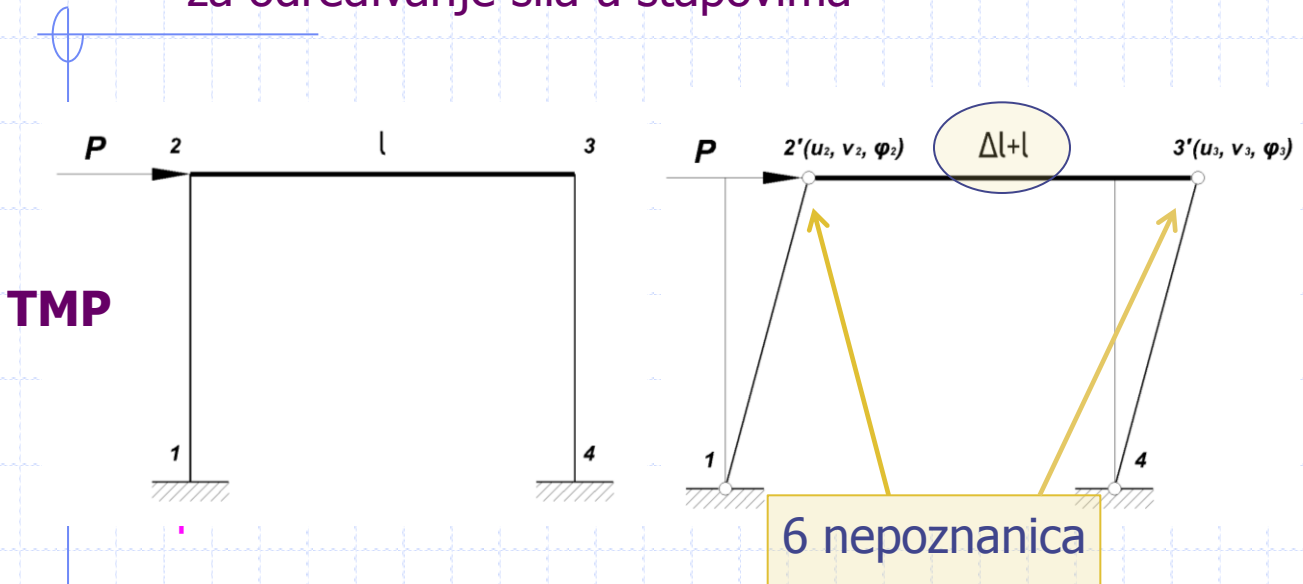


ALGORITAM METODE POMAKA

- ◆ A Određivanje stupnja kinematske neodređenosti odnosno nepoznanica= pomaka u unutarnjim krutim čvorovima sustava
- ◆ B Određivanje osnovnog sustava-dodavanjem veza-pridržanja na mjestu nepoznatih pomaka
- ◆ SUPERPOZICIJA:
 - 1.Proračun sila upetosti $\bar{M}$ na osnovnom sustavu –na kraju elemenata od vanjskog opterećenja=**stanje upetosti**
 - 2.Proračun sila na krajevima elemenata m u funkciji pomaka korištenjem formata krutosti-tu su nepoznanice pomaci=**stanje sl.pomaka**
- ◆ POSTAVLJENJE ODGOVARAJUĆIH JEDNADŽBI:
 - 1.Ravnoteže- u čvorovima u kojim nepoznanice
 - 2.Postavljanje dodatnih jednažbi ravnoteže ili virt.rada
- ◆ Rješavanje jednažbi ravnoteže i pronalaženje nepoznatih pomaka
- ◆ Računanje sila na kraju elemenata superponiranjem stanja upetosti i stanja slob.pomaka $M = \bar{M} + m$

