

KINEMATIKA TOČKE - Pravocrtno gibanje

PRIMJERI:

I. Točka se giba po pravcu, a njezin položaj definiran je jednačbom $x = 6t^2 - t^3$.
Odredite izraze za brzinu i ubrzanje te točke, te nacrtajte grafove: $x-t$, $v-t$ i $a-t$.

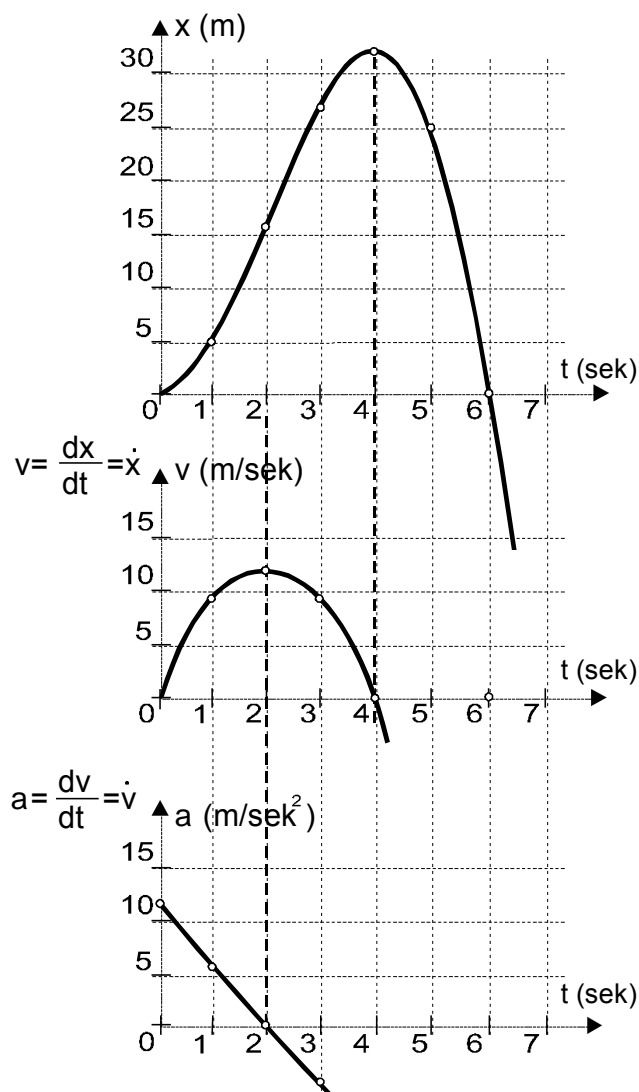
RJEŠENJE:

$$x = 6t^2 - t^3,$$

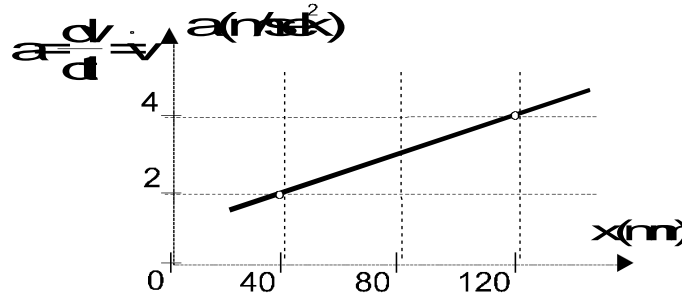
$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t.$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	5	16	27	32	25	0	-49
v	0	9	12	9	0	-15		
a	12	6	0	-6				



2. Točka se giba po pravcu duž pozitivne koordinatne osi. Ubrzanje linearno raste s pomakom, kao na crtežu 2.5. Ako brzina u položaju $x=40 \text{ mm}$ iznosi $v=0,8 \text{ m/sek}$, odredite brzinu u položaju $x=120 \text{ mm}$.



Crtež 2.5.

RJEŠENJE:

$$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dv}{dx} = a,$$

$$\frac{dx}{dt} = v, \Rightarrow v \cdot \frac{dv}{dx} = a \cdot dx, \Rightarrow v \cdot dv = a \cdot dx,$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \int_{x_1}^{x_2} a \cdot dx,$$

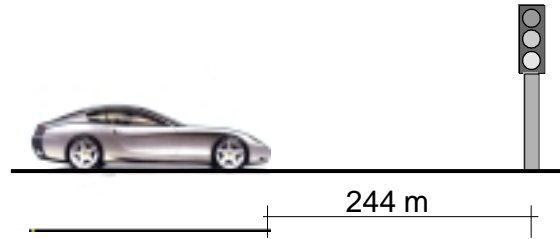
$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \Bigg|_{0,8}^{v_2} = \int_{x_1}^{x_2} a \cdot dx,$$

