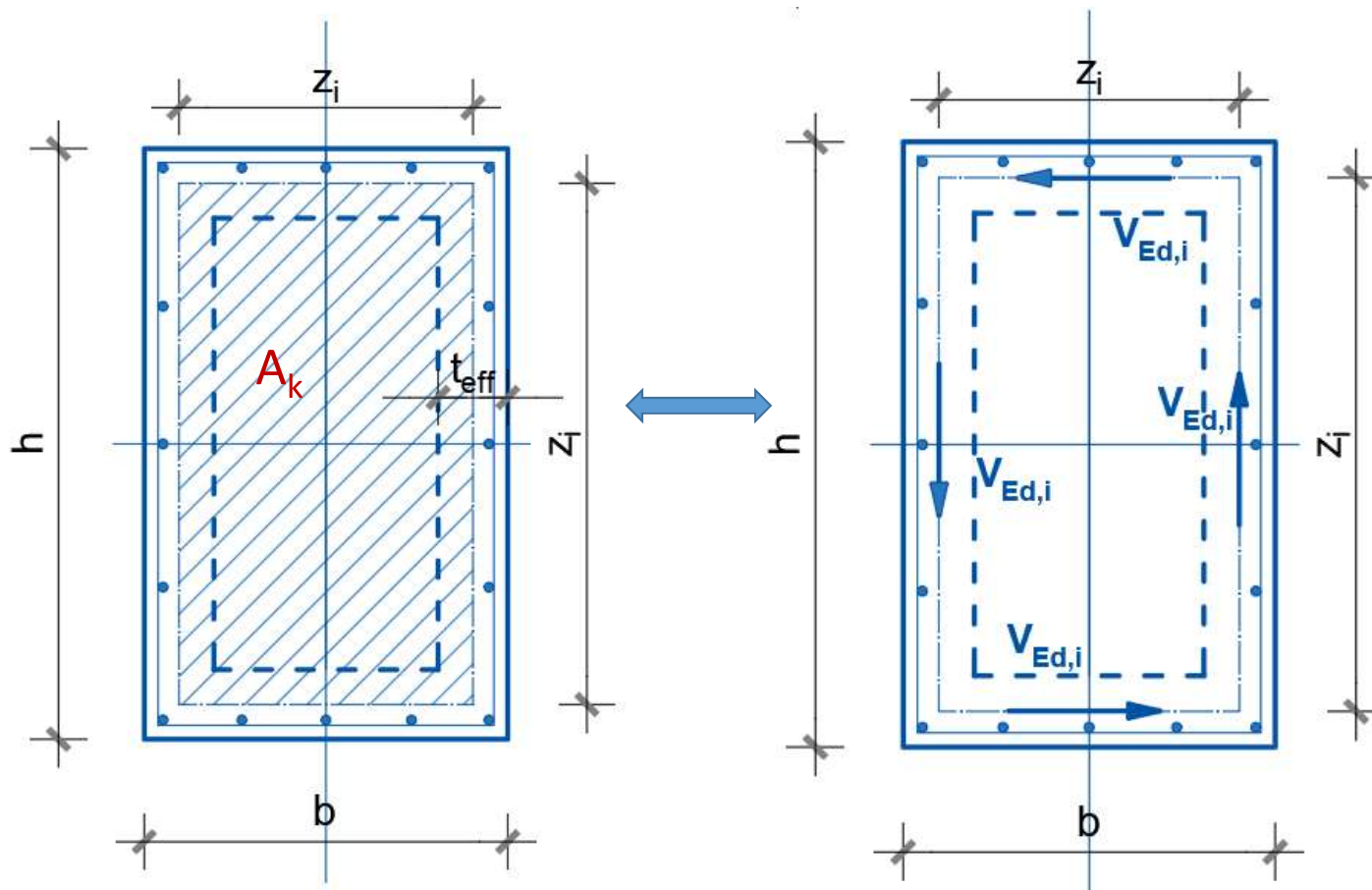
Usporedba naprezanja u presjeku



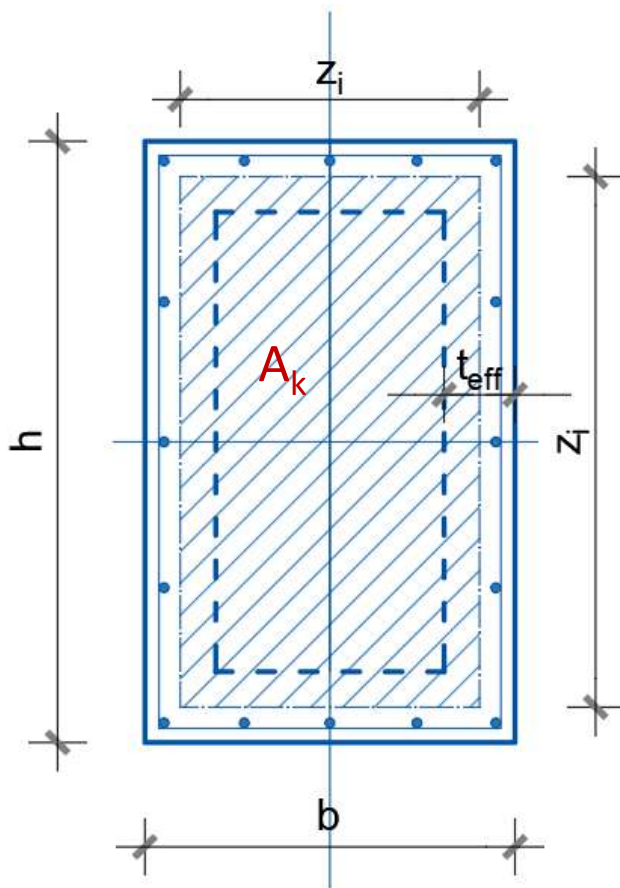
Zašto stijenka mora biti „tanka“?

Puni i zamjenski šuplji presjek – analogija s efektivnom širinom T presjeka!

Zamjenski presjek



Zamjenski presjek



Efektivna (zamjenska) debljina stijenke:

$$t_{eff} = \frac{A}{u} \quad A = b \cdot h \quad - \text{ukupna ploština}$$

$$u = 2b + 2h \quad - \text{ukupni opseg}$$

$$t_{eff} \geq \left(c + \phi_w + \frac{\phi_{long}}{2} \right)$$

$$A_k = (b - t_{eff}) \cdot (h - t_{eff}) \quad \text{ploština omeđena srednjom linijom stijenke}$$

$$z_i = \begin{cases} h - t_{eff} \\ b - t_{eff} \end{cases} \quad \text{duljina srednje linije i - te stijenke}$$

$$u_k = 2[(b - t_{eff}) + (h - t_{eff})] \quad \text{opseg površine omeđene srednjom linijom stijenke}$$

Zamjenski presjek

Poprečna sila u i-toj stijenci:

$$V_{Ed,i} = \tau_t \cdot t_{eff} \cdot Z_i$$

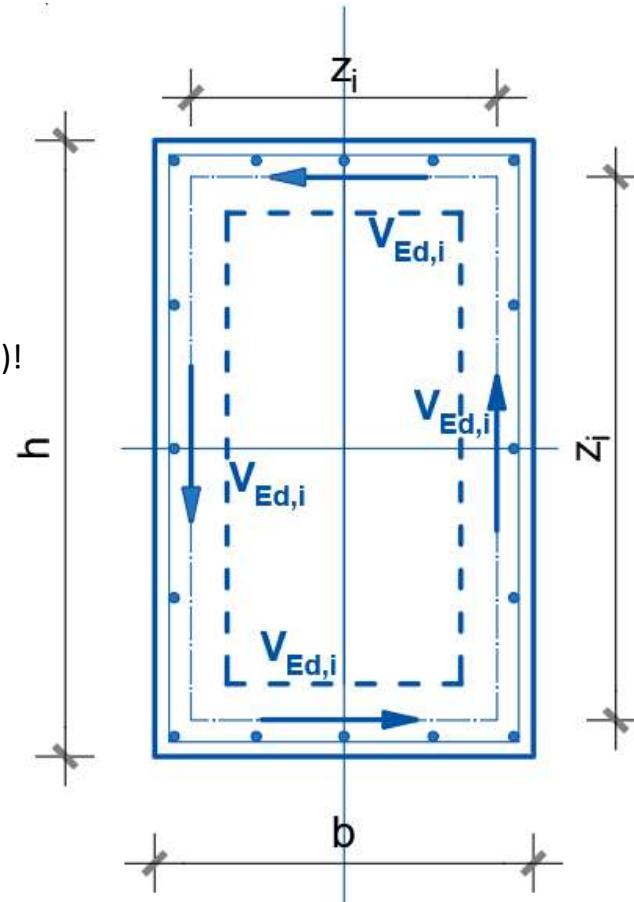
$V_{Ed,i}$ je sila koju treba preuzeti poprečnom armaturom (sponama)!

Sjetimo se sa slajda 7:

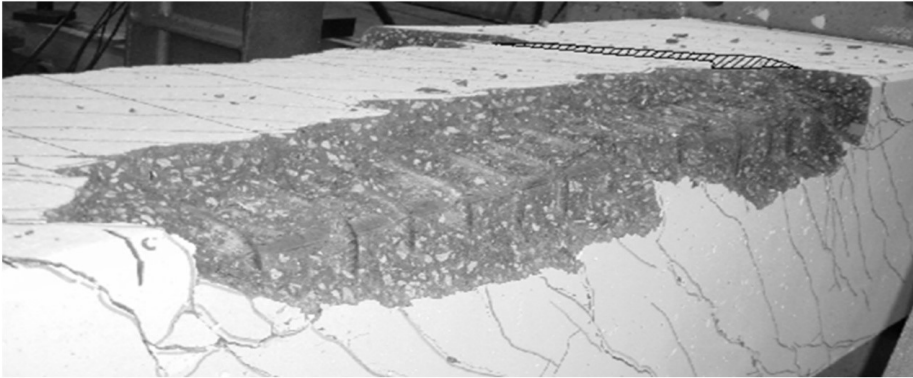
$$\tau = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_k}$$

i uvjeta ravnoteže poprečnog presjeka:

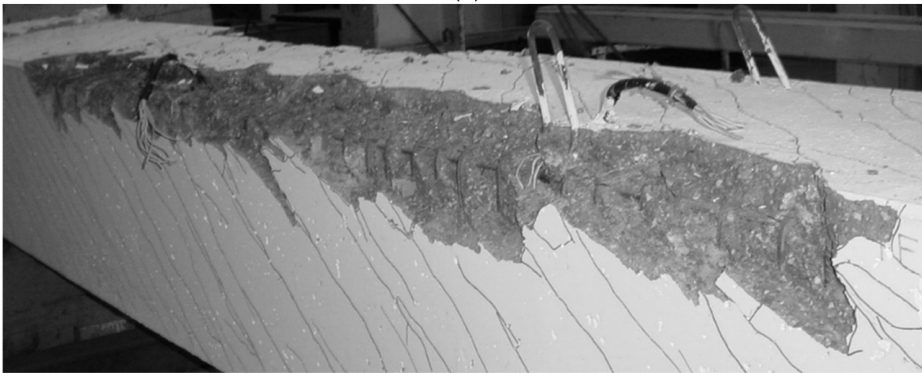
$$T_{Ed} = \Sigma V_{Ed,i} \cdot z_i$$



Pukotine uslijed torzije



(a)



(b)

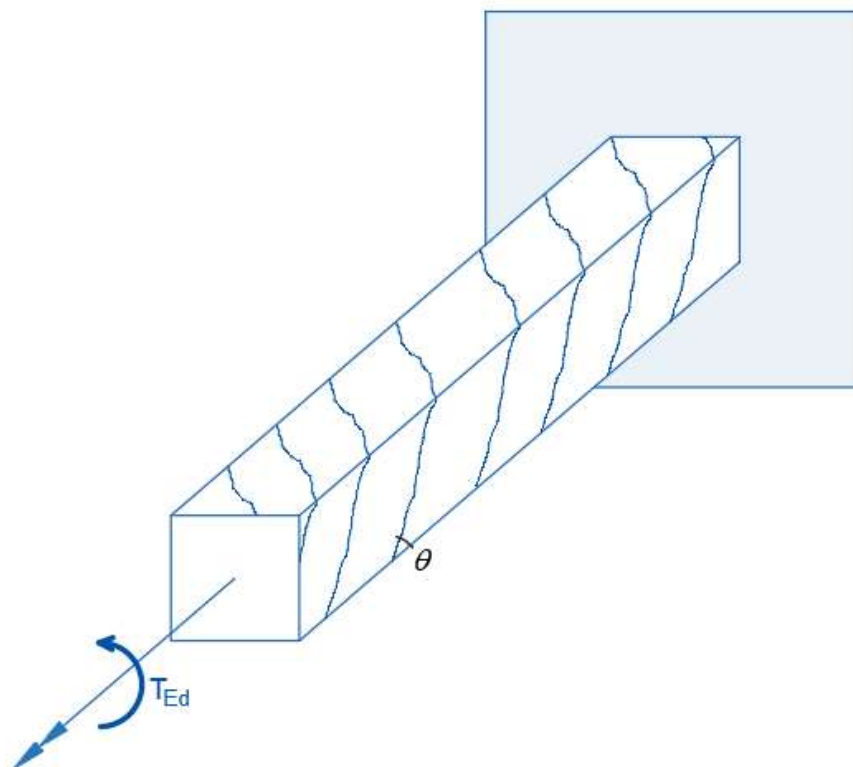
Bernardo, L.; Lopes, S.; Teixeira, M.
Experimental Study on the Torsional Behaviour
of Prestressed HSC Hollow Beams. *Appl.
Sci.* **2020**, *10*, 642

