

ITERATIVNE METODE

- ⇒ Kada je broj jednađbi veliki u metodi pomaka onda se rješavanje jednađbi inženjerske metode pomaka radi iterativnim postupkom.
- ⇒ Postoji nekoliko iterativnih metoda kojima se to radi-razlikuju se po pretpostavkama u polaznom sustavu.

HARDY CROSS (1930) ⇒ postupak iterativnog rješavanja sustava jednađbi ravnoteže **za konstrukcije bez translatornih pomaka čvorova** (postoje samo zaokreti čvorova), pri čemu je za kriterij točnosti odabran prirast momenata na krajevima štapova.

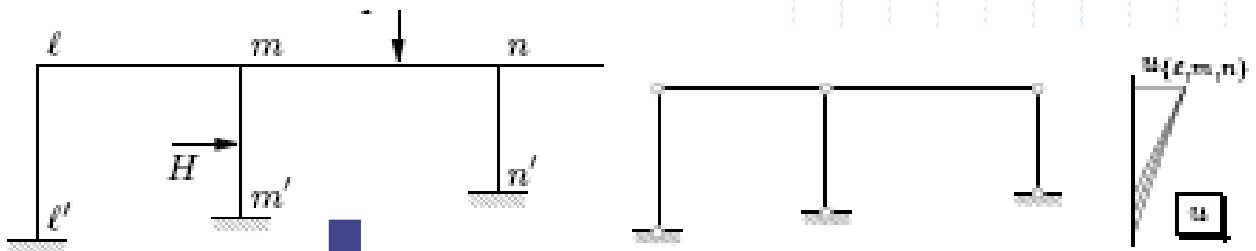
CSONKA – WERNER (1948) ⇒ postupak iterativnog određivanja unutarnjih **sila za pomični okvir opterećen samo horizontalnim silama na nivou etaže**, osobito primjenjiva za proračun regularnih okvira s ortogonalnim stupovima i gredama. Postupak brzo konvergira.

KANI ⇒ postupak iterativnog istovremenog određivanja momenata od zaokreta i translatornih pomaka čvorova (složeno).

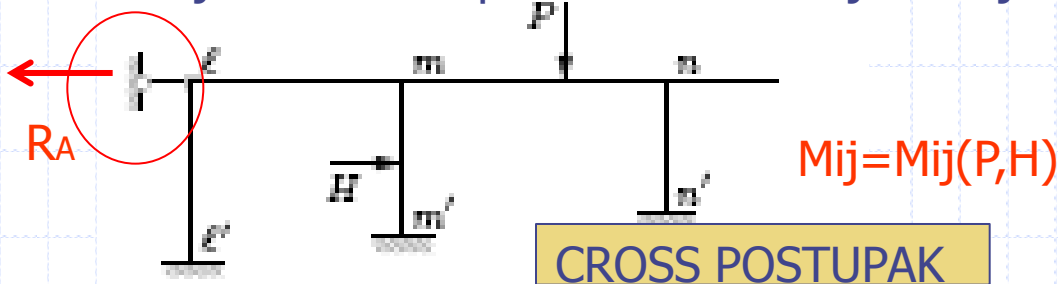
ITERATIVNE METODE

Kod proračuna okvirnih konstrukcija najvažnije određivanje momenata M , koji djeluju na krajevima pojedinih štapova. M se računaju postupkom superpozicije u 2 koraka.

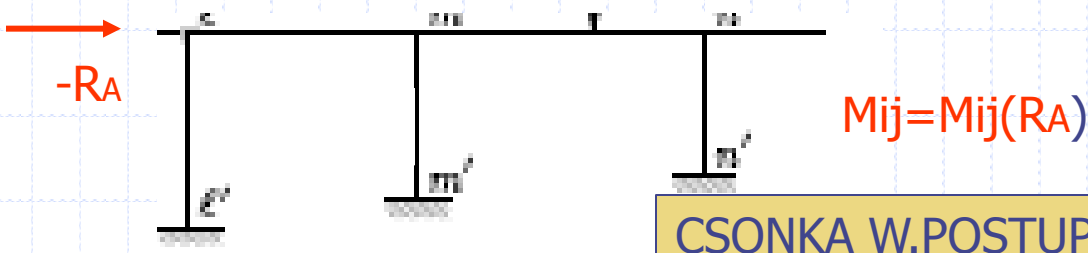
ZADAN STATIČKI SISTEM:



1. Dodaje se veza-nepomičan sistem-djelovanje vanjskih sila



2. Pomičan sistem-samo horiz. sila u dodanoj vezi



S
U
P
E
R
P
O
Z.

$$M_{ij} = M_{ij}(1.) + M_{ij}(2.)$$

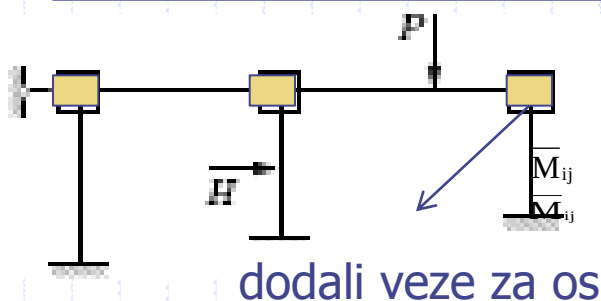
ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Crossov postupak

- Iterativni način rješavanja lin. jedn. za transl. nepomične sisteme.
- Nepoznanice momenti, a ne kutevi zaokreta.

