

## DINAMIKA – DINAMIKA MATERIJALNE TOČKE

### PRIMJERI:

#### Jednadžba gibanja

1. Tijelo mase  $2 \text{ kg}$  giba se po pravcu. Gibanje je zadano jednadžbom  $s=49,05t^2$ , gdje je  $t$  u sekundama, a  $s$  u centimetrima. Odredite silu koja djeluje na to tijelo kao funkciju vremena.

RJEŠENJE:

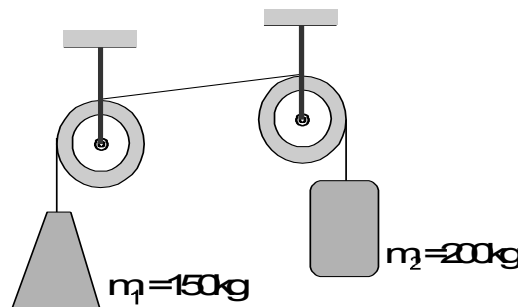
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \Rightarrow \sum F_x = 2 \cdot a_x,$$

$$s = 49,05t^2, \Rightarrow v = 98,10t, \Rightarrow a = 98,10 \text{ cm/s}^2,$$

$$\sum F_x = 2 \cdot a_x = R, \Rightarrow R = 2 \cdot 98,10 = 196,20 \text{ kg cm/s}^2,$$

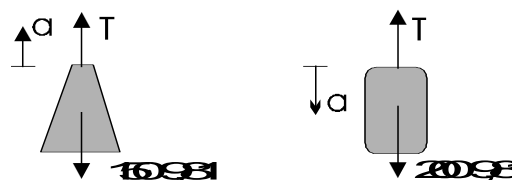
$$R = 1,962 \text{ kg m/s}^2 = 1,962 \text{ N}.$$

2. Dva utega povezana su užetom preko dvije koloture kao na crtežu 5.1. Ako se zanemari trenje užeta, za pretpostaviti je kako će se gibati ovaj sustav. Odredite ubrzanje  $a$  ovih dviju masa te silu u užetu.



Crtež 5.1.

RJEŠENJE:



$$\text{za } m_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \Rightarrow T - 150 \cdot 9,81 = 150 \cdot a,$$

$$\text{za } m_2 \Rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \Rightarrow T - 200 \cdot 9,81 = -200 \cdot a,$$

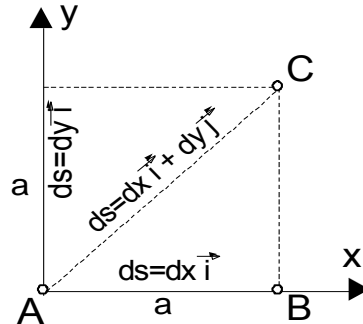
$$a = 0,0067T - 9,81,$$

$$a = -0,005T + 9,81,$$

$$a = 1,4 \text{ m/s}^2, \quad T = 1681,5 \text{ N} = 1,68 \text{ kN}.$$

## Rad sile

I. Sila je zadana vektorski u obliku  $\vec{F} = (y + 2)\vec{i} + (2x - 2)\vec{j}$  [N] i djeluje na točku  $P$  koja se giba u ravnini, crtež 2.9. Odredite rad sile  $F$  od točke  $A$  do točke  $C$ , ako se točka giba: a) putem  $ABC$ , b) putem  $AC$ .



RJEŠENJE:

$$a) U_{A-B-C} = U_{A-B} + U_{B-C},$$

$$U_{A-B}^{(y=0)} = \int \vec{F} d\vec{x} = \int [(y + 2)\vec{i} + (2x - 2)\vec{j}] d\vec{x} \vec{i}$$

$$U_{A-B}^{(y=0)} = \int_A^B (y + 2) dx = \int_A^B (0 + 2) dx = \int_0^a 2 dx = 2x \Big|_0^a = 2a,$$

$$U_{B-C}^{(x=a)} = \int \vec{F} d\vec{y} = \int [(y + 2)\vec{i} + (2x - 2)\vec{j}] d\vec{y} \vec{j},$$