Pukotine uslijed torzije

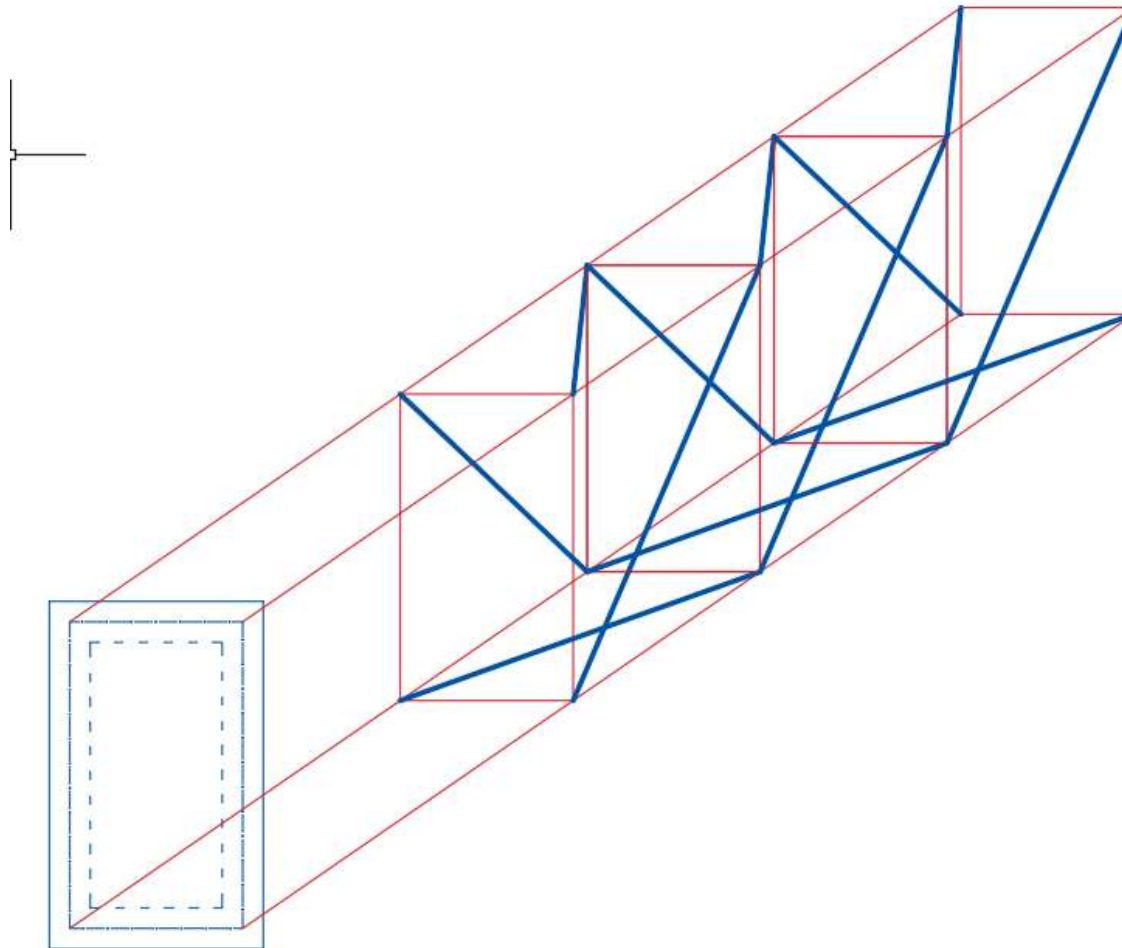


Torsional Moment Capacity and Failure Mode Mechanisms of Concrete Beams Reinforced with Carbon FRP Bars and Stirrups
Hamdy M. Mohamed; Omar Chaallal;
and Brahim Benmokrane

Pukotine uslijed torzije

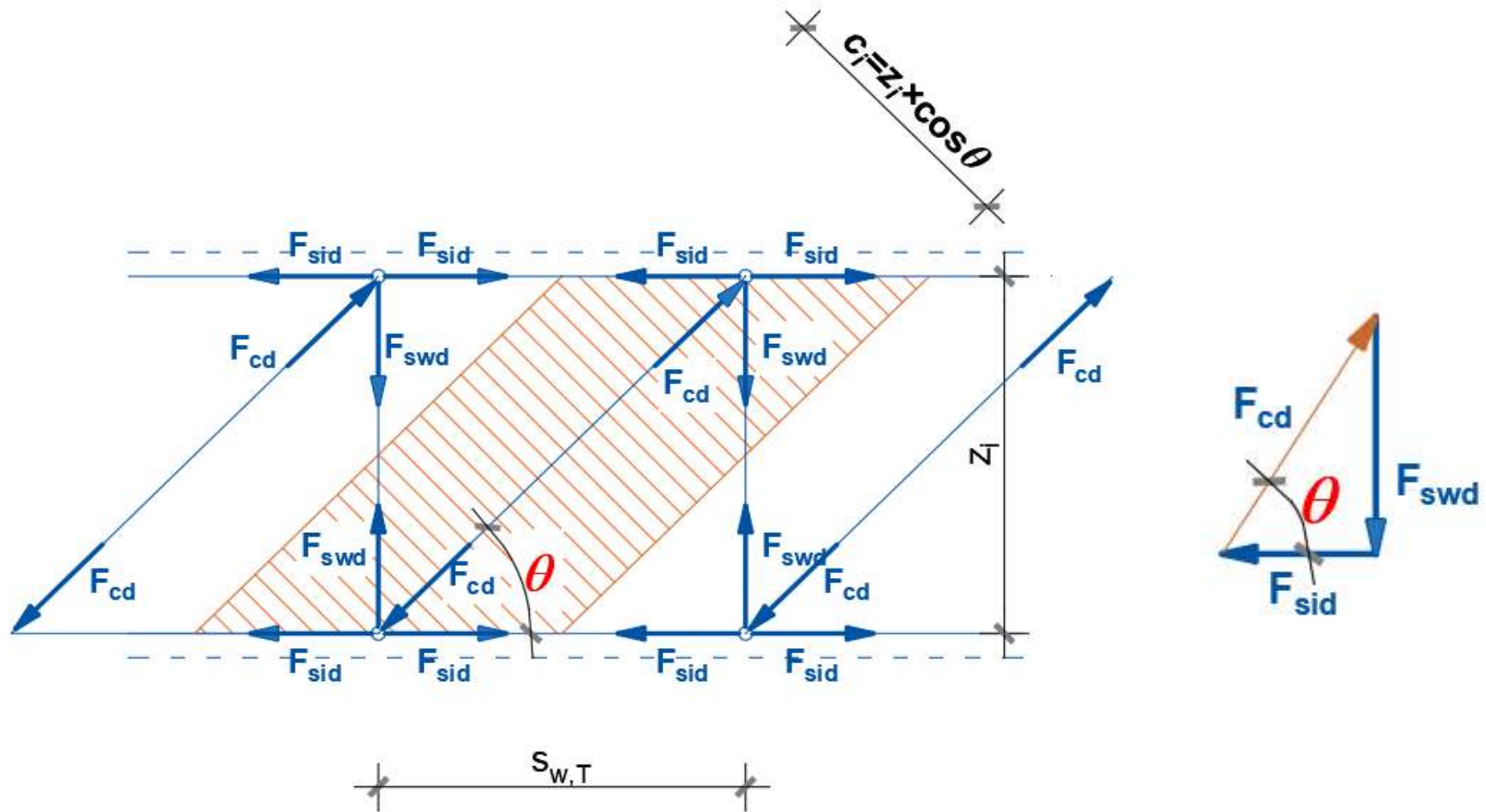


Tok sila u gredi



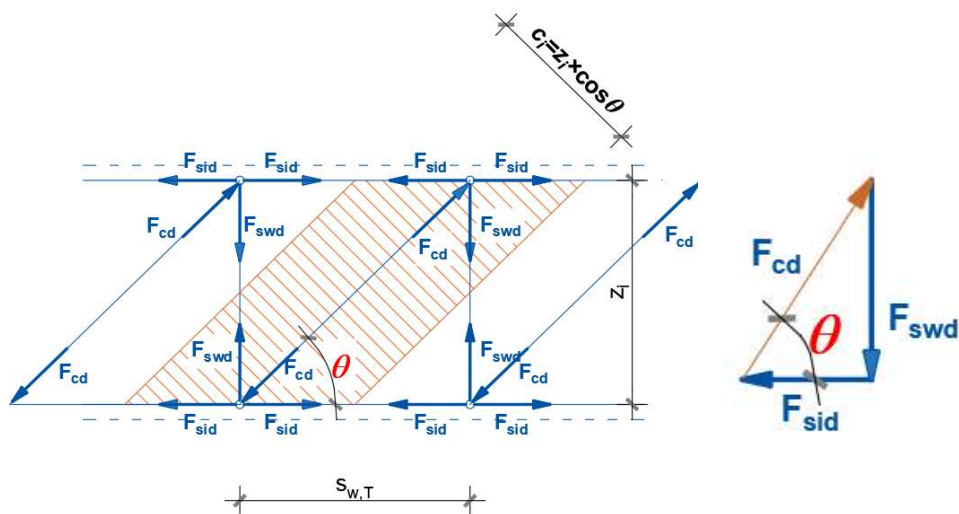
Tok sila u gredi

Pogled odozgo (ili sa strane)



Tok sila u gredi

Pogled odozgo (ili sa strane)



$$F_{swd} = V_{Ed,i} = |F_{cd}| \cdot \sin \theta$$

F_{swd} – sila u sponama

F_{cd} – sila u tlačnoj dijagonali betona (sjetiti se V_{Rd2})

$$|F_{cd}| = \frac{V_{Ed,i}}{\sin \theta}$$

$$F_{sld} = |F_{cd}| \cdot \cos \theta = V_{Ed,i} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = V_{Ed,i} \cdot \cot \theta \text{ – sila u uzdužnoj armaturi}$$

Čime je određen kut θ ?

Ploština tlačnog štapa = širina \times debljina $\longrightarrow c_i \cdot t_{eff} = t_{eff} \cdot z_i \cdot \cos \theta$

Kontrole naprezanja

1. Kontrola tlačnih naprezanja u betonu (tlačnoj dijagonali)
2. Kontrola naprezanja u uzdužnoj armaturi
3. Kontrola naprezanja u sponama

Kontrole naprezanja

1. Kontrola tlačnih naprezanja u betonu (tlačnoj dijagonali)

2. Kontrola naprezanja u uzdužnoj armaturi

3. Kontrola naprezanja u sponama

Naprezanje u betonu (slajd 17) = sila u betonu po jedinici površine tlačnog štapa:

$$\sigma_{cd,T} = \frac{F_{cd}}{c_i \cdot t_{eff}} \quad \text{pri čemu je (slajd 17):} \quad c_i \cdot t_{eff} = t_{eff} \cdot z_i \cdot \cos \theta$$



Ploština tlačnog štapa = širina × debljina

$$|F_{cd}| = \frac{V_{Ed,i}}{\sin \theta}$$

$$\sigma_{cd,T} = \frac{V_{Ed,i}}{t_{eff} \cdot z_i \cdot \cos \theta \sin \theta} \quad \text{uz supstituciju (slajd 11):} \quad V_{Ed,i} = \tau_t \cdot t_{eff} \cdot z_i$$



$$\tau_t = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot t_{eff} \cdot A_k}$$

$$\sigma_{cd,T} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot t_{eff} \cdot \cos \theta \sin \theta} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot t_{eff}} \cdot (\cot \theta + \tan \theta)$$

Kontrole naprezanja

1. Kontrola tlačnih naprezanja u betonu (tlačnoj dijagonali)

2. Kontrola naprezanja u uzdužnoj armaturi

3. Kontrola naprezanja u sponama

ΣA_{sl} – ukupna količina uzdužne armature u presjeku (suma ploština svih uzdužnih šipki armature)

$a_{sl} = \frac{\Sigma A_{sl}}{u_k}$ – ploština uzdužne armature po jedinici duljine srednje linije i-te stranice zamjenskog tankostijenog šupljeg presjeka

$a_{sl} \cdot z_i$ – ploština armature na jednoj i-toj stranici

$\sigma_{sld} = \frac{F_{sld}}{a_{sl} \cdot z_i}$ pri čemu je (slajd 17 i 11): $F_{sld} = V_{Ed,i} \cdot \cot \theta$ – sila u uzdužnoj armaturi



$$\sigma_{sld} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot a_{sl}} \cdot \cot \theta$$

$$V_{Ed,i} = \tau_t \cdot t_{eff} \cdot z_i$$

$$\tau_t = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot t_{eff} \cdot A_k}$$