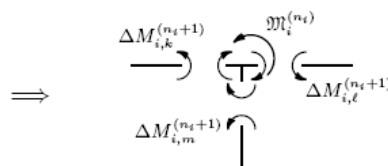
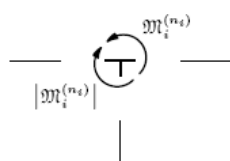
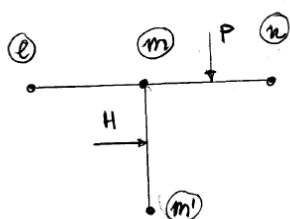
OSNOVNI SISTEM U CROSS M:



Kao i u ing.m.p. uvodimo osnovni sistem. U istom računamo $\overline{M}_{ij}$

Ukupni moment na kraju i elementa (i; j) :

$$M_{i,j} = m_{i,j} + \overline{M}_{i,j} = \underbrace{4 k_{(i,j)} \varphi_i + 2 k_{(i,j)} \varphi_j}_{\text{Stanje slob.pomaka}} + \underbrace{\overline{M}_{i,j}}_{\text{Stanje upetosti}}$$



U i-tom čvoru djeluju momenti, suprotnog smjera momentima na krajevima štapova i, ev. vanjski koncentrirani moment M_i .

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Iz uvjeta ravnoteže posmatranog čvora:

$$\sum_j (-M_{i,j}) + M_i = 0.$$

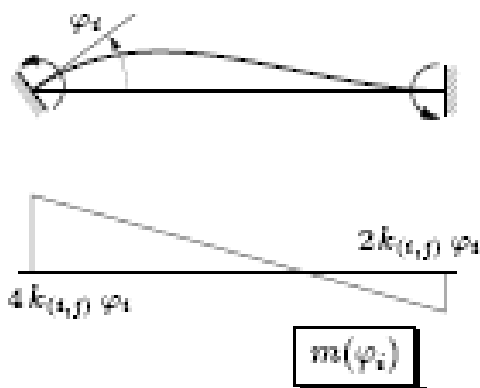
Uvrstimo li izraz za $M_{i,j}$ i oznakom M_i obuhvatimo sve poznate momente,

$$M_i = \sum_j (-M_{i,j}) + M_i.$$

jednadžba ravnoteže čvora poprima oblik:

$$-\left(\sum_j 4 k_{(i,j)}\right) \varphi_i - \sum_j 2 k_{(i,j)} \varphi_j + M_i = 0. \quad (**)$$

Kuteve φ odabiremo da zadovoljavaju jednadžbu (**) za svaki čvor konstrukcije-iterativnim putem.



Zaokret čvora i elementa (i; j) uzrokuje moment i na kraju j :

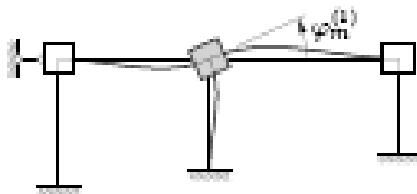
$$m_{j,i}(\varphi_i) = 2 k_{(i,j)} \varphi_i -$$

Time se narušava postignuta ravnoteža u prethodno posmatranom čvoru .

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

A)



Svi kutevi pridržani $\varphi_j = 0$ za $j \neq m$ osim onog koji zaokrećemo i uravnotežujemo.

Počnemo sa čvorom m , gdje očekujemo najveću veličinu φ .

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru m :

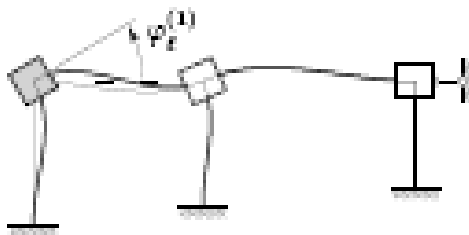
$$-\left(4 \sum_{j \neq m} k_{(m,j,m)}\right) \varphi_m + \mathfrak{M}_m = 0.$$

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathfrak{M}_m}{4 \sum_{j \neq m} k_{(m,j,m)}}.$$



1. pribl. vrijednost kuta

B)



Prelazimo na 2. čvor:

Svi kutevi pridržani $\varphi_j = 0$ za $j \neq \ell$ osim onog koji zaokrećemo i uravnotežujemo.

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru ℓ :

$$-\left(4 \sum_{j \neq \ell} k_{(\ell,j,\ell)}\right) \varphi_\ell - 2 k_{(\ell,m)} \varphi_m^{(1)} + \mathfrak{M}_\ell = 0;$$

$$\varphi_\ell^{(1)} = \frac{\mathfrak{M}_\ell^{(0)}}{4 \sum_{j \neq \ell} k_{(\ell,j,\ell)}}.$$

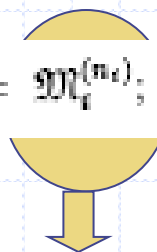
$$\mathfrak{M}_\ell^{(0)} = -2 k_{(\ell,m)} \varphi_m^{(1)} + \mathfrak{M}_\ell.$$

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Uравnoteženjem susj. čvorova -narušimo ravnotežu u čvoru m , zbroj momenata koji na nj djeluju neće biti jednak nuli:

$$-\left(4 \sum_{j_i} k_{(i,j_i)}\right) \varphi_i^{(n_i)} - \sum_{j_i} 2 k_{(i,j_i)} \varphi_{j_i}^{(n_{j_i})} + \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i^{(n_i)};$$



neuravnoteženi, rezidualni moment

Da čvor ponovo uravnotežimo dodatno ga zaokrenemo za kut $\Delta \varphi_i^{(n_i+1)}$. Sada je:

$$-\left(4 \sum_{j_i} k_{(i,j_i)}\right) \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{\mathfrak{M}_i^{(n_i)}}{4 \sum_{j_i} k_{(i,j_i)}}$$

Nakon $n_i + 1$ uravnoteženja:

$$\varphi_i^{(n_i+1)} = \varphi_i^{(n_i)} + \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}.$$