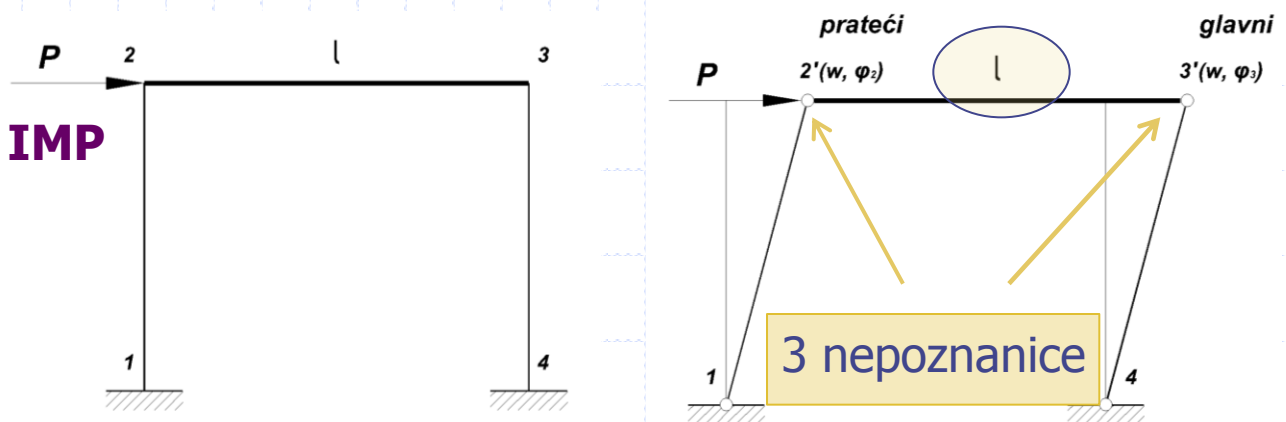
INŽENJERSKA METODA POMAKA

⇒ iz T.M.P. – smanjenjuje se broj nepoznanica potrebnih za određivanje sila u štapovima



Zanemarimo aksijalnu popustljivost štapova (duljina štapa se ne mijenja uzdužnom silom $F_{ik} \rightarrow \infty$)

⇒ međusobna ovisnost translatorskih pomaka. Uvodimo termin neovisni translatorski pomaci.



⇒ uvodimo neovisne "master" i ovisne "slave" čvorove odnosno pomake.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

A- NEPOZNANICE

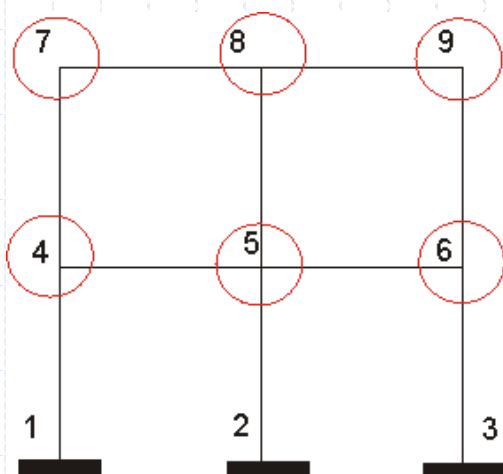
- ⇒ Mijenja se karakter nepoznanica.
- ⇒ Pomaci čvorova u i v nisu više nepoznati pomaci već su **nepoznanice** tkzv. **neovisni translatorni pomaci čvorova w + zaokreti čvora φ**
- ⇒ Prednost – smanjenje broja nepoznanica;
- ⇒ Nedostatak – smanjena točnost unutarnjih sila, nemogućnost određivanja uzdužnih sila u svim štapovima, složeniji formalizam za programiranje.