Kontrole naprezanja

1. Kontrola tlačnih naprezanja u betonu (tlačnoj dijagonali)

2. Kontrola naprezanja u uzdužnoj armaturi

3. Kontrola naprezanja u sponama

$$\sigma_{swd} = \frac{F_{swd}}{A_{sw}^1}$$

A_{sw}^1 – ploština jedne grane spona za preuzimanje torzije

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}^1}{s_{w,T}}$$

a_{sw} – ploština poprečne armature za preuzimanje torzije po jedinici duljine i-te stranice

$$s_{w,T} = z_i \cdot \cot \theta$$

$s_{w,T}$ – ploština poprečne armature za preuzimanje torzije po jedinici duljine i-te stranice

$$A_{sw}^1 = a_{sw} \cdot z_i \cot \theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{swd} = \frac{F_{swd}}{a_{sw} \cdot z_i \cot \theta}$$

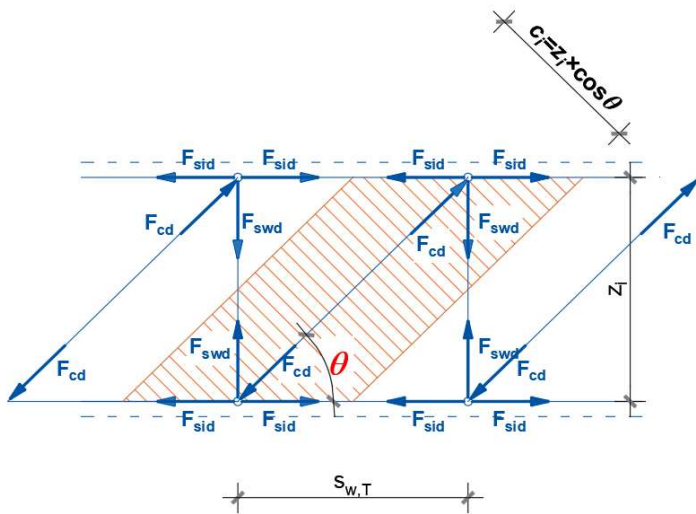
uz supstituciju (slajd 17 i 11): $F_{swd} = V_{Ed,i} = |F_{cd}| \cdot \sin \theta$

$$\sigma_{swd} = \frac{V_{Ed,i}}{a_{sw} \cdot z_i} \cdot \tan \theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{swd} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot a_{sw}} \cdot \tan \theta$$

$$V_{Ed,i} = \tau_t \cdot t_{eff} \cdot z_i$$

$$\tau_t = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot t_{eff} \cdot A_k}$$

Nagib tlačne dijagonale θ

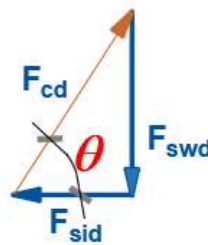


$$1,0 \leq \theta \leq 2,5 \Leftrightarrow 21,8^\circ \geq \theta \geq 45^\circ$$

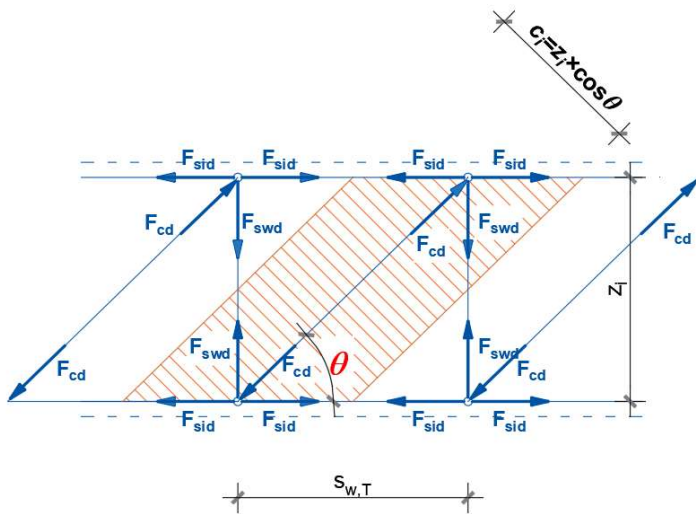
Čime je određen kut θ ?

Što ako je kut θ premali?

Što ako je kut θ preveliki?



Nagib tlačne dijagonale θ

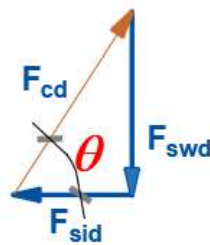


$$1,0 \leq \cot \theta \leq 2,5 \Leftrightarrow 45^\circ \geq \theta \geq 21,8^\circ$$

Čime je određen kut θ ?

Što ako je kut θ premali?

Što ako je kut θ preveliki?



Potrebna ploština armature

Potrebna ploština poprečne armature

Za granično stanje nosivosti: $\sigma_{swd} = f_{ywd}$

Slajd 21:
$$\sigma_{swd} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot a_{sw}} \cdot \tan \theta$$

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}^1}{s_{w,T}}$$

$$f_{ywd} = \frac{T_{Ed} \cdot s_{w,T}}{2 \cdot A_k \cdot A_{sw}^1} \cdot \tan \theta$$

$$A_{sw}^1 = \frac{T_{Ed} \cdot s_{w,T}}{2 \cdot A_k \cdot f_{ywd}} \cdot \tan \theta$$

ili

$$A_{sw}^1 = \frac{T_{Ed} \cdot s_{w,T}}{2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta}$$

Ovo je dodatna poprečna armatura na onu količinu potrebnu za preuzimanje poprečnih sila!

Potrebna ploština armature

Potrebna ploština uzdužne armature

Za granično stanje nosivosti: $\sigma_{sld} = f_{yd}$

Slajd 20:
$$\sigma_{sld} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot a_{sl}} \cdot \cot \theta$$

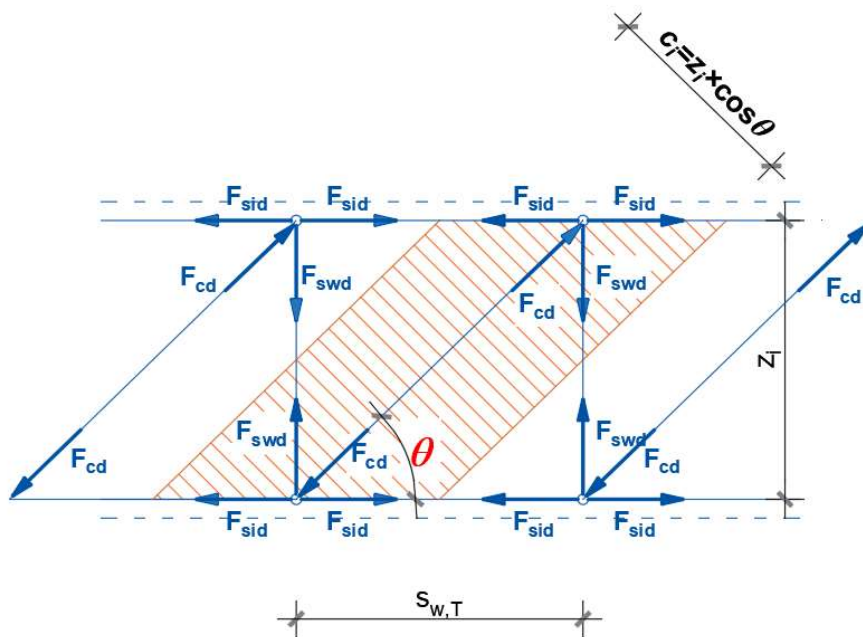
$$a_{sl} = \frac{\sum A_{sl}}{u_k}$$

$$f_{yd} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k}{2 \cdot A_k \cdot \sum A_{sl}} \cdot \cot \theta$$

$$\sum A_{sl} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot \cot \theta$$

Ovo je dodatna uzdužna armatura na onu količinu potrebnu za preuzimanje momenata savijanja!

Interakcija torzije i ostalih djelovanja



Prisjetimo se:

1. Koja naprezanja uzrokuje moment torzije?
2. S kojim djelovanjima će se djelovanje torzije zbrajati?

Interakcija torzije i momenta savijanja

$$\sigma_{cd} \leq \nu \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd}$$

Gdje je:

σ_{cd} glavno tlačno naprezanje

$\nu = 0.6 \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right]$ koeficijent smanjenja tlačne čvrstoće za beton raspucan zbog posmika (sjetiti se V_{Rd0})

$\alpha_{cw} = 1.0$ za elemente bez uzdužne sile

Mora biti zadovoljen uvjet:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd0}} \leq 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_{Rd0}} \right) \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd0}}}$$

Gdje je:

$$\begin{aligned} T_{Rd0} &= A_k \cdot t_{eff} \cdot \sigma_{cd} \\ &= A_k \cdot t_{eff} \cdot \nu \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \end{aligned}$$

$$M_{Rd0} = z \cdot b_w \cdot t_{eff} \cdot f_{cd}$$

Što ako uvjet nije zadovoljen?

Interakcija torzije i poprečne sile

Mora biti zadovoljen uvjet:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1$$

Gdje je:

$$T_{Rd,max} = 2 \cdot v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{eff} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta}$$

$T_{Rd,max}$ maksimalna proračunska otpornost na moment torzije u trenutku dosezanja proračunske tlačne čvrstoće u tlačnim štapovima

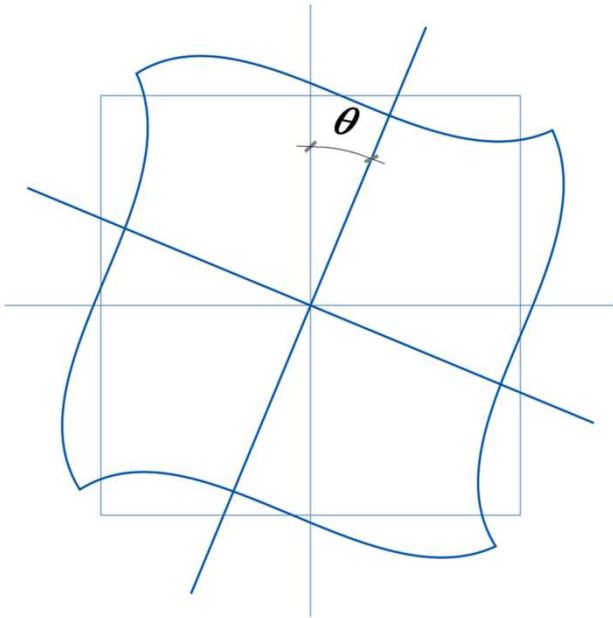
$V_{Rd,max}$ maksimalna proračunska otpornost na poprečnu silu

Što ako uvjet nije zadovoljen?

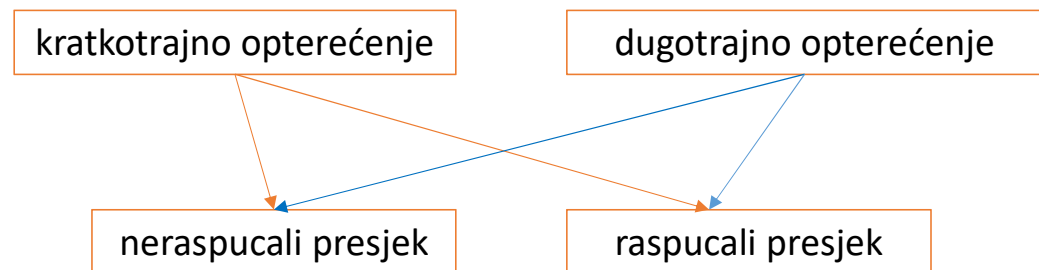
Određivanje kuta rotacije i progiba

Granična stanja uporabljivosti:

moment savijanja  progib
moment torzije  kut rotacije, progib



Četiri proračunske situacije:



Određivanje kuta rotacije i progiba

Parcijalni koeficijenti sigurnosti za
granična stanja uporabljivosti:

$$\gamma_G = \gamma_Q = 1.0$$

kratkotrajno opterećenje

$$T_{Ed} = \gamma_G \cdot T_G + \gamma_Q \cdot T_Q$$

dugotrajno opterećenje

$$T_{Ed} = \gamma_G \cdot T_G + \gamma_Q \cdot \psi_2 \cdot T_Q$$

ψ_2 - faktor kombinacije opterećenja (vidjeti Sorić, Kišiček: Betonske konstrukcije 1, str. 44)

Određivanje kuta rotacije i progiba



$$\theta_T = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{cm} \cdot I_T} \quad v = L \cdot \theta_T$$

$$G_{cm} = 0.42 \cdot E_{cm}$$

E_{cm} - sekantni modul elastičnosti (vidjeti Sorić, Kišiček: Betonske konstrukcije 1, str. 81)