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{0,8^2}{2} = \frac{2 \cdot 0,08}{2} + 2 \cdot 0,08,$$

$$\frac{v_2^2}{2} - 0,32 = 0,24, \Rightarrow v_2 = 1,06 \text{ m/sek}.$$

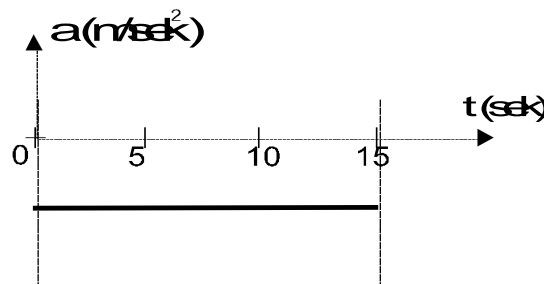
3. Automobil vozi po pravcu brzinom od 20 m/s te opazi 244 m ispred križanja da se na semaforu pali crveno svjetlo, crtež 2.6. Vrijeme do zelenog svjetla traje 15 sekundi, a vozač automobila želi proći kroz križanje bez zaustavljanja i voziti jednoliko usporeno. Potrebno je odrediti:

- potrebno usporenje automobila,
- brzinu automobila u trenutku ulaska u križanje.



Crtež 2.6.

RJEŠENJE:

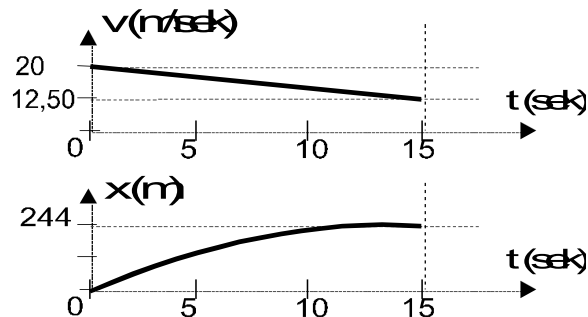


$$a = \text{const.}, \quad v = 20 - a \cdot t, \quad s = \int_0^{15} v \cdot dt,$$

$$244 = \int_0^{15} (20 - a \cdot t) dt,$$

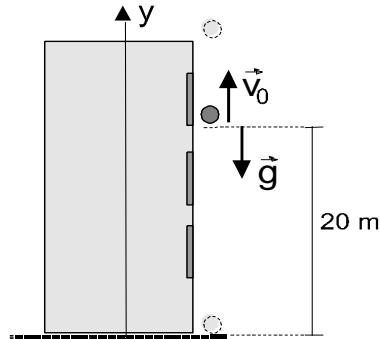
$$244 = \left(20t - \frac{a \cdot t^2}{2} \right)_0^{15} = 20 \cdot 15 - \frac{a \cdot 225}{2}, \Rightarrow a = 0,50 \text{ m/s}^2,$$

$$v = 20 - 0,50 \cdot 15 = 12,50 \text{ m/s}.$$



4. Kuglica mase m izbačena je brzinom 10 m/s vertikalno prema gore, s prozora visine 20 m iznad tla, crtež 2.7. Uz stalno ubrzanje kuglice $g=9,81 \text{ m/s}^2$, odredite:

- izraze za brzinu i položaj u nekom trenutku t ,
- najveću visinu koju će dosegnuti kuglica,
- vrijeme za koje će kuglica pasti na tlo, te njezinu brzinu u tom trenutku.



Crtež 2.7.

RJEŠENJE:

a)

$$a = g = \text{const.},$$

$$v = \int a \cdot dt + C_v = \int -9,81 \cdot dt + C_v,$$

$$\text{za } t = 0, \Rightarrow v = 10 \text{ m/s},$$

$$v = -9,81 \cdot t + 10,$$

$$y = \int v \cdot dt + C_y = \int (-9,81 \cdot t + 10) \cdot dt + C_y,$$

$$\text{za } t = 0, \Rightarrow y = 20 \text{ m},$$

$$y = -4,905 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 20,$$

b)

$$\text{za } v = 0, \Rightarrow t = \frac{10}{9,81} = 1,02 \text{ s}, \Rightarrow y_{\text{max}} = 25,1 \text{ m},$$

c)

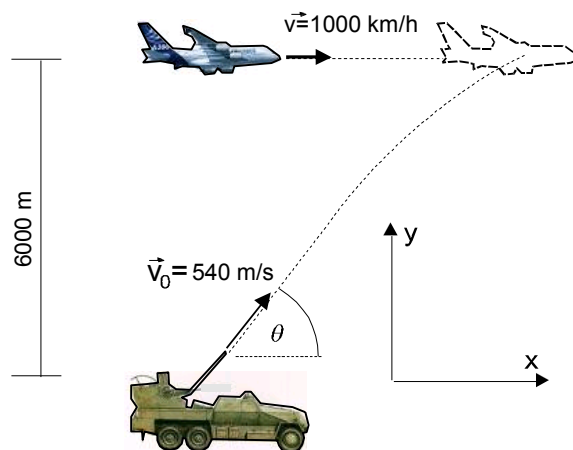
$$\text{za } y = 0, \Rightarrow 0 = -4,905 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 20, \Rightarrow t = 3,28 \text{ s},$$

$$v = -9,81 \cdot 3,28 + 10 = -22,18 \text{ m/s}.$$

KINEMATIKA TOČKE - Krivocrtno gibanje

PRIMJER:

1. Izračunajte kut pod kojim je potrebno ispaliti projektil kako bi pogodio avion koji leti na 6000 m brzinom od 1000 km/h. Projektil pri izbacivanju ima brzinu od 540 m/sek, a ispaljen je u trenutku kada se avion nalazi vertikalno iznad topa, crtež 2.9. Koje je vrijeme potrebno da projektil pogodi avion?