H. Cross uočio momenti na krajevima elemenata nepomičnog sistema mogu se izravno izračunati.

Ako $\Delta \varphi_i^{(n_i+1)}$ prirast kuta zaokreta, prirast momenta na kraju i elementa ($i; j_i$):

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4 k_{(i,j_i)} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)};$$

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \frac{4 k_{(i,j_i)}}{4 \sum_{j_i} k_{(i,j_i)}} \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \frac{k_{(i,j_i)}}{\sum_{j_i} k_{(i,j_i)}} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}.$$

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j_i} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

Koeficijentom krutosti čvora i:

$$k_i = \sum_{j_i} k_{(i,j_i)},$$

Razdjelni koeficijent u čvoru i za element (i; j_i).

$$\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$$

Govori koliko od ukupnog momenta upetosti čvora otpada na jedan štap. Stoji uz rezidualni momenat.

$$\sum_{j_i} \mu_{i,j_i} = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{za 1 čvor.}$$

$$\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mathfrak{M}_i^{(n_i)}, \quad - \sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0.$$

Čvor i možemo uravnotežiti da na njega dodamo moment intenziteta rezidualnoga momenta, a *suprotnog smjera*, te ga razdijelimo na priključene elemente u omjeru njihovih krutost- **postupak raspodjele momenata ili Crossov postupak.**

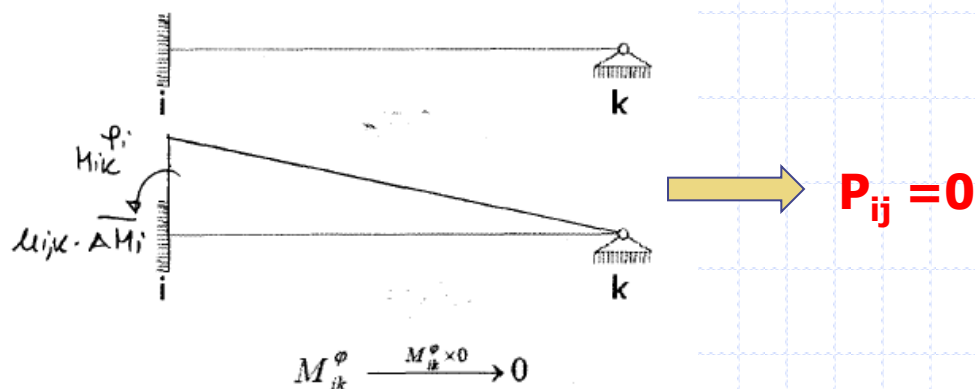
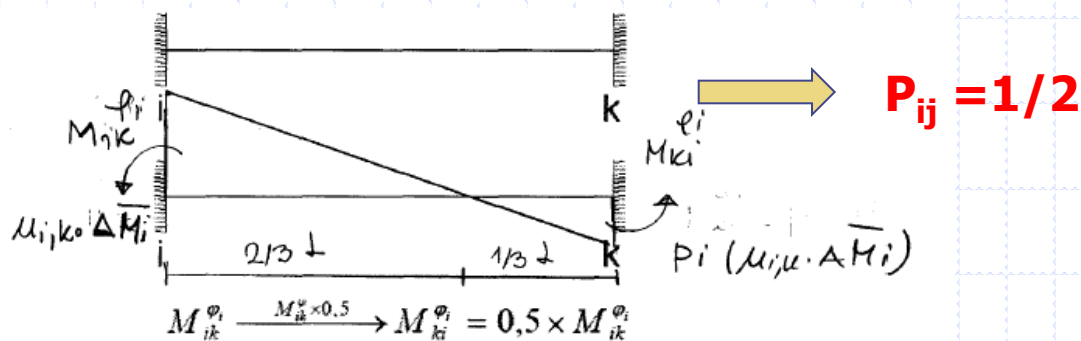
ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Ako se kraj i elementa (i; j_i) zaokrene za $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, na kraju j_i moment:

$$\Delta M_{j_i, i} = 2 k_{(i, j_i)} \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2} \Delta M_{i, j_i}^{(n_i+1)}.$$

Prijenosni koeficijent p_{ij} -nakon uravnoteženja čvora prenosi M sa jedne strane neopterećenog štapa na drugu. Ovisi o upetoj šemi elementa tj. o rubnim uvjetima.

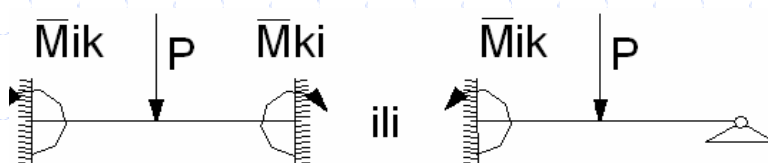


ITERATIVNE METODE

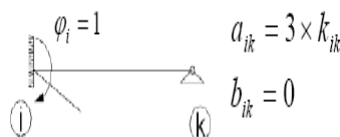
Crossov postupak

Tijek rješavanja Crossovim postupkom:

1. nađemo momente upetosti $\bar{M}_{ij}$ ($\varphi_i = 0$), za vanjsko opterećenje-kao u metodi pomaka, u stanju upetosti.



2. izračunamo krutosti pojedinih elemenata k_{ik} ,



$$k_{ik} = 3/4 * k'_{ik}$$

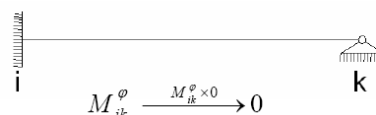
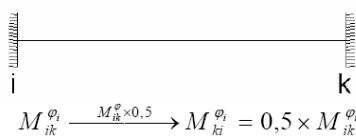
$$k_{ik}' = \frac{E * I_{ik}}{l_{ik}} - \text{stvarna krutost}; \quad k_{ik} = \frac{E * I_{ik}}{l_{ik} * E_0 * I_0} - \text{rač. krutost}$$

te **krutost čvora** kao sumu krutosti svih štapova koji se sutiču u njemu $K_i = \sum k_{ik}$.