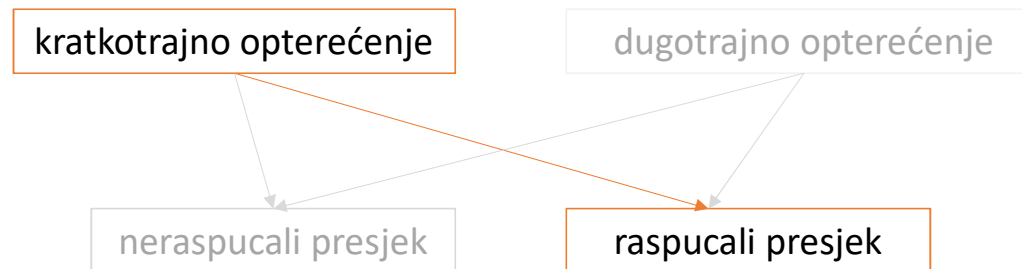
$$I_T = \eta \cdot h \cdot b^3$$

torzijski moment tromosti neraspucalog presjeka

v

progib uslijed momenta torzije koji djeluje na duljini L

Određivanje kuta rotacije i progiba



$$\theta_T = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{cm} \cdot I'_T} \quad v = L \cdot \theta_T$$

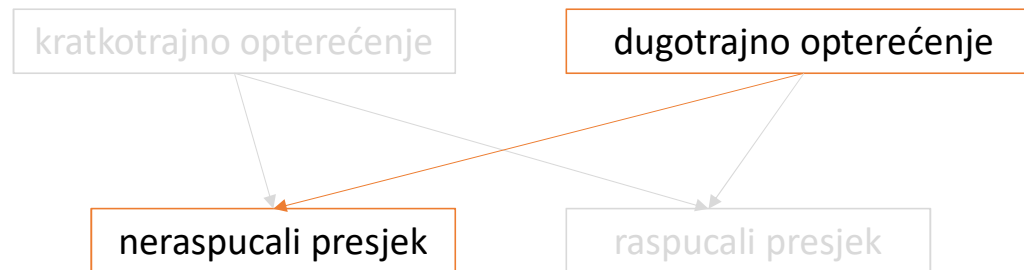
$$G_{cm} = 0.42 \cdot E_{cm}$$

E_{cm} - sekantni modul elastičnosti (vidjeti Sorić, Kišiček: Betonske konstrukcije 1, str. 81)

$$I'_T = 0.5I_T$$

torzijski moment tromosti raspucalog presjeka

Određivanje kuta rotacije i progiba



$$\theta_{T,\infty} = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{c,eff} \cdot I_T} \quad v = L \cdot \theta_{T,\infty}$$

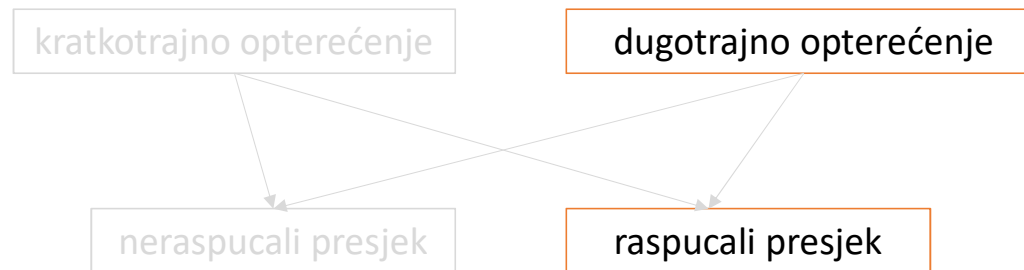
$$G_{c,eff} = 0.4 \cdot E_{c,eff}$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1.0 + \varphi(\infty, t_0)}$$

$E_{c,eff}$ - proračunski modul elastičnosti za dugotrajno djelovanje

$\varphi(\infty, t_0)$ - konačni koeficijent puzanja

Određivanje kuta rotacije i progiba



$$\theta_{T,\infty} = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{c,eff} \cdot I'_T}$$

$$v = L \cdot \theta_{T,\infty}$$

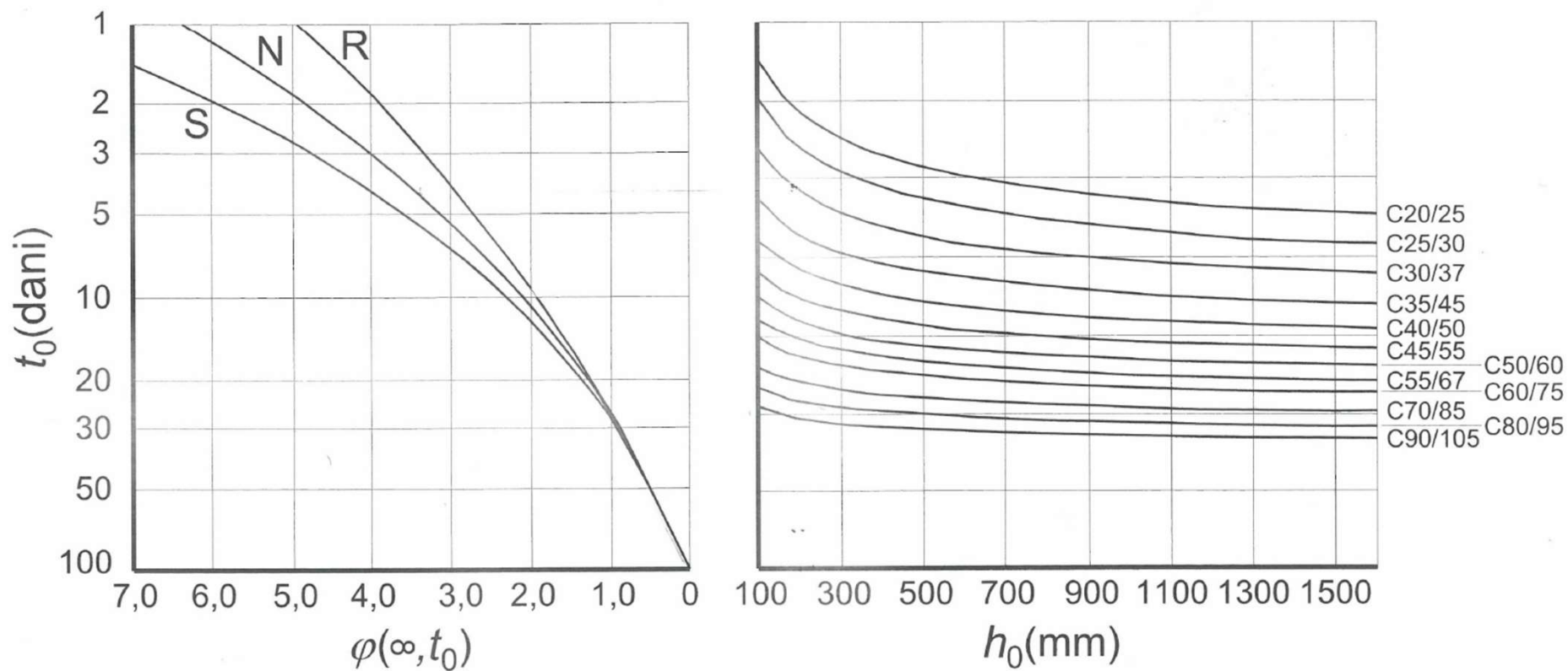
Određivanje torzijskog momenta tromosti I_T i torzijskog momenta otpora W_T

h/b	1.0	1.25	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	∞
η	0.142	0.172	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333
α	4.81	4.52	4.33	4.07	3.88	3.74	3.55	3.43	3.20	3.00

Za međuvrijednosti smije se koristiti linearna interpolacija.

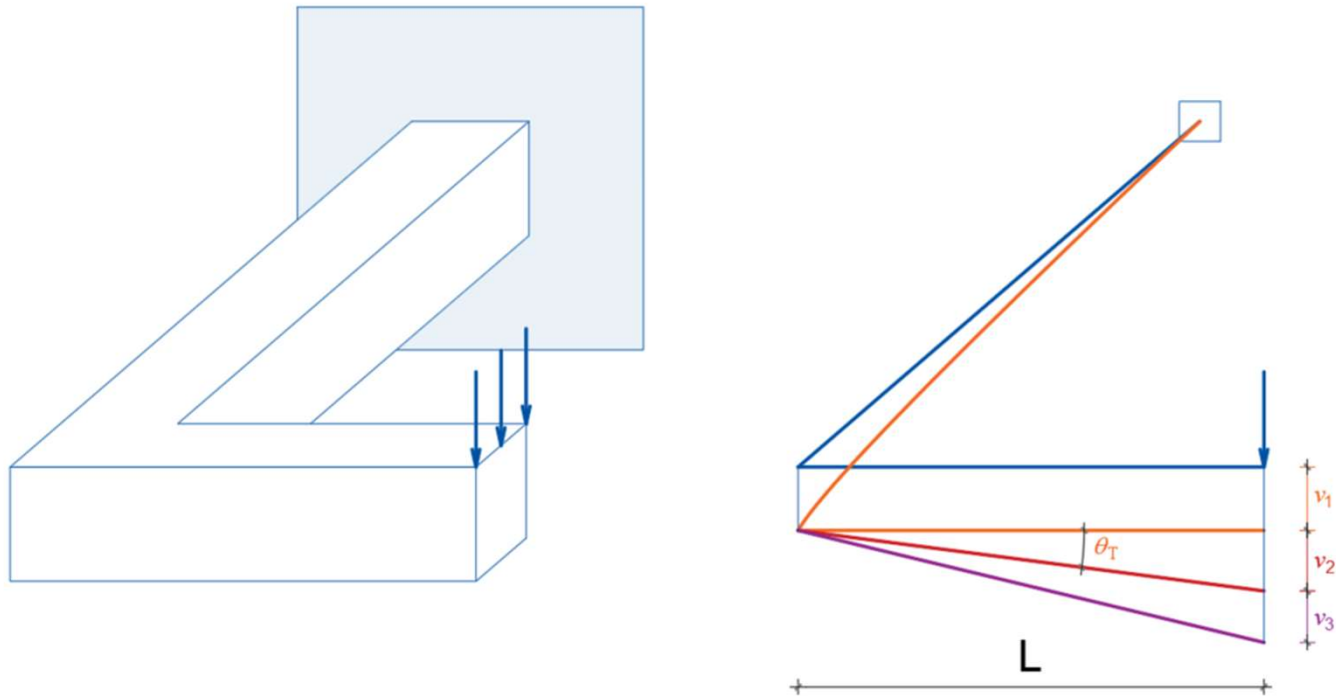
$$I_T = \eta \cdot h \cdot b^3 \quad W_T = \frac{1}{\alpha} \cdot h \cdot b^2$$

Određivanje koeficijenta puzanja



Sorić, Z., Kišiček, T.: Betonske konstrukcije 1, Slika 3.1

Progibi zbog savijanja i torzije



v_1

progib uslijed momenta savijanja

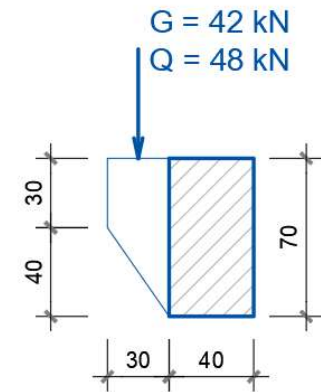
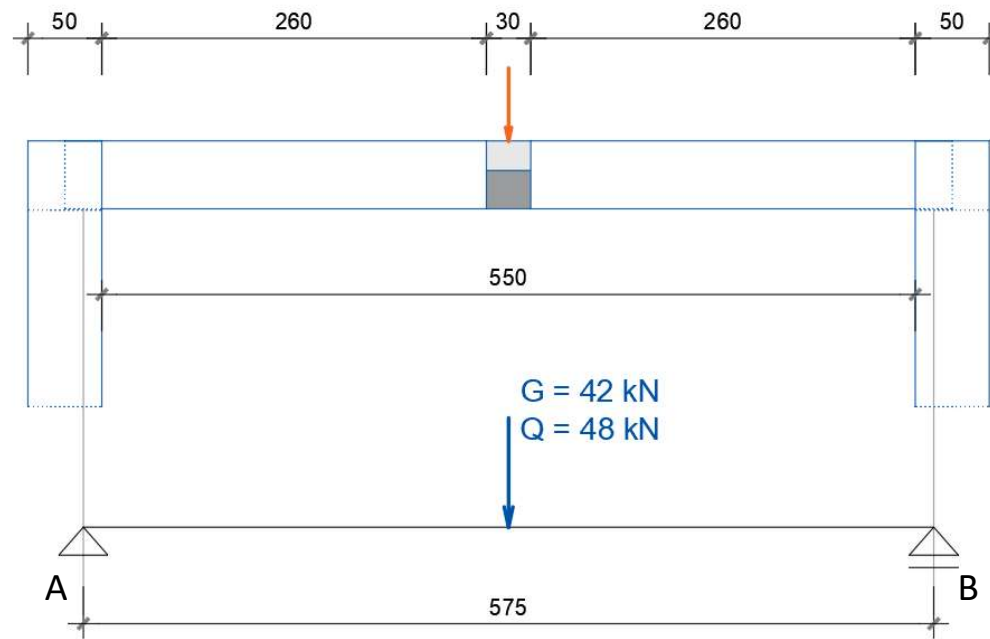
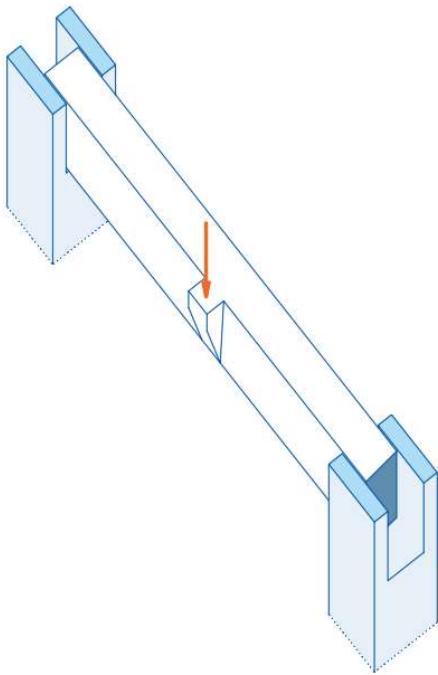
$v_2 = L \cdot \theta_T$