Broj nepoznanica u jednom sistemu=
broj neovisnih translacijskih pomaka +
broj kuteva zaokreta čvorova.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

A- NEPOZNANICE

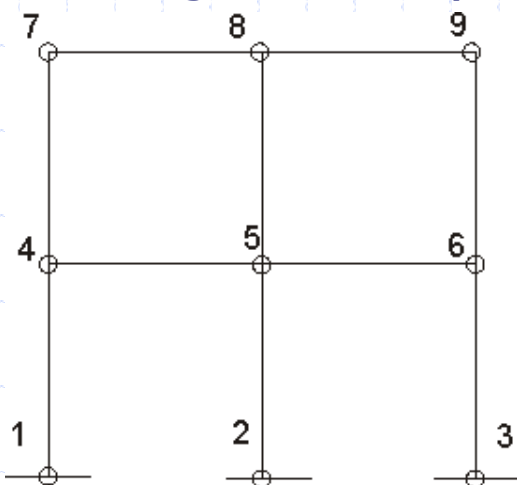
Broj nepoznatih kuteva zaokreta čvorova φ_i =
broju slobodnih, kruto spojenih čvorova



$$\varphi_4 - \varphi_9 = ?$$

$$6 \times \varphi$$

Broj neovisnih pomaka čvorova = broj kinematskih sloboda mehanizma nastalog zamišljenim uvođenjem zglobova na spoju štapova i čvorova (napravljen rešetkasti sustav ili zglobna šema).



$$n = 2 \times \check{C} - \check{S}$$

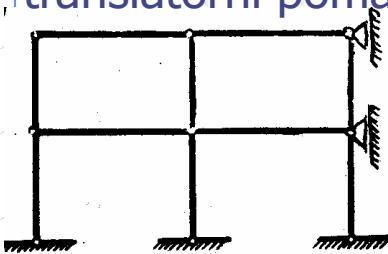
$$n = 2 \times 6 - 10 = 2$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

NEOVISNI POMACI ČVOROVA

ILI

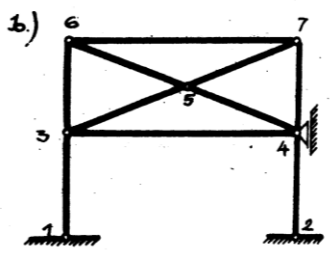
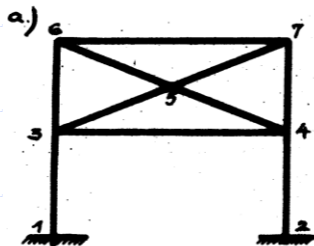
Broj neovisnih translatornih pomaka W_i jednak broju veza koje treba dodati mehanizmu da se spriječe translatorni pomaci čvorova.



$$n = 2 \times 6 - 10 = 2$$

ALI:

$$n = 2 \times 5 - 10 = 0 / \quad n_{\text{stv.}} = 1$$



Bitan i raspored
štapova!!!

Translatorni pomaci čvorova W_i u globalnom koordinatnom sustavu funkcije su neovisnih pomaka, tj.:

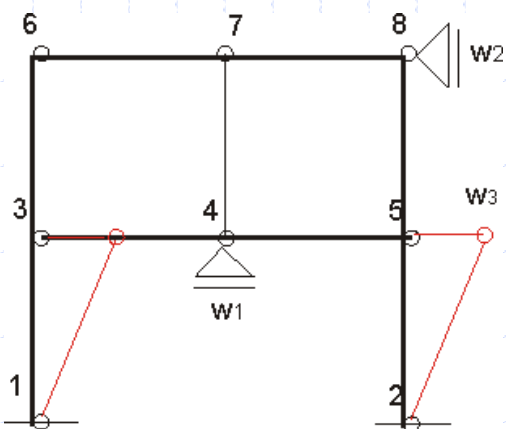
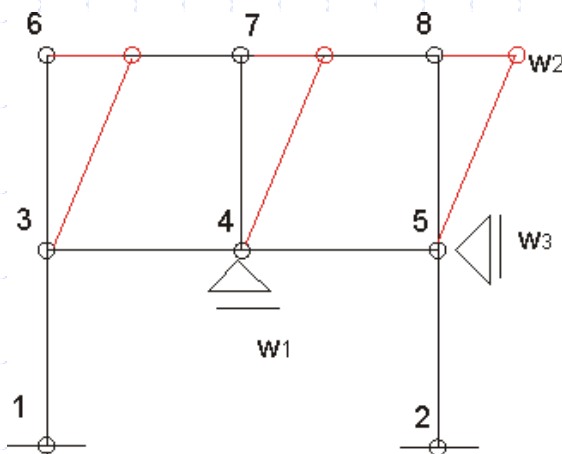
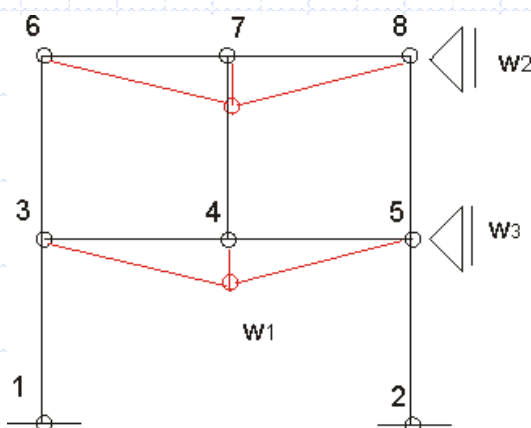
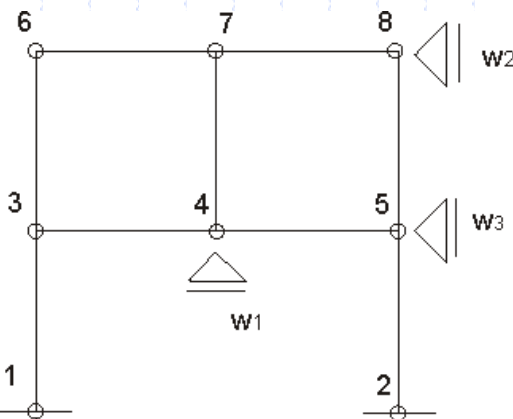
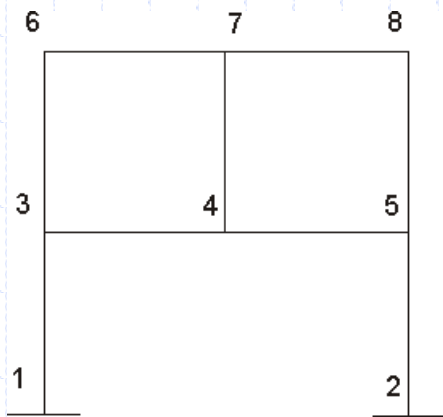
$$U_i = U(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

