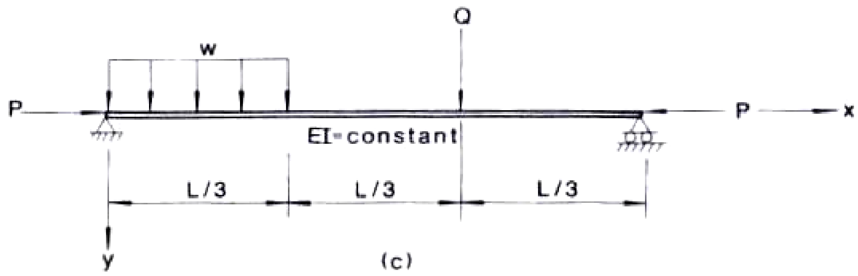
1. Izvedite izraz za izračun progiba u sredini raspona tlačno i vertikalno opterećene grede na slici principom superpozicije. Izračunajte progib u sredini za zadana geometrijska i fizikalno-mehanička svojstva grede.



E	=	210,00 kN/mm^2
I	=	5055,14·10^3 mm^4
P	=	100,00 kN
Q	=	20,00 kN
w	=	5,00 kN/m'
L	=	3,00 m

Jednadžba elastične progibne linije grede opterećene koncentriranom silom, za presjeke lijevo od sile (z=L/3):

$$y_1(x)=\frac{Q\sin\alpha z}{P\alpha\sin\alpha L}\sin\alpha x-\frac{Qzx}{PL}=\frac{Q\sin\alpha L/3}{P\alpha\sin\alpha L}\sin\alpha x-\frac{QL/3}{PL}x=\frac{Q\sin\alpha L/3}{P\alpha\sin\alpha L}\sin\alpha x-\frac{Qx}{3P}$$

Jednadžba elastične progibne linije grede dijelom opterećene kontinuiranim opterećenjem, za presjeka desno od sile (a=2L/3, b=L):

$$y_2(x)=\frac{w\sin\alpha(L-x)}{P\alpha^2\sin\alpha L}\left[\cos\alpha(L-a)-\cos\alpha(L-b)\right]-\frac{w(L-x)}{2PL}\left[2L(b-a)-\left(b^2-a^2\right)\right]=$$

$$=\frac{w\sin\alpha(L-x)}{P\alpha^2\sin\alpha L}\left[\cos\alpha L/3-1\right]-\frac{w(L-x)}{2PL}\left[2L\frac{L}{3}-L^2+\frac{4L^2}{9}\right]=$$

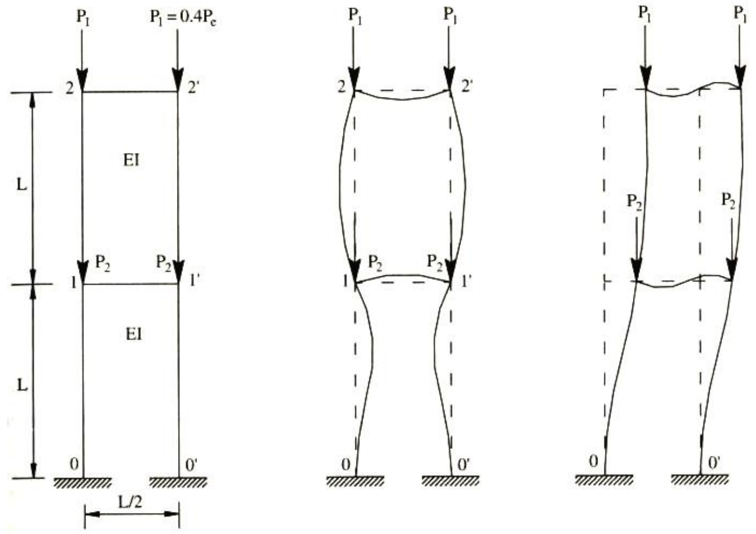
$$=\frac{w\sin\alpha(L-x)}{P\alpha^2\sin\alpha L}\left[\cos\alpha L/3-1\right]-\frac{w(L-x)L}{18P}$$

Progib u sredini raspona:

$$y(L/2)=y_1(L/2)+y_2(L/2)=\frac{Q\sin\alpha L/3}{P\alpha\sin\alpha L}\sin\alpha L/2-\frac{QL}{6P}+\frac{w\sin\alpha L/2}{P\alpha^2\sin\alpha L}\left(\cos\alpha L/3-1\right)-\frac{wL^2}{36P}=-16{,}47mm$$

Dakle, odgovor je ***16,47mm*** (kod izvoda gore navedenih izraza, os y je bila usmjerena prema gore).