progib uslijed momenta torzije zbog kratkotrajnog djelovanja

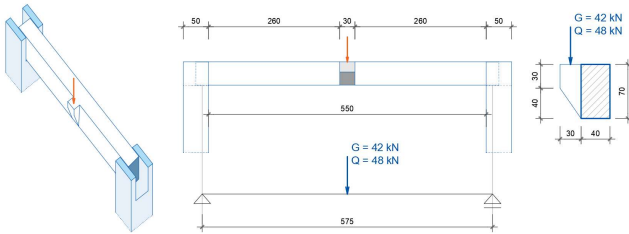
$v_3 = L \cdot \theta_{T,\infty}$

progib uslijed momenta torzije zbog dugotrajnog djelovanja

Primjer proračuna



Primjer proračuna



Poprečni presjek

$$b/h = 40/70 \text{ cm}$$

$$d_1 = 4.5 \text{ cm} \quad c = 3 \text{ cm}$$

Odabrane spone

$$\alpha = 90^\circ$$

Beton C 25/30

$$f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1.0 \cdot \frac{25}{1.5} = 16.67 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctm} = 2.6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{srednja vlačna čvrstoća} \\ \text{betona (BK1, tablica 3.1)}$$

Čelik B500B

$$f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1.15} = 434.78 \text{ N/mm}^2$$

Primjer proračuna

Analiza opterećenja

a) stalno opterećenje

$$G = 42 + [(0.30 \times 0.30 + 0.30 \times 0.40 \times 0.5) \times 0.30] \times 25.00$$

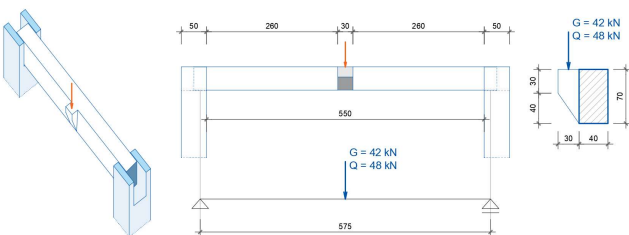
$$= 43.12 \text{ kN}$$

$$g = 0.4 \times 0.7 \times 25.00$$

$$= 7.00 \text{ kN/m}$$

b) promjenjivo opterećenje

$$Q = 48.00 \text{ kN}$$



$$M_G = \frac{7.0 \cdot 5.75^2}{8} + \frac{43.12 \cdot 5.75}{4} = 61.98 \text{ kNm}$$

$$M_Q = \frac{48.00 \cdot 5.75}{4} = 69.00 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 1.35 \cdot 61.98 + 1.5 \cdot 69.00 = \mathbf{187.17 \text{ kNm}}$$

$$V_{G,A} = V_{G,B} = 0.5 \cdot (43.12 + 7 \cdot 5.75) = 41.68 \text{ kN}$$

$$V_{Q,A} = V_{Q,B} = 0.5 \cdot 48.00 = 24.00 \text{ kN}$$

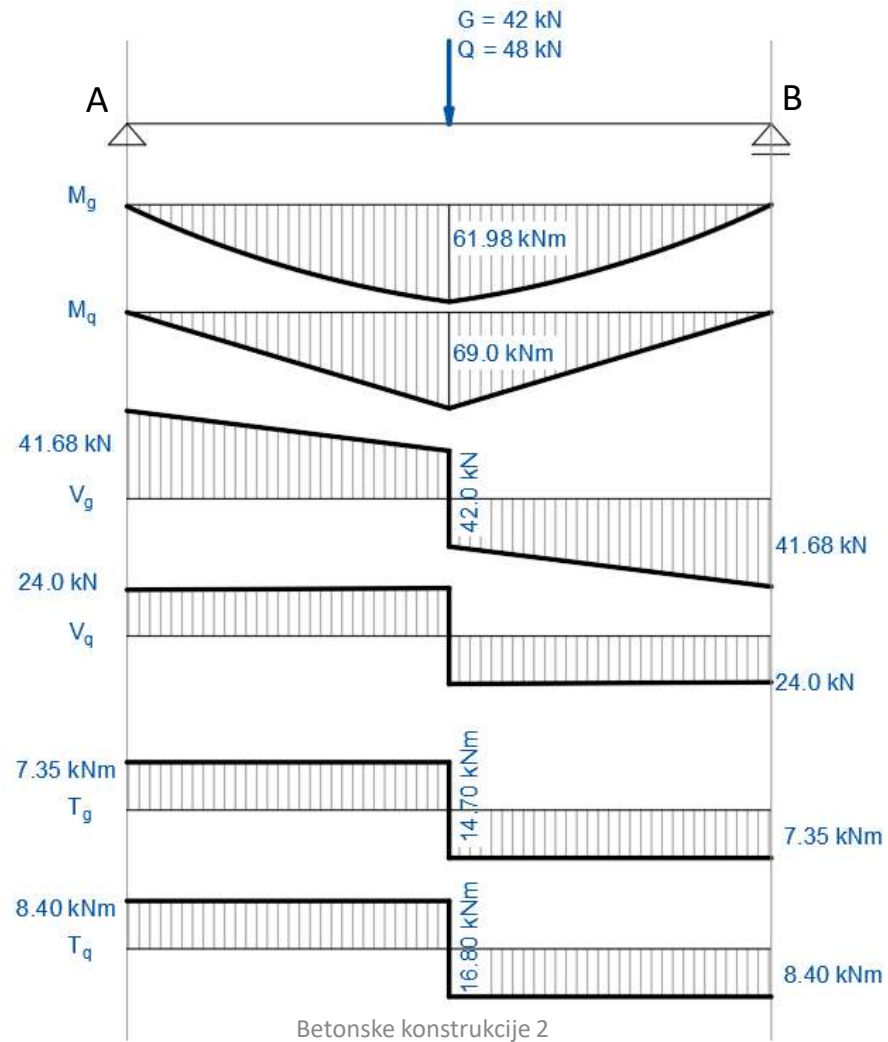
$$V_{Ed} = 1.35 \cdot 41.68 + 1.5 \cdot 24.00 = \mathbf{92.27 \text{ kN}}$$

$$T_{G,A} = T_{G,B} = 0.5 \cdot (0.15 + 0.20) \cdot 42.00 = 7.35 \text{ kNm}$$

$$V_{Q,A} = V_{Q,B} = 0.5 \cdot (0.15 + 0.20) \cdot 48.00 = 8.40 \text{ kNm}$$

$$T_{Ed} = 1.35 \cdot 7.35 + 1.5 \cdot 8.40 = \mathbf{22.52 \text{ kNm}}$$

Primjer proračuna



Primjer proračuna

Proračun glavne uzdužne armature:

$$M_{Ed} = 187.17 \text{ kNm}$$

$$\mu_{Ed} = \frac{18717}{40 \cdot 65.5^2 \cdot 1.667} = 0.065 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{c2} = -2.2 \text{ ‰} \\ \varepsilon_{s1} = 20 \text{ ‰} \\ \xi = 0.099 \\ \zeta = 0.962 \end{cases}$$

$$A_{s1} = \frac{18717}{0.962 \cdot 65.5 \cdot 43.478} = 6.83 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,prov} = 5\phi 14 (7.70 \text{ cm}^2)$$

Kontrola minimalne i maksimalne armature:

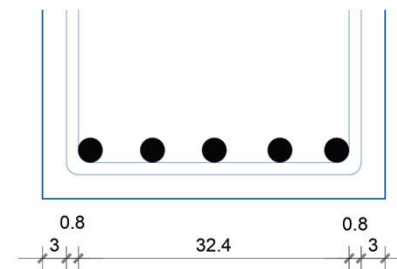
$$A_{s1,min} = \begin{cases} 0.26 \cdot \frac{2.6}{50.0} \cdot 40 \cdot 65.5 = 3.54 \text{ cm}^2 \\ 0.0013 \cdot 40 \cdot 65.5 = 3.40 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$A_{s1,max} = 0.360 \cdot 40 \cdot 65.5 \cdot \frac{1.667}{43.478} = 36.16 \text{ cm}^2$$

$$3.54 \text{ cm}^2 < 7.70 \text{ cm}^2 < 36.16 \text{ cm}^2$$

Kontrola svijetlog razmaka šipki:

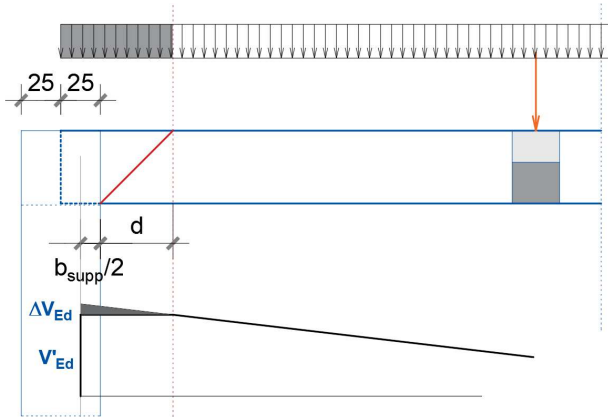
$$e_{min} = \begin{cases} k_1 \cdot \phi = 1.0 \cdot 1.4 = 1.4 \text{ cm} \\ d_g + k_2 = 1.6 + 0.5 = 2.1 \text{ cm} \\ 20 \text{ mm} \end{cases}$$



$$e = \frac{32.4 - 5 \cdot 1.4}{4} = 6.35 \text{ cm}$$

Primjer proračuna

Proračun poprečne armature:



$$V_{Ed} = 92.27 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{Ed} &= g_{Ed} \cdot \left(\frac{b_{supp}}{2} + d \right) \\ &= 1.35 \cdot 7.00 \cdot \left(\frac{25}{2} + 65.5 \right) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 7.35 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$V'_{Ed} = 92.27 - 7.37 = 84.90 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} = \left[C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + k_1 \cdot \sigma_{cp} \right] \cdot b \cdot d \geq V_{Rd,c,min} = (v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

$$C_{Rd,c} = \frac{0.18}{\gamma_c} = \frac{0.18}{1.5} = 0.12; \quad k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{655}} = 1.55; \quad \rho_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} = \frac{7.70}{40 \cdot 65.5} = 0.0029 < 0.02; \quad k_1 = 0.015$$

$$V_{Rd,c} = \left[0.12 \cdot 1.55 \cdot (100 \cdot 0.0029 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0.15 \cdot 0.0 \right] \cdot 40 \cdot 65.5 = 94317.78 \text{ N}$$

$$v_{min} = 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 0.035 \cdot 1.55^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 0.337 \text{ N/mm}^2$$

$$V_{Rd,c,min} = (0.337 + 0.015 \cdot 0.0) \cdot 400 \cdot 655 = 88478.3 \text{ N}$$

$$V_{Rd,c} = 94317.78 \text{ N} > V_{Rd,c,min} = 88478.3 \text{ N}$$

Primjer proračuna

Proračun poprečne armature:

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta}$$

$$\alpha_{cw} = 1.0; \quad v_1 = 0.6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = 0.6 \cdot \left(1 - \frac{25}{250}\right) = 0.54; \quad z = 0.9 \cdot d = 0.9 \cdot 65.5 = 58.95 \text{ cm}$$

Odabrano: $\cot \theta = 1.2 \Rightarrow \theta = 39.8^\circ$

$$V_{Rd,max} = 1.0 \cdot 40 \cdot 58.95 \cdot 0.54 \cdot 1.667 \cdot \frac{1}{1.2 + 0.833} = 1044.08 \text{ kN}$$

$$V'_{Ed} = 84.90 \text{ kN} < V_{Rd,max} = 1044.08 \text{ kN}$$

$$V'_{Ed} = 84.90 \text{ kN} < V_{Rd,c} = 94.31 \text{ kN}$$

Dovoljna je minimalna armatura!