$$V_i = V(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

NEOVISNI POMACI ČVOROVA

Nepoznanice: $\phi_3-\phi_8$; w_1-w_3



$$U_3 = U_4 = U_5 = W_3$$

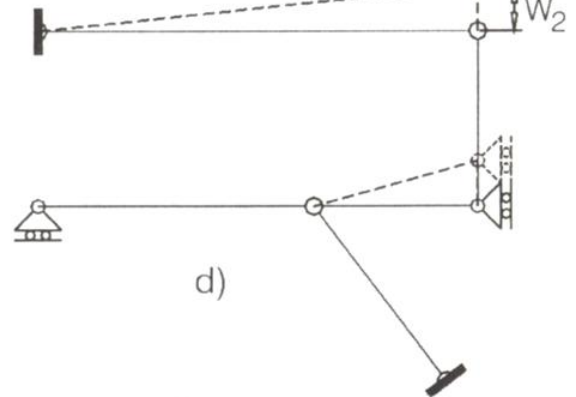
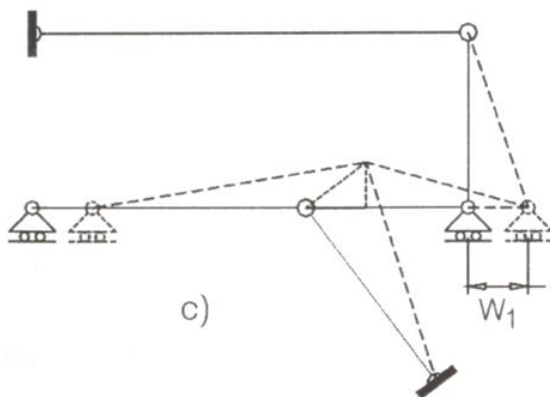
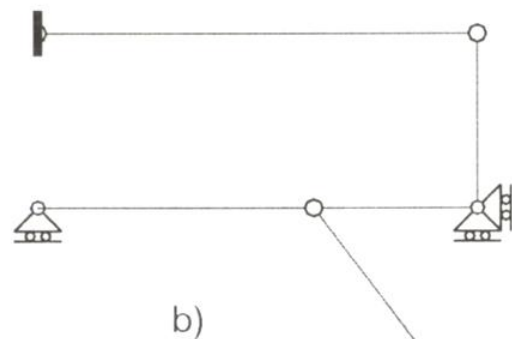
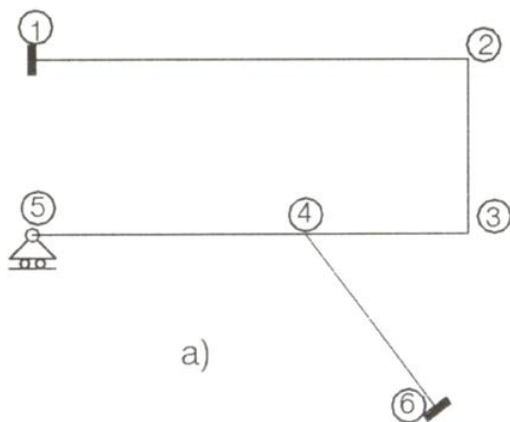
$$U_6 = U_7 = U_8 = W_2$$

$$V_4 = V_7 = W_1$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

NEOVISNI POMACI ČVOROVA

Nepoznanice: $\varphi_2 - \varphi_4$; w_1, w_2



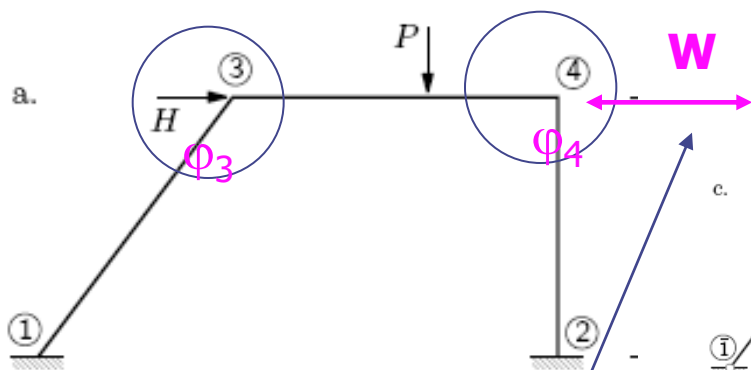
Translatorni pomaci čvorova u globalnom koordinatnom sustavu:

$$U_3 = U_4 = U_5 = W_1$$

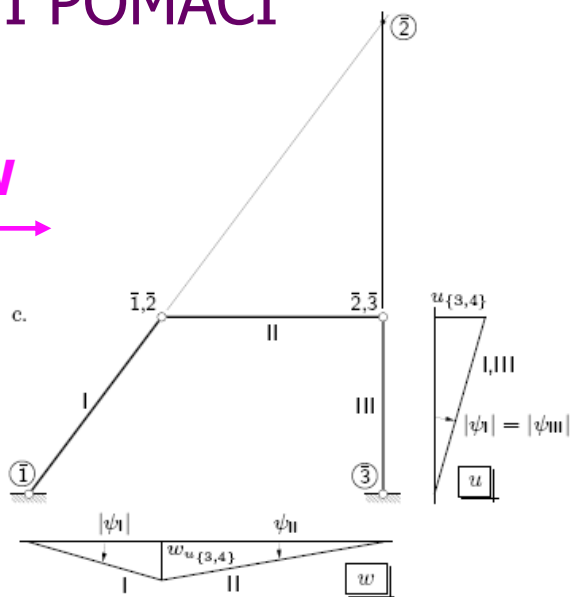
$$V_2 = V_3 = W_2$$

$$V_4 = W_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{46}$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA NEOVISNI TRANSLATORNI POMACI