3. izračunamo razdjelne koeficijente μ_{ij} u čvoru:

$$\mu_{ik} = \frac{k_{ik}}{\sum K_i} \quad \text{ili} \quad \mu_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sum A_i}$$

4. odredimo prijenosni koeficijent p_{ij}



ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Šema proračuna:

- Postupak se provodi na grafičkoj shemi konstrukcije, nacrtamo konstrukciju, na mjestu nepoznatog kuta zaokreta ucrtamo krug ili kvadrat s razdjelim koeficijentima
 - Na krajeve greda i stupova upisujemo pripadne momente upetosti (a potom redom u proračunu, raspodijeljene i prenesene momente).
Momenti upetosti se izračunaju u stanju upetosti od vanjskog opterećenja.
 - Izračunamo rezidualne momente slobodnih čvorova – zbrojimo momente upetosti sa krajeva elemenata-jer se prebacuju u čvor.
 - **Iteracije**- "otпустimo" uklještenje u čvoru sa najvećim rezidualnim momentom, on se zaokreće i zauzima ravnotežni položaj, tada se neuravnotežni moment uravnoteži u priključenim štapovima u omjerima krutosti pojedinih štapova.
- Mi to radimo na šemi pomoću razdjelnih koeficijenata. Neuravnoteženi moment suprotnog smjera množimo razdjelnim koeficijentima i razdjelimo ih po elementima u čvoru.

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

Šema proračuna:

Pri tom uravnoteženju šaljemo dio momenta na druge krajeve priključenih štapova. To radimo na šemi s prijenosnim koeficijentima.

Redom nastavljamo uravnoteženje na drugim slobodnim čvorovima i ponavljamo iteracije.

- Postupak iteracije teče tako dugo dok je neuravnoteženi moment u svakom čvoru manji od unaprijed odabrane vrijednosti $\varepsilon \leq \Delta M_{ij}$;

U našem proračunu stajemo kada se vrijednost neuravnoteženog ili prenesenog momenta svodi na malu vrijednost npr. 0,1.

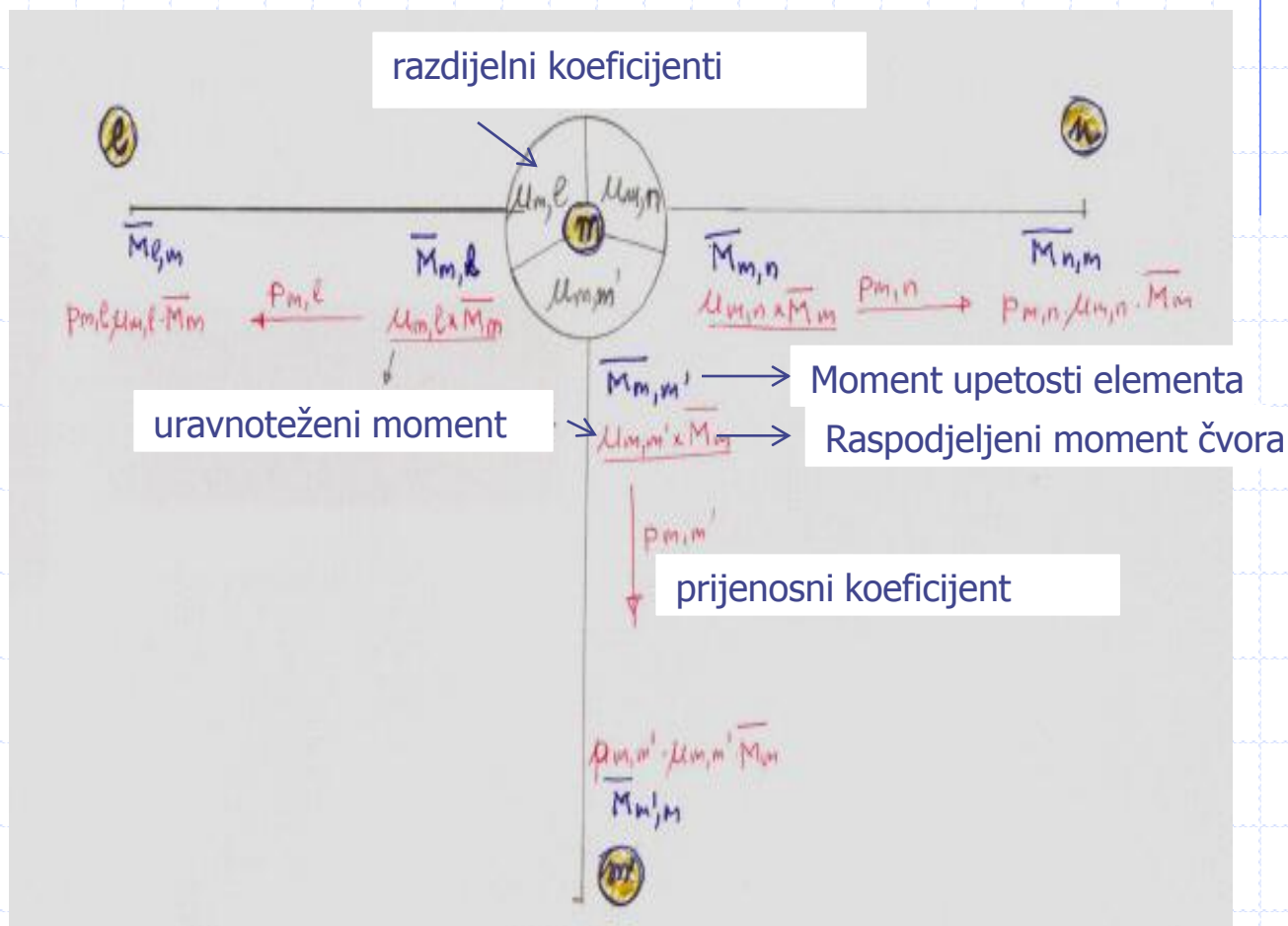
- Konačni momenti na kraju štapa dobiju se zbrajanjem momenta upetosti, raspodjeljenih i prenesenih momenata tijekom iteracije

- Sile na krajevima štapova T_{ij} i N_{ij} određuju se na isti način kao kod metode pomaka.

ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

SLOBODNI ČVOR ($\varphi=?$)



$$\sum_{j_i} M_i = 0; \quad \underline{\mu_{ij} M_i}$$

Kada podcrtamo veličine znači da je čvor uravnotežen-ostali nisu.

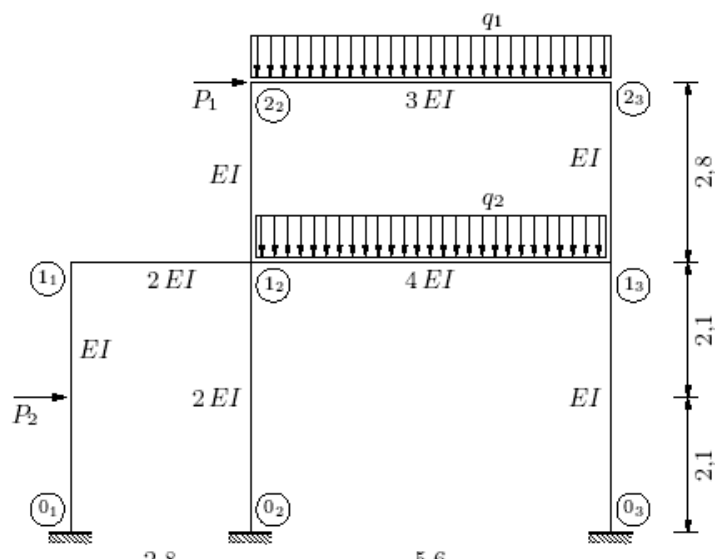
ITERATIVNE METODE

Crossov postupak

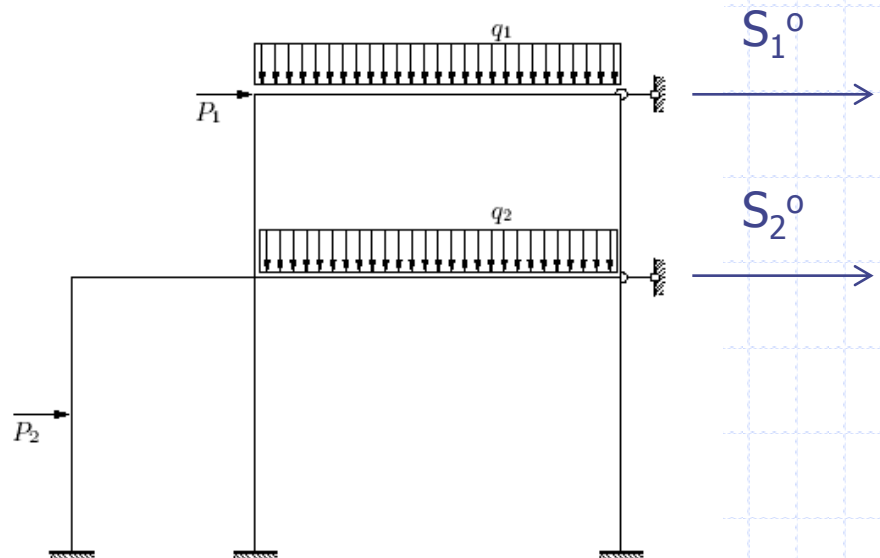
POSTUPAK CROSSA

Za konstrukcije bez translatornih pomaka, međutim može se ipak koristiti i kod konstrukcija s translatornim pomacima. Tada se višestruko koristi Crossov postupak.

Zadano:



I korak:



ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA

Konstrukcije s translatornim pomacima čvorova

⇒ Određivanje sila na krajevima štapova koji imaju osim rotacije i translacije čvorova, vrši se u dva koraka:

Prvi korak:

- Dodavanjem veza koje sprječavaju translatorne pomake čvorova odredimo Crossovim postupkom momente M_{ij} u svim štapovima kao kod konstrukcija bez translatornih pomaka štapova;
- Nakon toga, određuju se sile u pridržajnim vezama koje sprječavaju neovisne translatorne pomake čvorova S_i^0

Drugi korak:

- Konstrukciji se daju pomaci(obično jedinični) na pravcima veza koje sprječavaju neovisne pomake;
- Nakon pomaka, konstrukcija se pridržava u novom položaju i izračunavaju momenti na krajevima štapova-Crossovim postupkom.
- Odredimo sile u pridržajnim vezama.
- Ponovimo postupak davanjem jediničnog pomaka na pravcu svakog neovisnog pomaka.

ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA

za konstrukcije s translatornim pomacima čvorova

Za jedinični pomak na pravcu k-te veze-u 2. koraku, vektor neovisnih pomaka ima sve komponente jednake nuli osim $w_k = 1$;

Momenti upetosti od pomaka $w_k = 1$:

$$m_{ij}(k) = c \cdot \Delta v_{ij}(k)$$

Konačne translatorne pomake w_i izračunamo iz uvjeta da sile u pridržajnim vezama moraju biti $= 0$.