Primjer proračuna

Proračun poprečne armature:

$$\rho_{w,min} = 0.15 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} = 0.15 \cdot \frac{2.6}{434.78} = 0.000897$$

Odabrane spone: $\phi 8$, $A_{sw}^1 = 0.505 \text{ cm}^2$, $m = 2 \Rightarrow A_{sw} = 1.01 \text{ cm}^2$

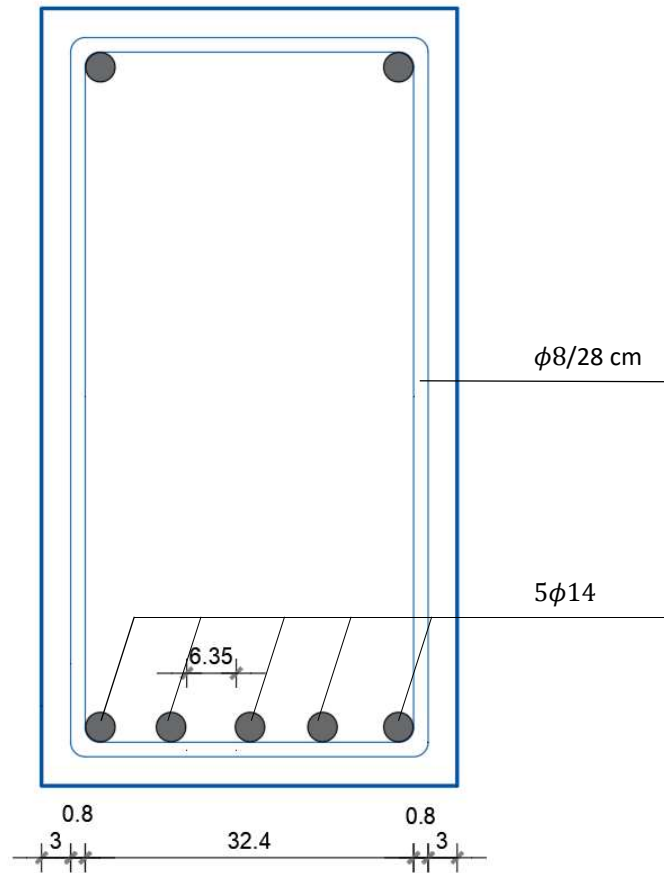
Maksimalni razmak spona:

$$s_{l,max} = \begin{cases} \frac{A_{sw}}{\rho_{w,min} \cdot b_w \cdot \sin \alpha} = \frac{1.01}{0.000897 \cdot 40 \cdot 1.0} = \mathbf{28.15 \text{ cm}} \\ 0.75 \cdot d = \mathbf{49.12 \text{ cm}} \quad \Leftarrow \quad \text{za } V'_{Ed} = 84.90 \text{ kN} < 0.3 \cdot V_{Rd,max} = 313.22 \text{ kN (BK1, tablica 4.13)} \\ \mathbf{30 \text{ cm}} \end{cases}$$

Odabrani razmak spona: $s_l = 28.15 \text{ cm}$

Primjer proračuna

Armatura poprečnog presjeka za preuzimanje momenta savijanja i poprečne sile



Primjer proračuna

Proračun za djelovanje torzije – uzdužna armatura:

$$T_{Ed} = 22.52 \text{ kNm}$$

$$\Sigma A_{sl} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot \cot \theta$$

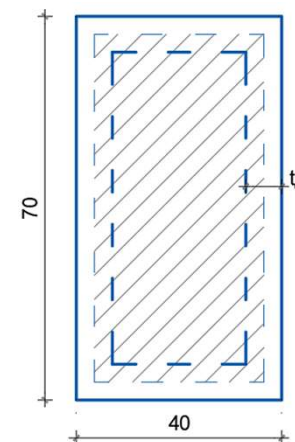
Ukupna količina uzdužne armature za preuzimanje torzije (slajd 25)

$$t_{ef} = \frac{A}{u} = \frac{40 \cdot 70}{2 \cdot (40 + 70)} = 12.72 \text{ cm} \quad u_k = 2 \cdot [(40 - 12.72) + (70 - 12.72)] = 169.12 \text{ cm}$$

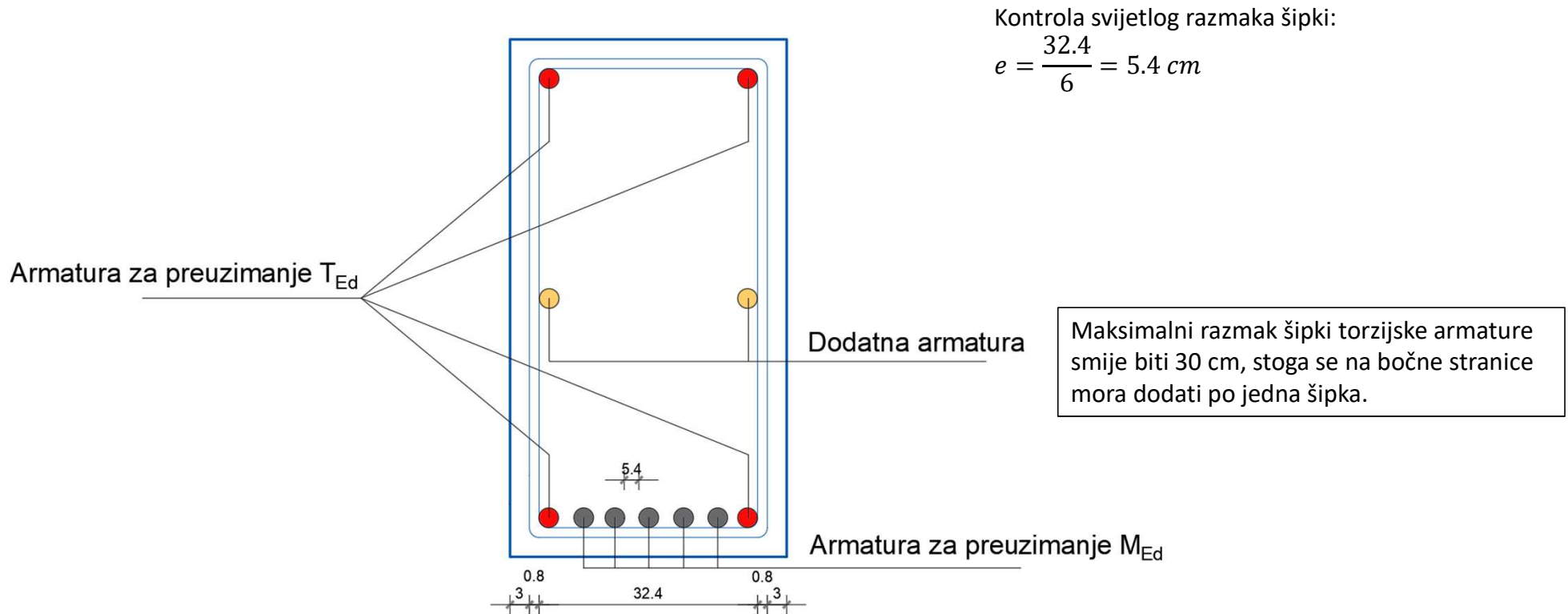
$$A_k = (40 - 12.72) \cdot (70 - 12.72) = 1562.59 \text{ cm}^2$$

$$\Sigma A_{sl} = \frac{2252 \cdot 169.12}{2 \cdot 1562.59 \cdot 43.478} \cdot 1.2 = 3.36 \text{ cm}^2$$

Odabrana uzdužna armatura za preuzimanje torzije: $4\phi 14$, $\Sigma A_{s,l,prov} = 4 \cdot 1.54 = 6.16 \text{ cm}^2$
Armaturu smjestiti u uglove poprečnog presjeka!



Primjer proračuna



Primjer proračuna

Proračun za djelovanje torzije – poprečna armatura:

$$s_{w,T} = \frac{A_{sw}^1 \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{wd} \cdot \cot \theta}{T_{Ed}}$$

Odabrane spone: $\phi 8$, $A_{sw}^1 = 0.505 \text{ cm}^2$, $m = 2 \Rightarrow A_{sw} = 1.01 \text{ cm}^2$

$$s_{w,T} = \frac{0.505 \cdot 2 \cdot 1562.59 \cdot 43.478 \cdot 1.2}{2252} = 36.56 \text{ cm}$$

Kontrola maksimalnog razmaka spona:

$$s_{wT,max} = \begin{cases} \frac{u}{8} = \frac{2 \cdot (40 + 70)}{8} = \mathbf{27.5 \text{ cm}} \\ b = \mathbf{40 \text{ cm}} \\ 0.75 \cdot d \cdot (1 + \cot \theta) = 0.75 \cdot 65.5 \cdot (1 + 1.2) = \mathbf{49.12 \text{ cm}} \end{cases}$$

$s_{w,T} > s_{wT,max}$ Mjerodavan je razmak 27.5 cm!

Primjer proračuna

Konačni razmak spona:

Kontrola minimalne ploštine spona za djelovanje torzije:

$$A_{sw,min} = 0.15 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywd}} \cdot s_{w,T} \cdot b_w \cdot \sin \alpha = 0.15 \cdot \frac{2.6}{434.78} \cdot 27.5 \cdot 40 \cdot 1.0 = 0.98 \text{ cm}^2$$

$$A_{sw,min} = 0.98 \text{ cm}^2 < A_{sw,prov} = 1.01 \text{ cm}^2$$

Odabrana je armatura za spona promjera $\phi 8$ mm, i za djelovanje poprečne sile i za djelovanje torzije. Ovo je praktično zbog same izrade armaturnog koša kako se spona ne bi pomiješale. Potrebni razmak spona za djelovanje V'_{Ed} je $s_l = 28.15 \text{ cm}$, a za djelovanje T_{Ed} je $s_{w,T} = 27.5 \text{ cm}$. Stoga se treba izračunati srednji razmak spona koji će zadovoljiti oba djelovanja:

$$s_w = \frac{s_l \cdot s_{w,T}}{s_l + s_{w,T}} = \frac{28.15 \cdot 27.75}{28.15 + 27.75} = 13.97 \text{ cm} \approx 14.00 \text{ cm}$$

$$\text{Odabrane spona: } s_w = 14 \text{ cm, } \phi 8, A_{sw}^1 = 0.505 \text{ cm}^2, m = 2 \Rightarrow A_{sw} = 1.01 \text{ cm}^2$$

Primjer proračuna

Kontrola interakcije momenta torzije i momenta savijanja – kontrola glavnih tlačnih napreznja u betonu:

Pri interakciji momenta torzije i momenta savijanja mora biti ispunjen sljedeći uvjet (slajd 28):

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd0}} \leq 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_{Rd0}}\right) \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd0}}}$$

$$\begin{aligned} T_{Rd0} &= A_k \cdot t_{eff} \cdot \nu \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \\ &= 1562.59 \cdot 12.72 \cdot 0.54 \cdot 1.0 \cdot 1.667 = \mathbf{17892.10 \text{ kNcm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd0} &= z \cdot b_w \cdot t_{eff} \cdot f_{cd} \\ &= 0.9 \cdot 65.5 \cdot 40 \cdot 12.72 \cdot 1.667 = \mathbf{49999.59 \text{ kNcm}} \end{aligned}$$

$$\frac{2252}{17892.10} = \mathbf{0.125} \leq 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{18717}{49999.59}\right) \cdot \frac{18717}{49999.59}} = \mathbf{0.967}$$

Glavna tlačna napreznja zadovoljavaju!

Primjer proračuna

Kontrola interakcije momenta torzije i poprečne sile– kontrola tlačnih naprezanja u betonskoj dijagonali:

Pri interakciji momenta torzije i poprečne sile mora biti ispunjen sljedeći uvjet (slajd 28):

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1$$

$$\begin{aligned} T_{Rd,max} &= 2 \cdot \nu \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{eff} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &= 2 \cdot 0.54 \cdot 1.0 \cdot 1.667 \cdot 1562.29 \cdot 12.72 \cdot 0.64 \cdot 0.768 \\ &= \mathbf{17585.28 \text{ kNcm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,max} &= \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot \nu_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta} \\ &= \frac{1.0 \cdot 40 \cdot 0.9 \cdot 65.5 \cdot 0.54 \cdot 1.667}{1.2 + 0.833} \\ &= \mathbf{1044.08 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\frac{2252}{17585.28} + \frac{84.90}{1044.08} = \mathbf{0.209} \leq 1$$

Tlačna naprezanja u betonskom članku zadovoljavaju!