$$U_{B-C}^{(x=a)} = \int_B^C (2x - 2) dy = \int_B^C (2a - 2) dy = 2ay \Big|_0^a - 2y \Big|_0^a = 2a^2 - 2a,$$

$$U_{A-B-C} = 2a + 2a^2 - 2a = 2a^2,$$

$$b) U_{A-C} = \int \vec{F} d\vec{s},$$

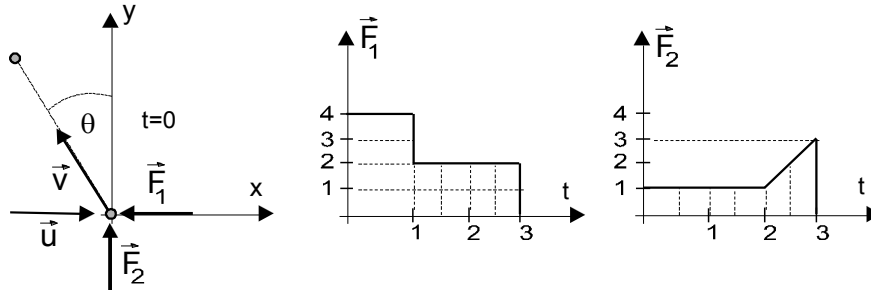
$$U_{A-C}^{(x=y)} = \int [(y + 2)\vec{i} + (2x - 2)\vec{j}] (dx \vec{i} + dy \vec{j}) = \int_A^C (y + 2) dx + \int_A^C (2x - 2) dy,$$

$$U_{A-C}^{(x=y)} = \int_A^C (x + 2) dx + \int_A^C (2y - 2) dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + 2x \Big|_0^a + 2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^a - 2y \Big|_0^a,$$

$$U_{A-C} = 3 \frac{a^2}{2}.$$

### Promjena količine gibanja i impuls

1. Kuglica mase  $m=0,5 \text{ kg}$  ima brzinu  $u=10 \text{ m/s}$  u smjeru osi  $x$ , mjereno u trenutku  $t=0$ . Na nju počnu djelovati sile  $F_1$  i  $F_2$ , a njihove vrijednosti mijenjaju se prema prikazanim dijagramima, dok im je smjer konstantan, crtež 5.3. Odredite brzinu te kuglice nakon 3 sekunde.



RJEŠENJE:

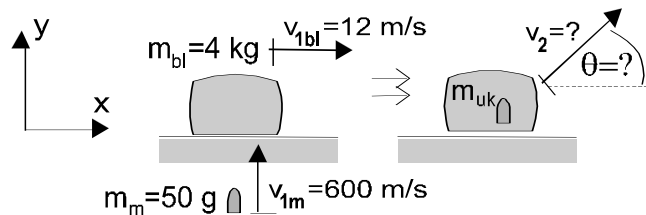
$$\int_{t=0}^{t=3} \sum \vec{F} dt = \int_{t=0}^{t=3} \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) dt = m \cdot v_{t=3} - m \cdot v_{t=0},$$

$$- \int_{t=0}^{t=3} \vec{F}_1 dt = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = m \cdot v_x^{t=3} - m \cdot v_x^{t=0} \Rightarrow -8 = 0,5 \cdot v_x^{t=3} - 0,5 \cdot 10, \Rightarrow v_x^{t=3} = -6 \text{ m/s},$$

$$\int_{t=0}^{t=3} \vec{F}_2 dt = 1 \cdot 3 + \frac{1 \cdot 2}{2} = m \cdot v_y^{t=3} - m \cdot v_y^{t=0} \Rightarrow 4 = 0,5 \cdot v_y^{t=3} - 0,5 \cdot 0, \Rightarrow v_y^{t=3} = 8 \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_{t=3s} = -6\vec{i} + 8\vec{j}, \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{6}{8} \Rightarrow \theta = 36,87^\circ.$$

2. Blok mase  $4 \text{ kg}$  kliže po horizontalnoj plohi brzinom  $12 \text{ m/s}$ , crtež 2.11. U tom trenutku u njega se zabije metak mase  $50 \text{ g}$  brzinom  $600 \text{ m/s}$ , kao na crtežu 5.4. Odredite brzinu i smjer gibanja bloka nakon sudara.