2. Dvokatni okvir jednog raspona (prikazan na slici) izložen je djelovanjima sile $\boldsymbol{P_1}$ na vrhu te sile $\boldsymbol{P_2}$ na nivou grede prizemlja. Ako je zadana veličina sile $\boldsymbol{P_1}$ jednaka $\boldsymbol{0{,}4\ P_e}$, procijenite veličinu sile $\boldsymbol{P_2}$ pri kojoj će doći do izvijanja okvira (pretpostavite podjednake krutosti svih štapova okvira, ***EI***).



Okvir je idealno simetričan s obzirom na njegovu geometriju i opterećenje. Stoga, oblik izvijanja može biti simetričan odnosno antisimetričan, kako je to i prikazano na slikama.

<u>Slučaj I:</u> ***simetrični oblik izvijanja (bez horizontalnog pomaka greda)***

Momenti na krajevima
- stupova

$$M_{10} = r_{10}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1; \qquad M_{12} = r_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1 + rc_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2; \qquad M_{21} = r_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2 + rc_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1;$$

- greda

$$M_{11'} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_1; \qquad M_{22'} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_2.$$

Ravnoteža momenata u čvorovima 1 i 2:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L}\right)\begin{bmatrix} (r_{10}+r_{12}+4) & (rc)_{12} \\ (rc)_{12} & (r_{12}+4) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Za slučaj elastične neastabilnosti vrijedi:

$$\left|\hat{K}\right| = (r_{10}+r_{12}+4)(r_{12}+4) - \left[(rc)_{12}\right]^2 = 0.$$

Vrijednosti omjera ρ stupova proporcionalne su pripadajućim uzdužnim silama, tj. za stup

1-2: $\rho_{12} = \dfrac{P_1}{P_e} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad r_{12} = 3{,}4439, \ \ (rc)^2 = 4{,}6211$ *(očitano iz tablica)*

1-0: $\rho_{10} = \dfrac{P_1 + P_2}{P_e} = 0{,}4 + \rho \quad$ gdje je $\quad \rho = \mathrm{P}_2/\mathrm{P}_e$.

Karakteristična je jednadžba dakle oblika

$$(r_{10} + 3{,}4439 + 4)(3{,}4439 + 4) - 6{,}2111 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -6{,}6095$$

Interpolacijom se iz tablice koeficijenata dobije da je $\rho_{10} = 3{,}1527$.

Tada je $\rho = 3{,}1527 - 0{,}40 = 2{,}7527 = P_2 / P_e$ → $\mathbf{P_2 = 2{,}7527\ P_e = 27{,}168\ EI / L^2}$**.**

<u>Slučaj II:</u> ***antisimetrični oblik izvijanja (s horizontalnim pomakom greda)***

Momenti na krajevima
- stupova

$$M_{10} = t_{10}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1; \quad M_{12} = t_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1 - t'_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2; \quad M_{21} = t_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2 - t'_{12}\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1;$$

- greda

$$M_{11'} = \left(\frac{12EI}{L}\right)\theta_1; \quad M_{22'} = \left(\frac{12EI}{L}\right)\theta_2.$$

Ravnoteža momenata u čvorovima 1 i 2:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L}\right)\begin{bmatrix} (t_{10}+t_{12}+12) & t'_{12} \\ t'_{12} & (t_{12}+12) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Za slučaj elastične neastabilnosti vrijedi:

$$\left|\hat{K}\right| = (t_{10}+t_{12}+12)(t_{12}+12) - (t'_{12})^2 = 0.$$

Vrijednosti omjera ρ stupova proporcionalne su pripadajućim uzdužnim silama, tj. za stup

1-2: $\rho_{12} = \frac{P_1}{P_e} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad t_{12} = -0{,}8781, \;\; t'_{12} = -2{,}1723$ *(očitano iz tablica)*

1-0: $\rho_{10} = \frac{P_1 + P_2}{P_e} = 0{,}4 + \rho$ gdje je $\rho = \mathrm{P}_2/\mathrm{P}_e$.