Primjer proračuna

Proračun rotacije presjeka:

Djelovanja:

kratkotrajno opterećenje

$$\begin{aligned}T_{Ed} &= \gamma_G \cdot T_G + \gamma_Q \cdot T_G \\ &= 1.0 \cdot 7.35 + 1.0 \cdot 8.40 \\ &= 15.75 \text{ kNm}\end{aligned}$$

dugotrajno opterećenje

$$\begin{aligned}T_{Ed,\infty} &= \gamma_G \cdot T_G + \gamma_Q \cdot \psi_2 \cdot T_G \\ &= 1.0 \cdot 7.35 + 1.0 \cdot 0.6 \cdot 8.40 \\ &= 12.39 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Kontrola raspucalosti presjeka:

$$\begin{aligned}T_{Rd,c} &= 2 \cdot A_k \cdot t_{eff} \cdot f_{ctd} \\ &= 2 \cdot 1562.29 \cdot 0.121 \cdot 12.27 = \mathbf{46.38 \text{ kNm}}\end{aligned}$$

- moment torzije pri kojem nastaje prva pukotina

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \cdot \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} = 1.0 \cdot \frac{1.85}{1.5} = 1.21 \text{ N/cm}^2$$

- proračunska osna vlačna čvrstoća betona

$$f_{ctk,0.05} = 0.7 \cdot f_{ctm} = 0.7 \cdot 2.6 = 1.82 \text{ N/cm}^2$$

- karakteristična osna vlačna čvrstoća betona s 5%-tnom fraktilom

$$T_{Ed} = 15.75 \text{ kNm} < T_{Rd,c} = 46.38 \text{ kNm}$$

Presjek nije raspucan!

Primjer proračuna

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **kratkotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 32):

$$\theta_T = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{cm} \cdot I_T}$$

$$T_{Ed} = 15.75 \text{ kNm} \quad E_{cm} = 22000 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{cm}}{10}} = 31475 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{cm} = 0.42 \cdot E_{cm} = 0.42 \cdot 31475 = 13756 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 = 25 + 8 = 33 \text{ N/cm}^2 \quad \text{- srednja tlačna čvrstoća betona}$$

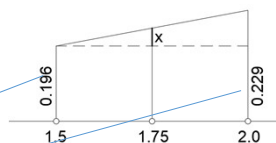
$$L = \frac{5.75}{2} = 2.875 \text{ m}$$

$$I_T = \eta \cdot h \cdot b^3$$

torzijski moment tromosti neraspucalog presjeka (slajd 36)

$$\frac{h}{b} = \frac{70}{40} = 1.75$$

linearna interpolacija:



$$(2.0 - 1.5) : (1.75 - 1.5) = (0.229 - 0.196) : x$$

$$x = 0.0165 \Rightarrow \eta = 0.2125$$

h/b	1.0	1.25	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	∞
η	0.142	0.172	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333
α	4.81	4.52	4.33	4.07	3.88	3.74	3.55	3.43	3.20	3.00

Uvijek manja stranica na ³

$$I_T = 0.2125 \cdot 70 \cdot 40^3 = 952000 \text{ cm}^4$$

Primjer proračuna

Proračun rotacije presjeka:

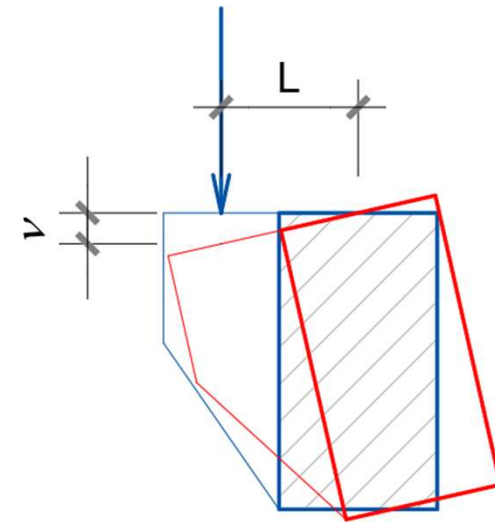
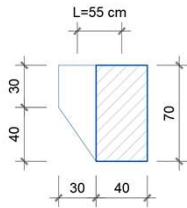
Rotacija poprečnog presjeka za kratkotrajno djelovanje, neraspucali presjek (slajd 32):

$$\theta_T = \frac{T_{Ed} \cdot L}{G_{cm} \cdot I_T} = \frac{1575 \cdot 287.5}{1375.6 \cdot 952000} = 3.45 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Paziti na mjerne jedinice! U ovom izrazu su sve vrijednosti uvrštene u kN i cm.

Zbog rotacije grede uzrokovane momentom torzije dolazi do progiba. Iako su ti progibi, u ovom slučaju, mali mogu uzrokovati neuporabljivost nosivog elementa. Npr. ako se radi o nosaču kranske staze, i milimetri progiba su važni. Obratiti pažnju da duljina L za proračun kuta rotacije i duljina L za proračun progiba nisu iste veličine!

$$v = L \cdot \theta_T = 55 \cdot 3.45 \cdot 10^{-4} = 0.018 \text{ cm}$$



Primjer proračuna

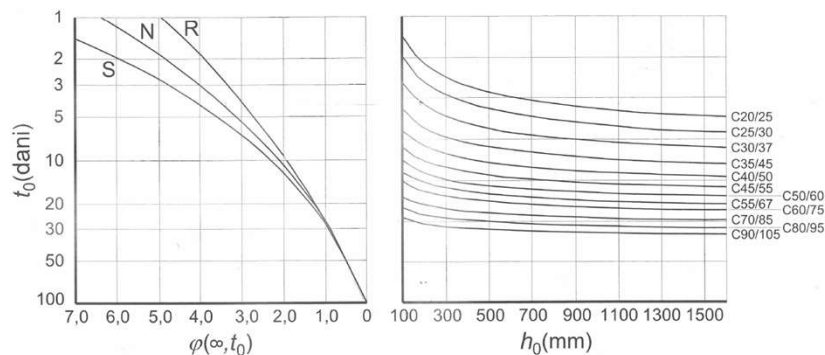
Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

$$\theta_T = \frac{T_{Ed,\infty} \cdot L}{G_{c,eff} \cdot I_T} \quad T_{Ed,\infty} = 12.39 \text{ kNm}$$

$$G_{c,eff} = 0.4 \cdot E_{c,eff} \quad E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Koeficijentom puzanja $\varphi(\infty, t_0)$ uzimaju se u obzir učinci djelovanja dugotrajnog opterećenja. Oznaka t_0 odnosi se na starost betona pri nanošenju opterećenja (u danima). Općenito, ovu veličinu propisuje projektant, a najčešće je $t_0 = 28$ dana. Koeficijent puzanja može se izračunati analitički ili primjenom dijagrama. (vidjeti sliku dolje). U ovisnosti o položaju elementa koji se proračunava, odabire se dijagram za unutarnje uvjete (relativna vlažnost RH = 50%) ili za vanjske uvjete (relativna vlažnost RH = 80%) – vidjeti BK1, stranica 84.



Za proračun je potrebno odrediti sljedeće parametre:

uvjeti okoliša: unutarnji uvjeti RH = 50%

vrsta cementa: N (CEM 32.5R i 42.5N – BK1, stranica 85)

starost betona: $t_0 = 28$ dana

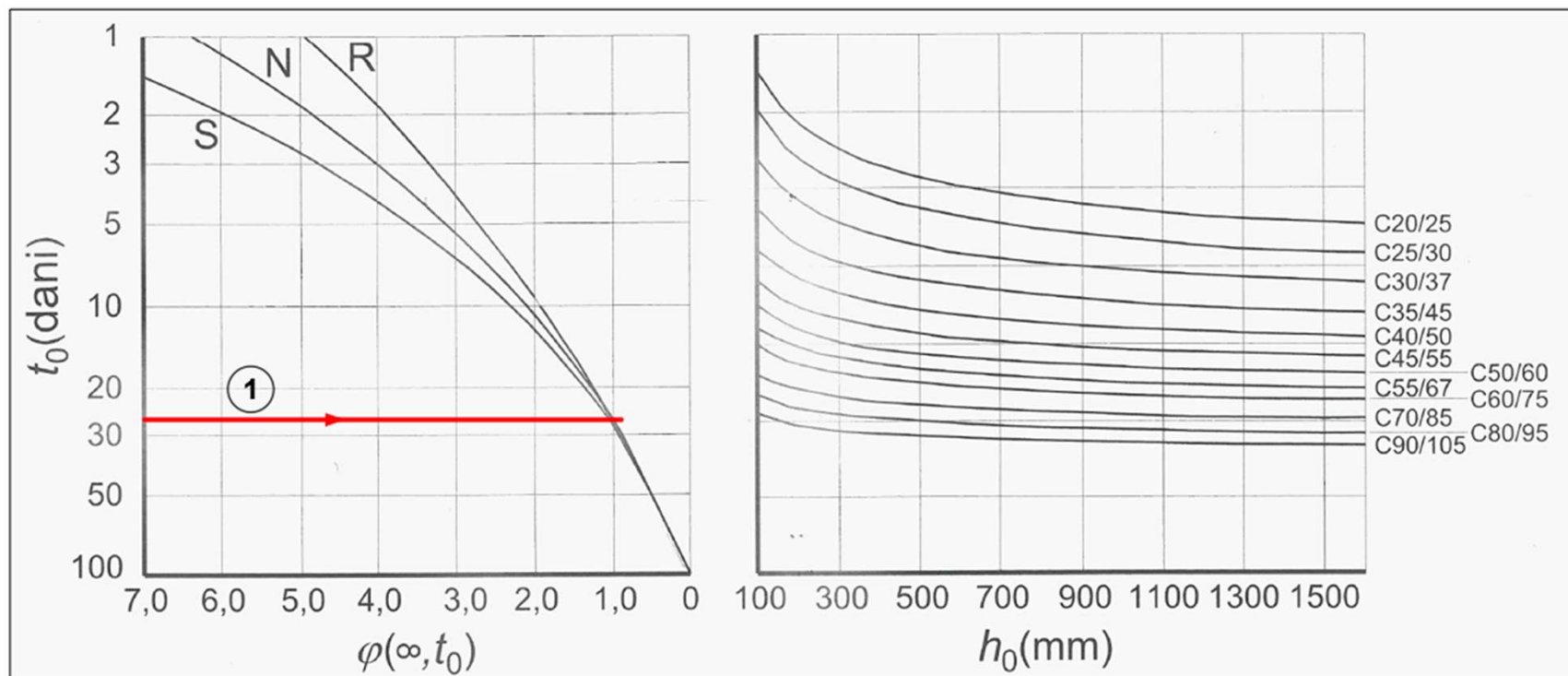
Primjer proračuna

RH = 50%

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

Određivanje $\varphi(\infty, t_0)$ C 25/30 $t_0 = 28$ dana $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 70}{2 \cdot 40 + 2 \cdot 70} = 25.45 \text{ cm}$



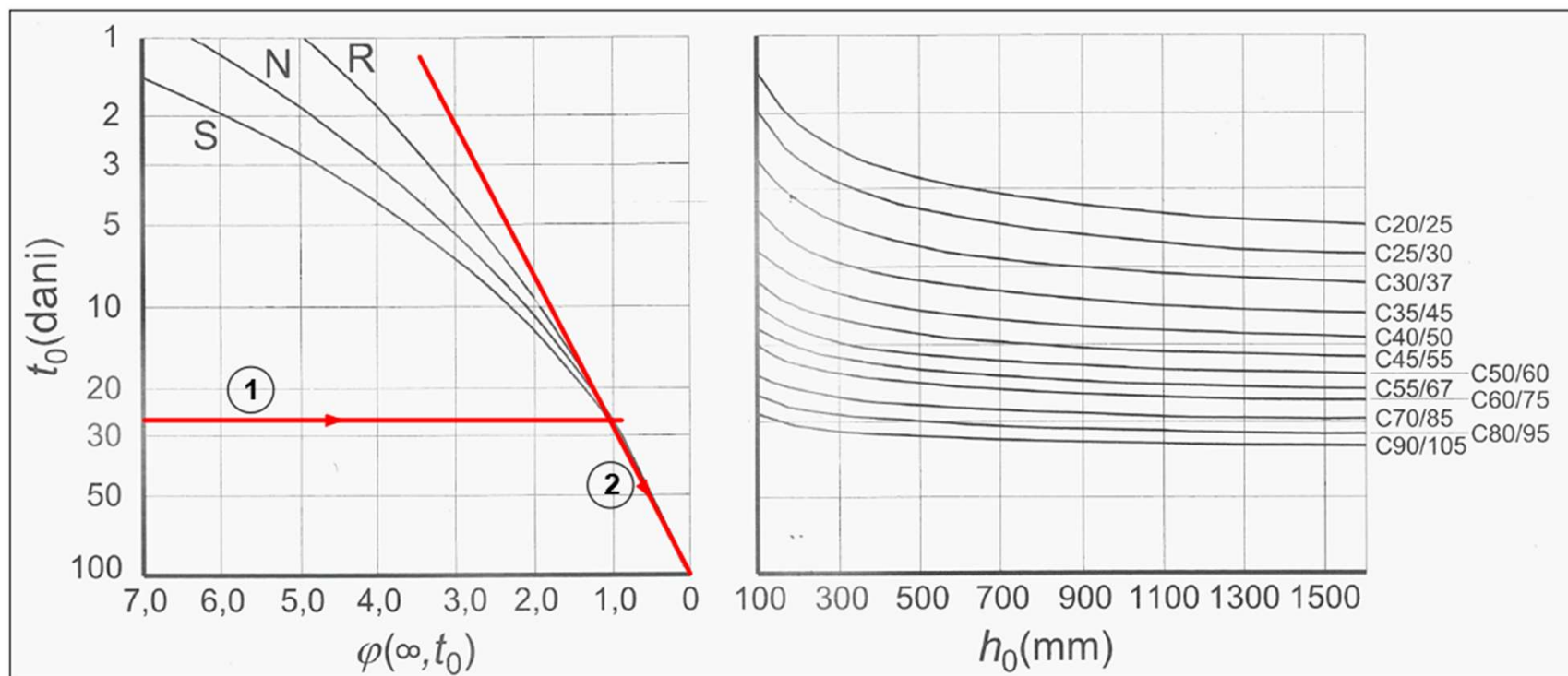
Primjer proračuna

RH = 50%

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

Određivanje $\varphi(\infty, t_0)$ C 25/30 $t_0 = 28$ dana $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 70}{2 \cdot 40 + 2 \cdot 70} = 25.45 \text{ cm}$