RJEŠENJE:

$$\sum Y \Rightarrow \int_{t=0}^{t=3} \sum \vec{F}_y dt = \int_{t=0}^{t=3} \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}_y) dt = m_{uk} \cdot v_2^y - (m_m \cdot v_{1m}^y + m_{bl} \cdot v_{1bl}^y),$$

$$0 = 4,05 \cdot v_2^y - (0,05 \cdot 600 + 4 \cdot 0), \Rightarrow v_2^y = 7,41 \text{ m/s},$$

$$\sum X \Rightarrow \int_{t=0}^{t=3} \sum \vec{F}_x dt = \int_{t=0}^{t=3} \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}_x) dt = m_{uk} \cdot v_2^x - (m_m \cdot v_{1m}^x + m_{bl} \cdot v_{1bl}^x),$$

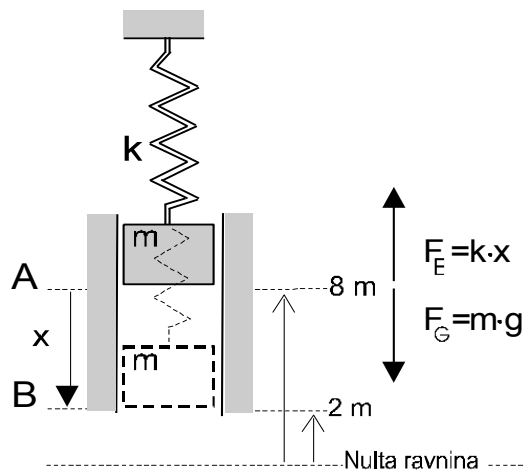
$$0 = 4,05 \cdot v_2^x - (0,05 \cdot 0 + 4 \cdot 12), \Rightarrow v_2^x = 11,85 \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_{t=3s} = 11,85\vec{i} + 7,41\vec{j}, \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{7,41}{11,85} \Rightarrow \theta = 32,02^\circ.$$

### Potencijalna energija – rad kao razlika potencijala

I. Odredite rad svih sila na sustavu koji je sastavljen od bloka mase  $m=15\text{ kg}$  i opruge krutosti  $k=100\text{ N/m}$ , na pomaku iz točke A do točke B, crtež 5.5., kao:

- rad u funkciji prijeđenog puta,
- rad u funkciji razlike potencijala.



Crtež 5.5.

RJEŠENJE:

$$a) \quad U_{A-B} = U_G + U_E = \int m g dx - \int k x dx$$

$$U_{A-B} = m \cdot g \cdot x - \frac{k \cdot x^2}{2},$$

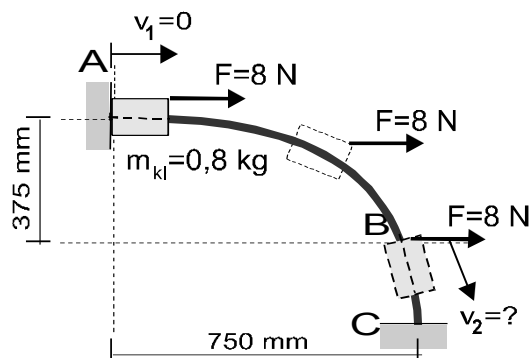
$$U_{A-B} = 15 \cdot 9,81 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{2} = 702,9 \text{ J},$$

$$b) \quad U_{A-B} = U_G + U_E = (V_A^G - V_B^G) + (V_A^E - V_B^E),$$

$$U_{A-B} = (15 \cdot 9,81 \cdot 8 - 15 \cdot 9,81 \cdot 2) + \left( \frac{10 \cdot 0^2}{2} - \frac{10 \cdot 6^2}{2} \right) = 702,9 \text{ J}.$$

### Kinetička energija – rad kao razlika kinetičkih energija

I. Klizač mase  $0,8\text{ kg}$  kliže po glatkoj vodilici u vertikalnoj ravnini, crtež 5.6. Ako klizač krene iz stanja mirovanja iz položaja A, pod djelovanjem konstantne sile  $F=8\text{ N}$ , odredite brzinu klizača u položaju B.