S_i – sila u pridržajnoj vezi i . **Konačan uvjet $S_i = 0$.**

S_i^0 – sila u pridržajnoj vezi i za spriječene translatorne pomake; uzrokovana vanjskim opterećenjem.

$s_{i,1}$ – sila u pridržajnoj vezi i od pomaka $w_1 = 1$

$s_{i,n}$ – sila u pridržajnoj vezi i od pomaka $w_n = 1$.

$$S_i = S_i^0 + w_1 * s_{i,1} + w_2 * s_{i,2} + \dots + w_n * s_{i,n} = 0$$

Konačni momenti na konstrukciji:

$$M_{ik} = M_{ik}^0 + m_{ik(1)} * w_1 + m_{ik(2)} * w_2 + \dots + m_{ik(n)} * w_n = 0$$

ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA

za konstrukcije s translatorskim pomacima čvorova

Primjer:

dvokatni okvir

TMP : $4 \times 3 = 12$

MS: 6x statički neodređen s.

IMP: $4\phi_i + 2 w_i$

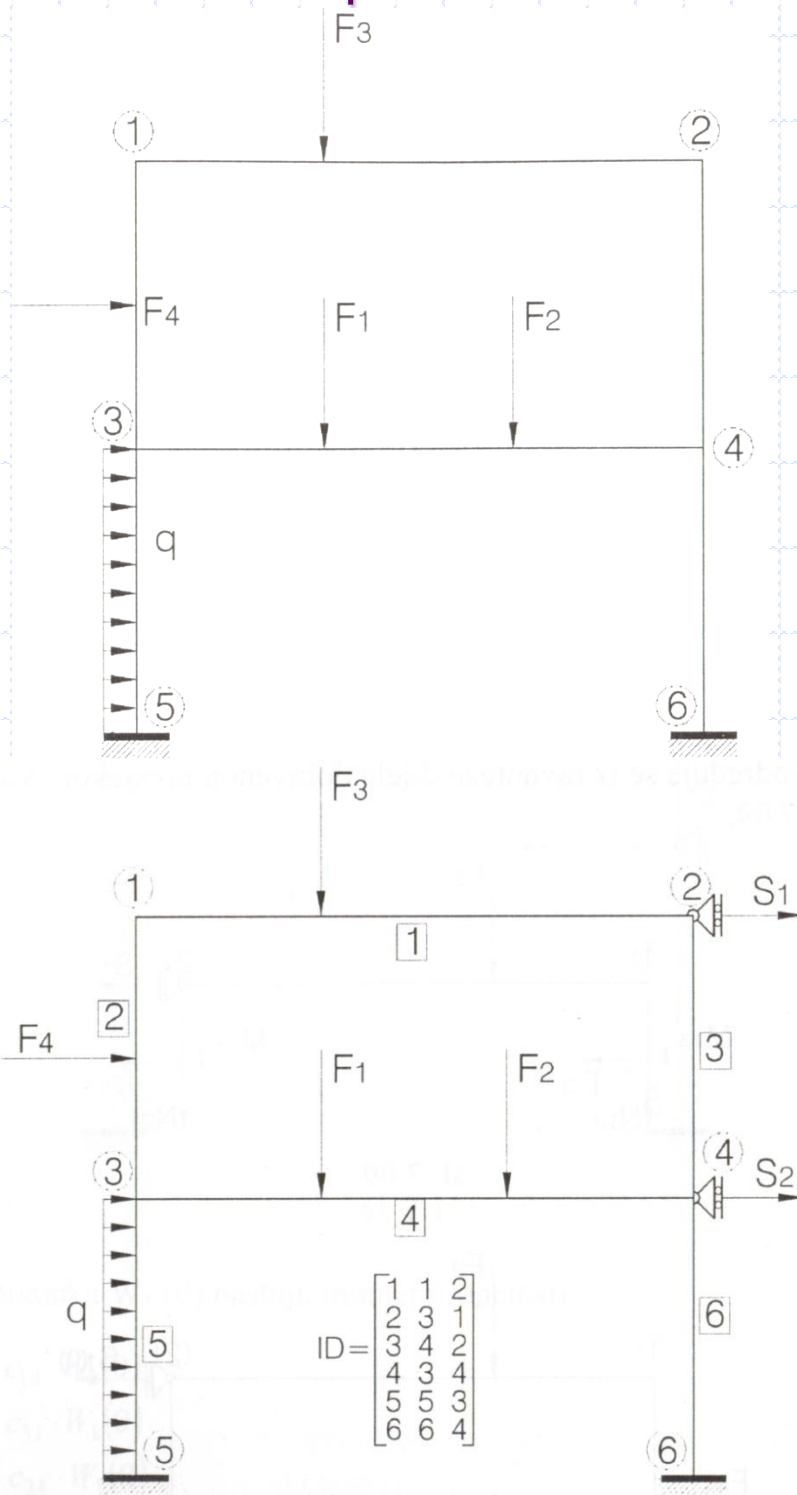


3 puta moramo računati Crossa-

3 stanja S_i^0 ; w_1 ; w_2

Dodamo 2-je veze – transl. nepomični sistem.

U tim vezama računamo S_1^0 , S_2^0 .