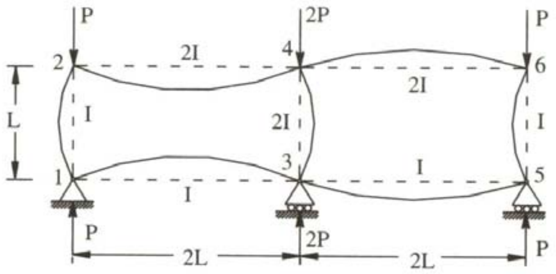
Karakteristična je jednadžba dakle oblika

$$(t_{10} - 0{,}8781 + 12)(-0{,}8781 + 12) - (-2{,}1723)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{10} = -10{,}6976$$

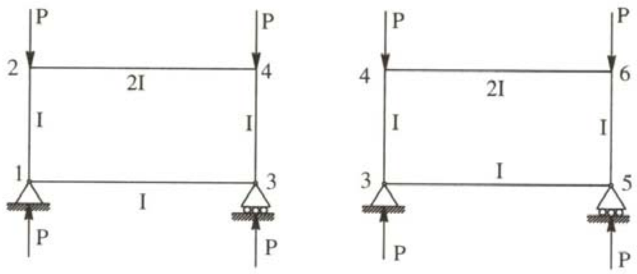
Interpolacijom se iz tablice koeficijenata dobije da je $\rho_{10} = 0{,}8394$.

Tada je $\rho = 0{,}8394 - 0{,}40 = 0{,}4394 = P_2 / P_e$ → **$P_2 = 0{,}4394\, P_e = 4{,}337\, EI / L^2$.**

3. Vertikalni štapovi (stupovi) višerasponske zatvorene okvirne konstrukcije izloženi su djelovanju tlačnih sila kao što je to prikazano na slici. Odredite veličinu kritičnog opterećenja pri kojem može doći do izvijanja okvira.



(a)



(b)

Zadani okvir ima sedam stupnjeva slobode (šest rotacija i jedan horizontalni pomak) što znači da njegovo rješenje uključuje rad s determinantom 7 x 7. Međutim, kako se zadani okvir može rastaviti na dva jednopoljna okvira, broj nepoznanica je manji.

<u>Slučaj I:</u> ***simetrični oblik izvijanja (bez horizontalnog pomaka greda)***

Momenti na krajevima

- stupova

$$M_{12} = r\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1 + rc\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2; \qquad M_{21} = r\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2 + rc\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1;$$

- greda

$$M_{13} = \left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1; \qquad M_{24} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_2.$$

Ravnoteža momenata u čvorovima 1 i 2:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L}\right)\begin{bmatrix} (r+1) & (rc) \\ (rc) & (r+2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Za slučaj elastične neastabilnosti vrijedi:

$$\left|\hat{K}\right| = (r+1)(r+2) - (rc)^2 = 0.$$

Interpolacijom se iz tablice koeficijenata dobije da je $\rho = 1{,}512$.

$$P_{cr} = \frac{1{,}512\pi^2 EI}{L^2} = \frac{14{,}92EI}{L^2}$$

Slučaj II: ***antisimetrični oblik izvijanja (s horizontalnim pomakom greda)***

Momenti na krajevima

- stupova

$$M_{12} = t\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1 - t'\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2; \qquad M_{21} = t\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_2 - t'\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_1;$$

- greda

$$M_{13} = \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta_1; \qquad M_{24} = \left(\frac{6EI}{L}\right)\theta_2.$$

Ravnoteža momenata u čvorovima 1 i 2:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L}\right)\begin{bmatrix} (t+3) & -t' \\ -t' & (t+6) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Za slučaj elastične neastabilnosti vrijedi:

$$\left|\hat{K}\right| = (t+3)(t+6) - (t')^2 = 0.$$

Interpolacijom se iz tablice koeficijenata dobije da je ρ = 0,476.

$$P_{cr} = \frac{0{,}476\pi^2 EI}{L^2} = \frac{4{,}698EI}{L^2}$$