RJEŠENJE:

$$U_{A-B} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2},$$

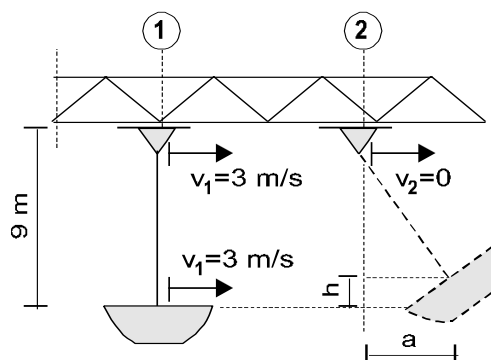
$$U_{A-B} = U_G + U_F = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2},$$

$$0,8 \cdot 9,81 \cdot 0,375 + 8 \cdot 0,75 = \frac{0,8 \cdot v_2^2}{2} - \frac{0,8 \cdot 0^2}{2},$$

$$v_2 = 4,73 \text{ m/s}.$$

### Zakon održanja mehaničke energije - opće načelo rada i energije

1. Vodilica kрана giba se brzinom  $3 \text{ m/s}$ . Na kraju užeta duljine  $9 \text{ m}$  visi posuda mase  $m$ , crtež 5.7. Ako se u jednom trenutku vodilica zaustavi, odredite najveći otklon posude u horizontalnom smjeru.



RJEŠENJE:

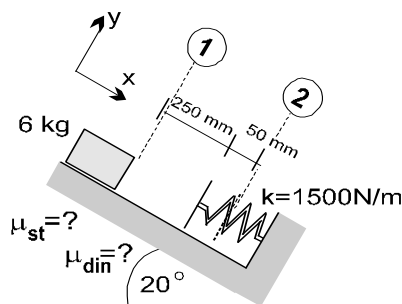
$$E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2},$$

$$\frac{m \cdot 3^2}{2} + 0 = 0 + m \cdot g \cdot h, \Rightarrow h = 0,459 \text{ m},$$

$$9^2 = a^2 + (9 - h)^2, \Rightarrow a^2 = 9^2 - (9 - 0,459)^2,$$

$$a = 2,84 \text{ m}.$$

2. Blok mase  $6 \text{ kg}$  počne klizati prema opruzi niz kosinu, crtež 5.8. Ako je najveće skraćenje opruge  $50 \text{ mm}$ , odredite vrijednosti koeficijenta statičkog i dinamičkog trenja između bloka i podloge.



*RJEŠENJE:*

$$\mu_{st} = ?$$

$$\sum F_y = 0, \Rightarrow -6 \cdot 9,81 \cdot \cos 20^\circ + N = 0, \Rightarrow N = 55,31 N,$$

$$\sum F_x = 0, \Rightarrow 6 \cdot 9,81 \cdot \sin 20^\circ - T_{st} = 0, \Rightarrow T_{st} = 20,13 N,$$

$$T_{st} = \mu_{st} \cdot N, \Rightarrow \mu_{st} = 0,364,$$

$$\mu_{din} = ?$$

$$E_{K1} + E_{P1} + W_{1-2} = E_{K2} + E_{P2},$$

$$0 + 6 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot \sin 20^\circ - T_{din} \cdot 0,3 = 0 + \frac{1500 \cdot 0,05^2}{2}, \Rightarrow T_{din} = 13,88 N,$$

$$T_{din} = \mu_{din} \cdot N, = \mu_{din} \cdot 55,31, \Rightarrow \mu_{din} = 0,251.$$