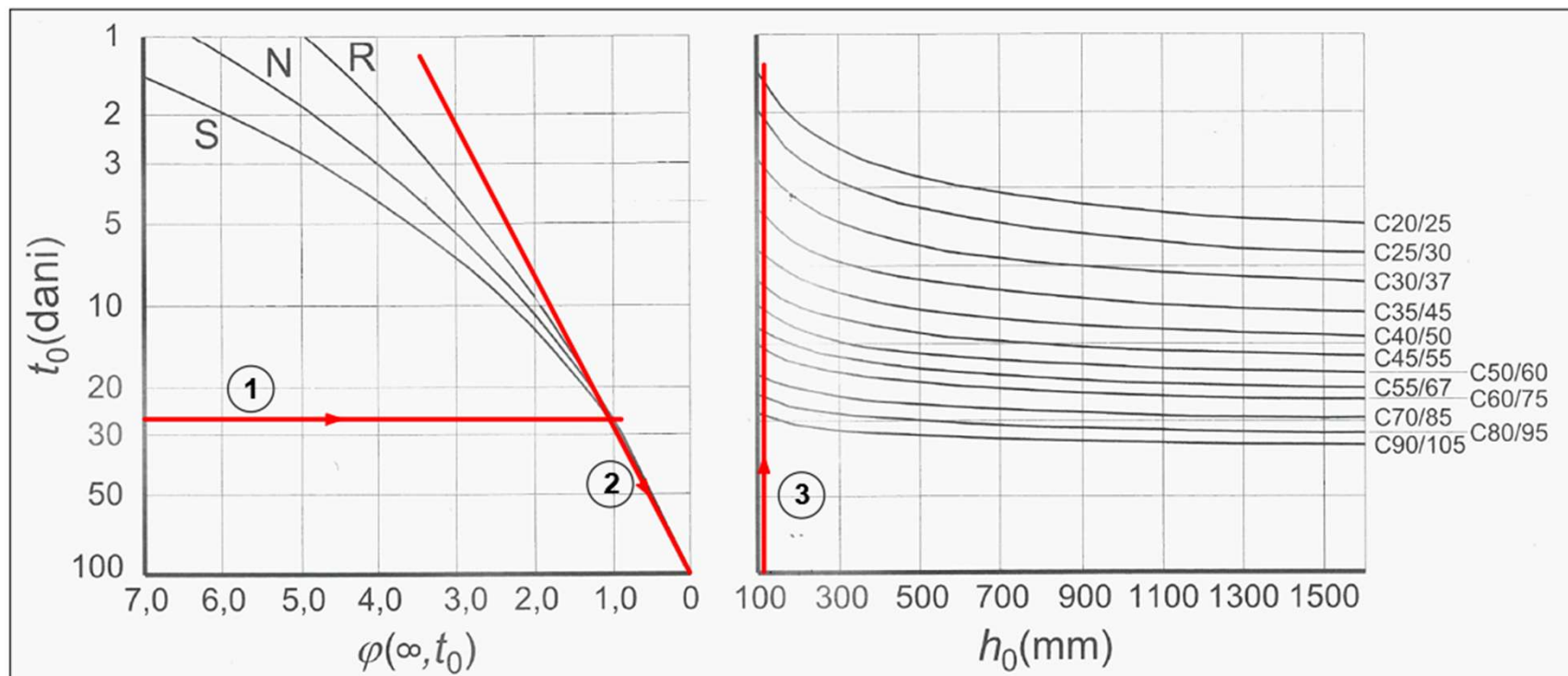
Primjer proračuna

RH = 50%

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

Određivanje $\varphi(\infty, t_0)$ C 25/30 $t_0 = 28$ dana $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 70}{2 \cdot 40 + 2 \cdot 70} = 25.45 \text{ cm}$



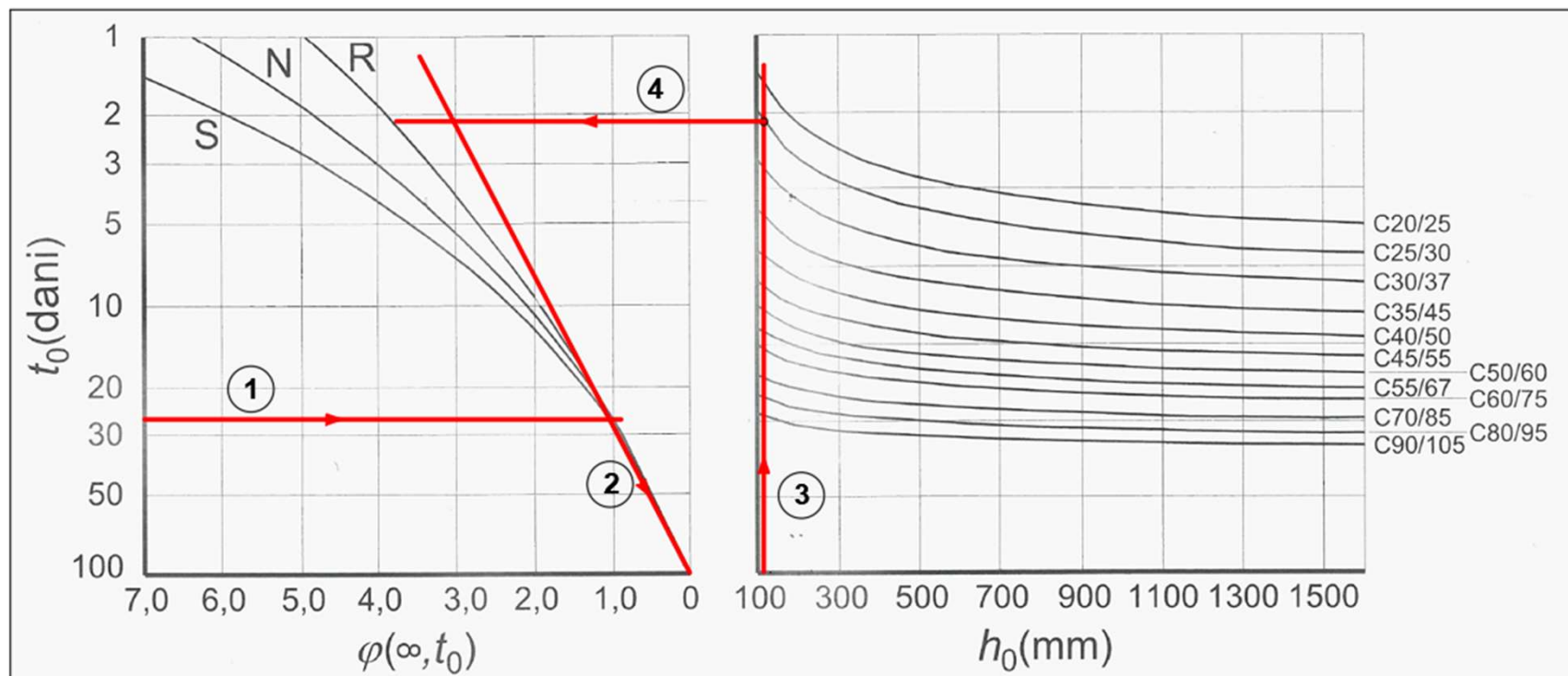
Primjer proračuna

RH = 50%

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

Određivanje $\varphi(\infty, t_0)$ C 25/30 $t_0 = 28$ dana $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 70}{2 \cdot 40 + 2 \cdot 70} = 25.45 \text{ cm}$



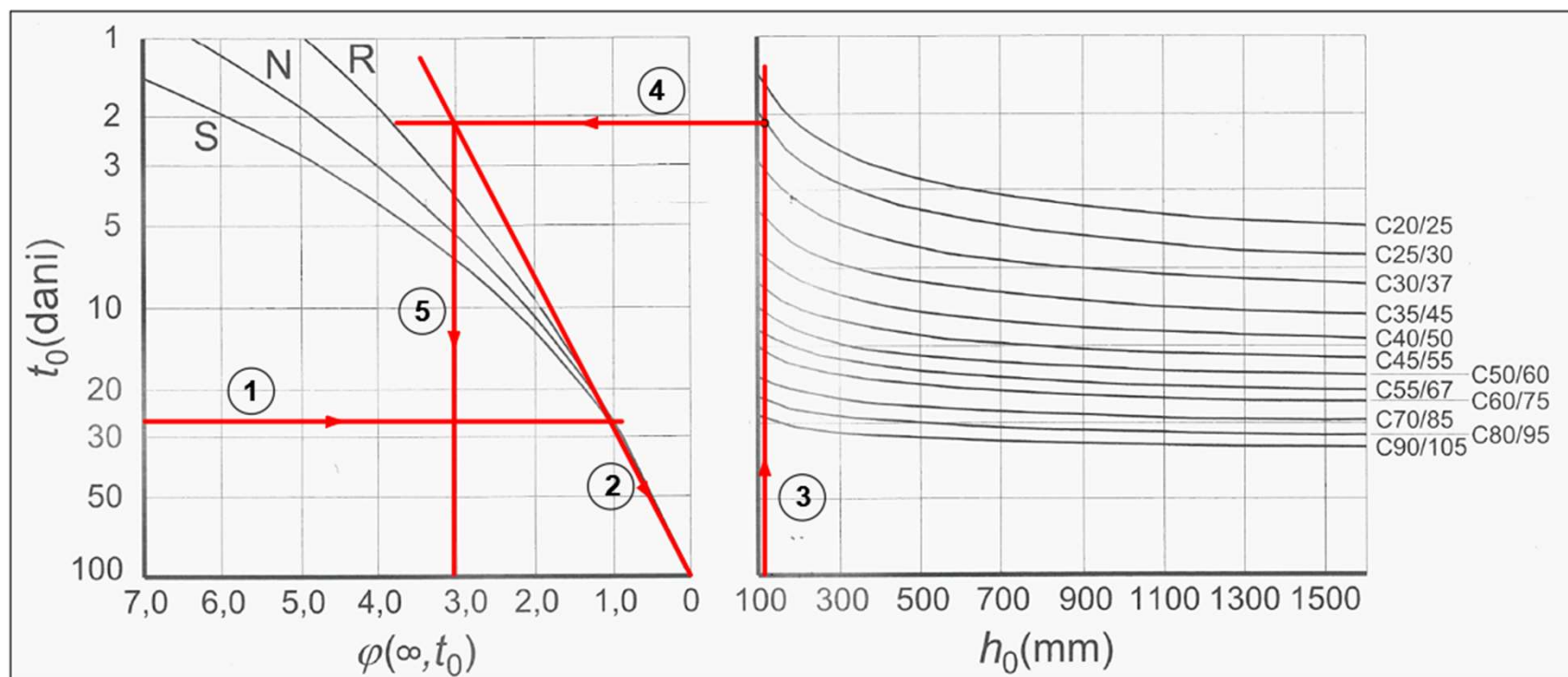
Primjer proračuna

RH = 50%

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

Određivanje $\varphi(\infty, t_0)$ C 25/30 $t_0 = 28$ dana $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 70}{2 \cdot 40 + 2 \cdot 70} = 25.45 \text{ cm}$



Primjer proračuna

Proračun rotacije presjeka:

Rotacija poprečnog presjeka za **dugotrajno djelovanje**, neraspucali presjek (slajd 34):

$$\theta_T = \frac{T_{Ed,\infty} \cdot L}{G_{c,eff} \cdot I_T}$$

$$T_{Ed,\infty} = 12.39 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} G_{c,eff} &= 0.4 \cdot E_{c,eff} \\ &= 0.4 \cdot 7968.35 \\ &= \mathbf{3187.34 \text{ kN/cm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{c,eff} &= \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)} \\ &= \frac{31475}{1 + 2.95} \\ &= \mathbf{7968.35 \text{ kN/cm}^2} \end{aligned}$$

$$\varphi(\infty, t_0) = 2.95$$

$$\theta_T = \frac{T_{Ed,\infty} \cdot L}{G_{c,eff} \cdot I_T} = \frac{1239 \cdot 287.5}{3187.34 \cdot 952000} = 1.17 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$v = L \cdot \theta_T = 55 \cdot 1.17 \cdot 10^{-4} = 0.006 \text{ cm}$$