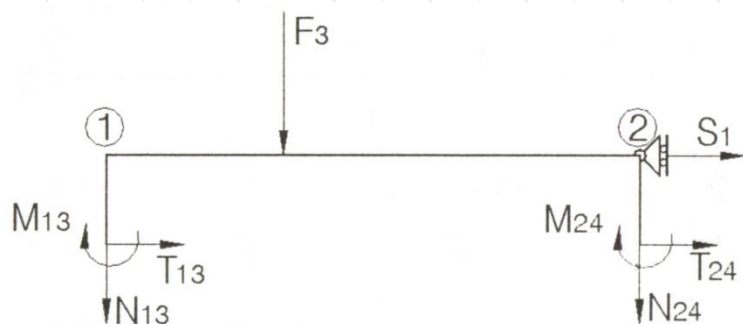
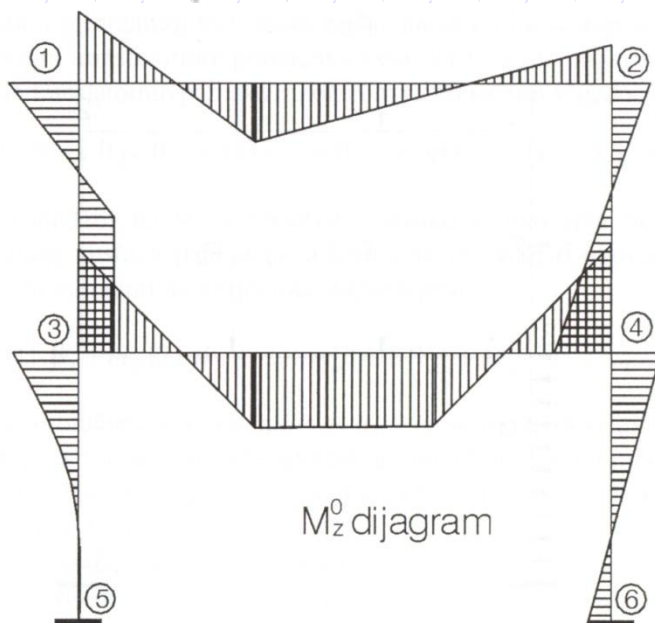
ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA

za konstrukcije s translatorskim pomacima čvorova

Primjer:

1. Korak : Crossovim postupkom M dijagram na nepomičnom sistemu, a zatim sile u dodanim vezama.

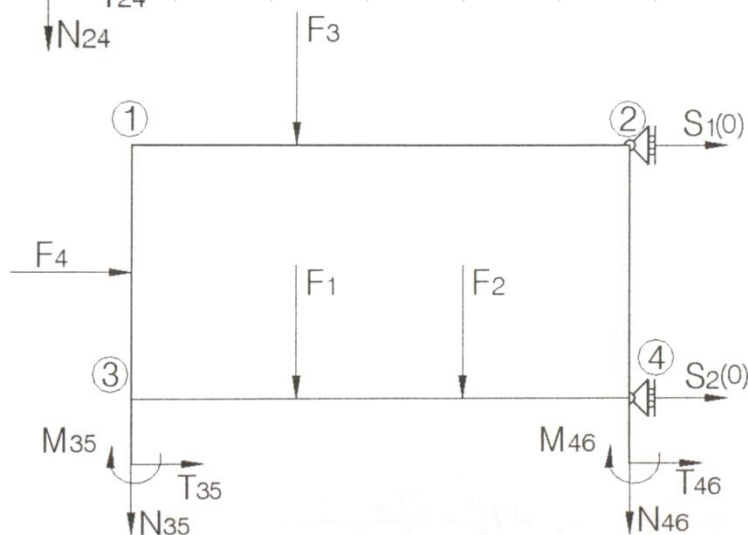


$$\sum X = 0$$

$$S_1^0 = T_{1,3} + T_{2,4}$$

$$\sum X = 0$$

$$S_2^0 = T_{3,5} + T_{4,6} + F_4 + S_1^0$$



ITERATIVNE METODE

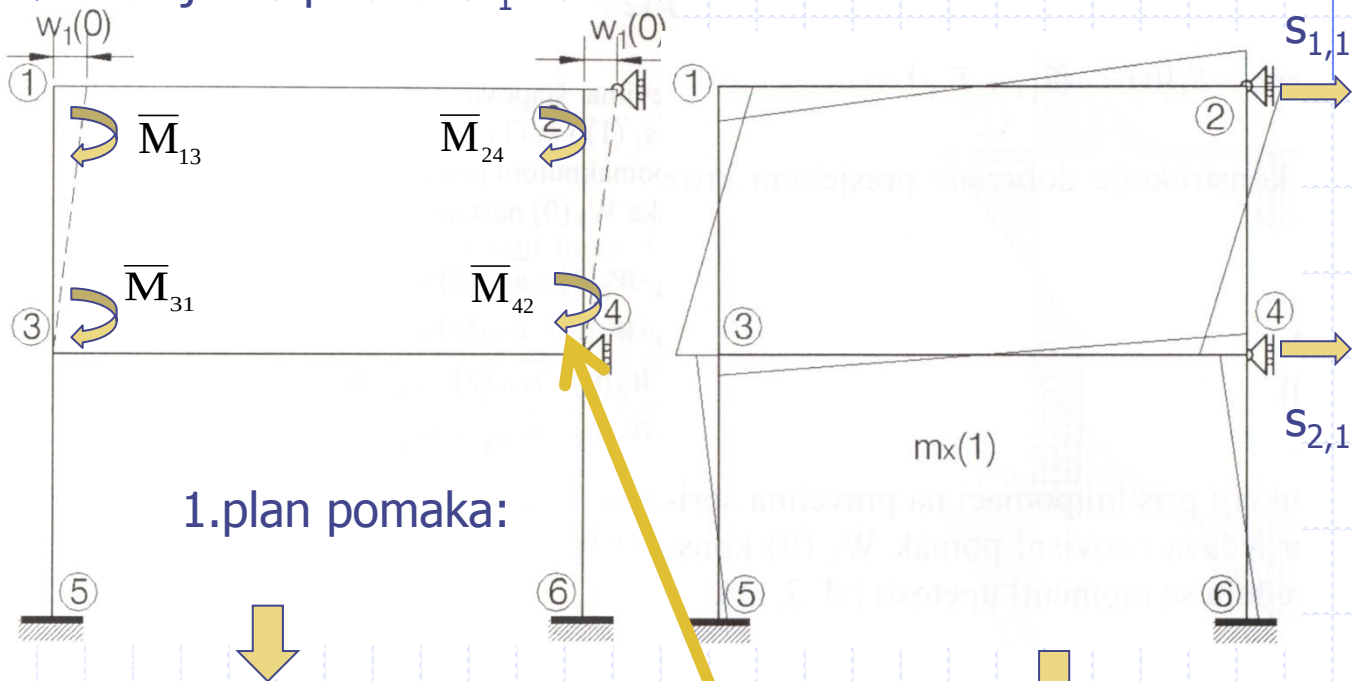
POSTUPAK CROSSA

za konstrukcije s translatorskim pomacima čvorova

2. korak

1. dajemo pomak $w_1 = 1$.

3. Uravnoteženje momenata
Crossovim postupkom



1. plan pomaka:

2. Sile uslijed prisilnog pomaka:

$$\bar{M}_{13} = c_{13} * \psi_{13} * w_1$$

$$\bar{M}_{24} = c_{24} * \psi_{24} * w_1$$

$$\bar{M}_{31} = c_{31} * \psi_{13} * w_1$$

$$\bar{M}_{42} = c_{42} * \psi_{24} * w_1$$

$S_{m,n}$ → uzrok

↓
mjesto

4. Izračunamo $s_{1,1}$ i $s_{2,1}$ iz presjeka 1-1 i 2-2 nakon izračunatog $m_x(1)$ dijagrama.

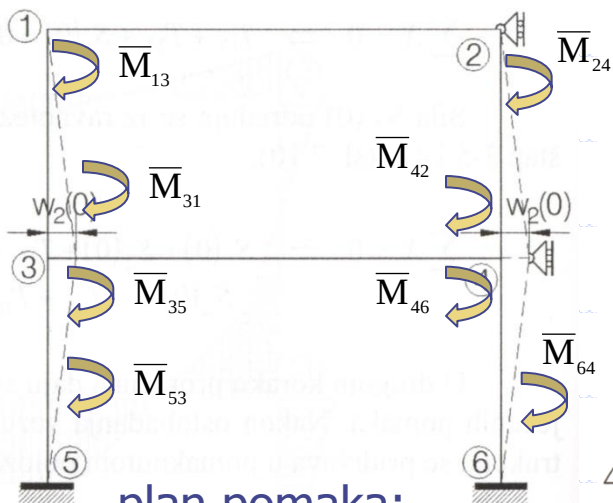
ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA

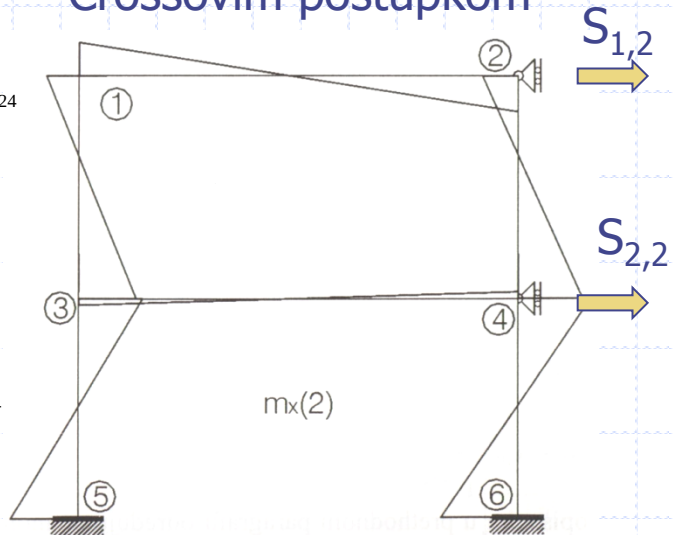
za konstrukcije s translatorskim pomacima čvorova

Dajemo pomak $w_2 = 1$.

Uravnoteženje momenata
Crossovim postupkom



plan pomaka:



Sile uslijed prisilnog pomaka:

$$\bar{M}_{13} = c_{13} * \psi_{13} * w_2$$

$$\bar{M}_{24} = c_{24} * \psi_{24} * w_2$$

$$\bar{M}_{31} = c_{31} * \psi_{13} * w_2$$

$$\bar{M}_{42} = c_{42} * \psi_{24} * w_2$$

$$\bar{M}_{35} = c_{35} * \psi_{35} * w_2$$

$$\bar{M}_{46} = c_{46} * \psi_{46} * w_2$$

$$\bar{M}_{53} = c_{53} * \psi_{35} * w_2$$

$$\bar{M}_{64} = c_{64} * \psi_{46} * w_2$$

Izračunamo $s_{1,2}$ i $s_{2,2}$ iz presjeka 1-1 i 2-2 nakon izračunatog $m_x(2)$ dijagrama .

ITERATIVNE METODE

POSTUPAK CROSSA za konstrukcije s translatorskim pomacima čvorova

4. Uspostavljanje jednažbi ravnoteže:

$$S_1 = S_1^0 + w_1 * s_{1,1} + w_2 * s_{1,2} = 0$$

$$S_2 = S_2^0 + w_1 * s_{2,1} + w_2 * s_{2,2} = 0$$

Pa riješimo nepoznanice w_1 i w_2 .

5. Konačni momenti na konstrukciji:

$$M_{ik} = M^0 + m_1 * w_1 + m_2 * w_2 = 0$$