Crtež 2.9.

RJEŠENJE:

$$\text{projektil: } v_y = 540 \cdot \sin \theta - 9,81 \cdot t, \quad s_y^{pr} = \int v_y \cdot dt, \Rightarrow 6000 = 540 \cdot t \cdot \sin \theta - 9,81 \cdot \frac{t^2}{2},$$

$$540 \cdot t \cdot \sin \theta - 4,905 \cdot t^2 - 6000 = 0,$$

$$v_x = \text{const.} = 540 \cdot \cos \theta, \quad s_x^{pr} = 540 \cdot \cos \theta \cdot t,$$

$$\text{avion: } v_x = 1000 \text{ km/h} = 277,78 \text{ m/s}, \quad s_x^{av} = 277,78 \cdot t,$$

$$s_x^{pr} = s_x^{av}, \Rightarrow 540 \cdot \cos \theta \cdot t = 277,78 \cdot t, \Rightarrow 540 \cdot \cos \theta - 277,78 = 0, \Rightarrow \theta = 59^\circ,$$

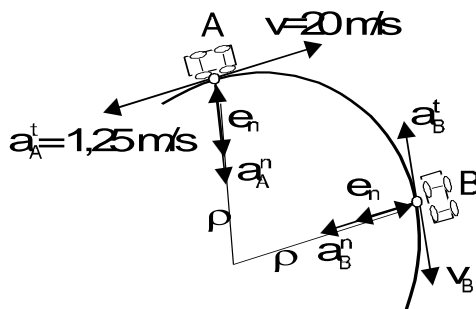
$$4,905 \cdot t^2 - 462,87 \cdot t + 6000 = 0, \Rightarrow t_1 = 15,53 \text{ sek}, \quad t_2 = 78,83 \text{ sek}.$$

KINEMATIKA TOČKE - Prirodni koordinatni sustav ($n-t$)

PRIMJER:

I. Automobil vozi po cesti polumjera zakrivljenosti 350 m, brzinom 20 m/s, crtež 2.12. U jednom trenutku počne kočiti usporenjem 1,25 m/s². Odredite iznos ukupnog ubrzanja automobila i to:

- u trenutku kada počne kočiti,
- 4 sekunde kasnije.



Crtež 2.12.

RJEŠENJE:

položaj A : $a_A^t = 1,25 \text{ m/s}^2$,

$$a_A^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{20^2}{350} = 1,14 \text{ m/s}^2,$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = \sqrt{1,14^2 + 1,25^2} = 1,69 \text{ m/s}^2,$$

položaj B : $a_B^t = 1,25 \text{ m/s}^2$,

$$v_B = v_A - a_B^t \cdot t = 20 - 1,25 \cdot 4 = 15 \text{ m/s},$$

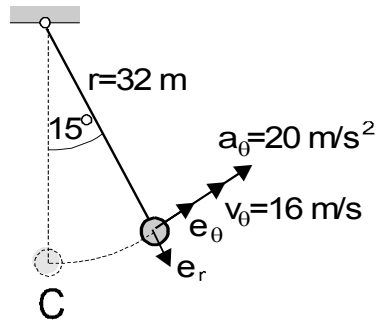
$$a_B^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{15^2}{350} = 0,643 \text{ m/s}^2,$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^t)^2} = \sqrt{0,643^2 + 1,25^2} = 1,41 \text{ m/s}^2.$$

KINEMATIKA TOČKE - Polarni koordinatni sustav (r - φ)

PRIMJER:

1. Njihalo se giba udesno te usporava, crtež 2.14. U položaju kada je $\theta=15^\circ$, ima brzinu 16 m/s i ubrzanje 20 m/s. Odredite:



Crtež 2.14.

RJEŠENJE:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \Rightarrow v = r \cdot \dot{\theta}, \Rightarrow 16 = 32 \cdot \dot{\theta}, \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{16}{32} = 0,5 \text{ rad/s},$$

$$a = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta, \Rightarrow a = -32 \cdot 0,5^2\vec{e}_r + 32 \cdot \ddot{\theta}\vec{e}_\theta,$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}, \Rightarrow 20 = \sqrt{8^2 + 32^2 + \ddot{\theta}^2}, \Rightarrow 400 = 64 + 1024 + \ddot{\theta}^2,$$

$$\ddot{\theta} = 0,573 \text{ rad/s}^2.$$