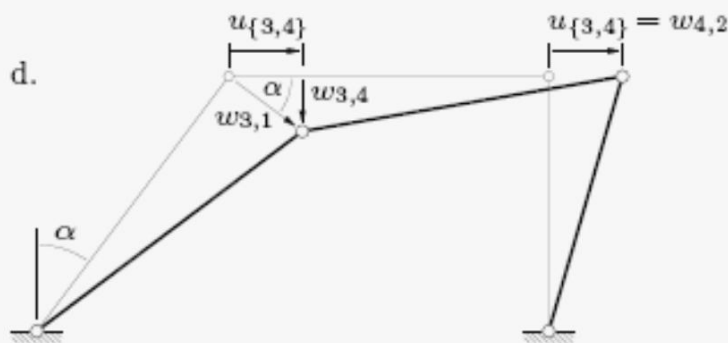


1 neovisni tr. pomak



VEZA W I POMAKA KRAJEVA
ELEMENTA SE TRAŽI IZ:

dijagram projekcije
pomaka



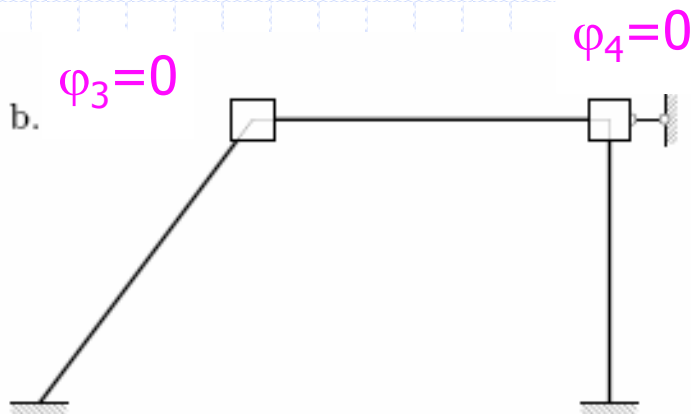
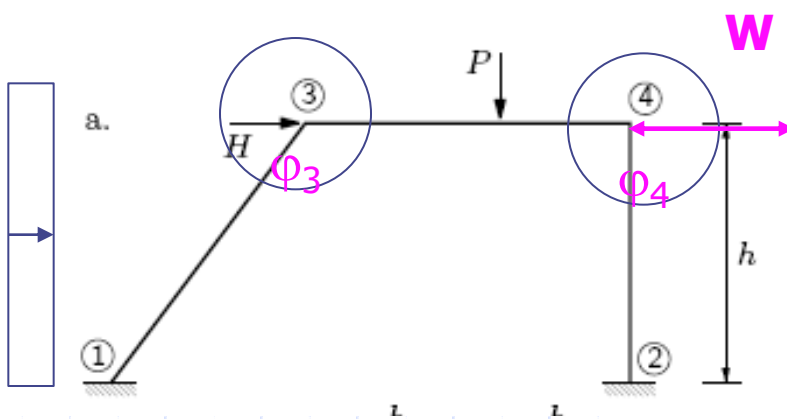
skica pomaka zglobne šeme

POMAK ELEMENTA JE OKOMIT NA OSU ŠTAPA
ILI U PRAVCU OSI .

INŽENJERSKA METODA POMAKA

OSNOVNI SISTEM

Osnovni sistem (i.m.p.) nastaje dodavanjem veza koje sprečavaju nepoznanice-pomake -zaokrete slobodnih čvorova i neovisne translacijske pomake.



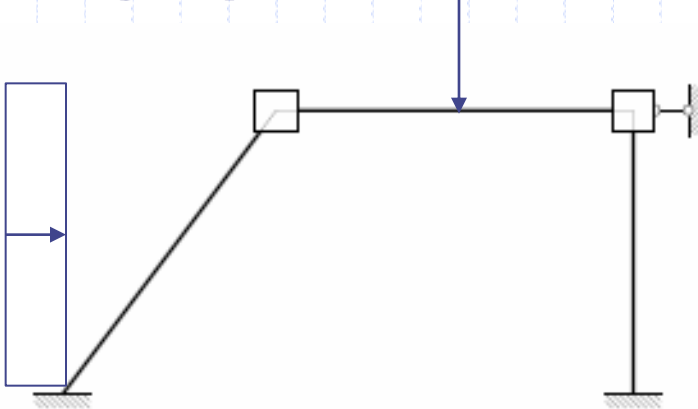
OSNOVNI SISTEM

Osnovni sistem je još statički neodređeniji od zadanog.
Na osnovnom sistemu se rade svi proračuni.

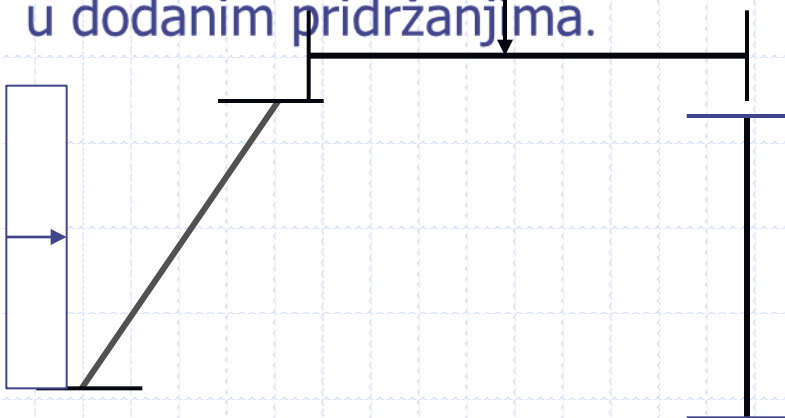
INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

- Sile na krajevima štapa se dobiju superpozicijom:
- stanja upetosti;
 - stanje slobodnih pomaka čvorova.
- Radi se za raščlanjene elemente.

Stanje upetosti: isto kao u T.M.P.

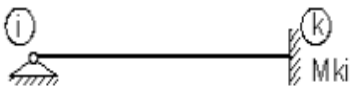
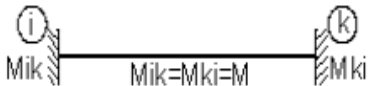
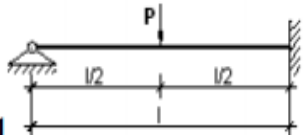
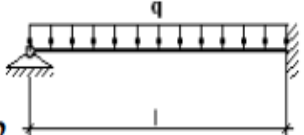
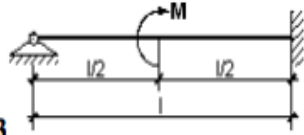


Za vanjsko djelovanje na pojedinim elementima o.s. dobijemo sile na kraju elemenata $\bar{M}$ – **momente upetosti**, odnosno reaktivne momente u dodanim pridržanjima.



INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

$\bar{M}$ - momenti upetosti u stanju upetosti dobiju se koristeći gotove izraze za max 3 x neodređene grede ili metodom sila:

HEMA OPTEREĆENJA	JEDNOSTRANO UPETA GREDA		OBOSTRANO UPETA GREDA	
				
1 	$M_{ki} = \frac{3 \cdot P \cdot l}{16}$		$M = \frac{P \cdot l}{8}$	
2 	$M_{ki} = \frac{q \cdot l^2}{8}$		$M = \frac{q \cdot l^2}{12}$	
3 	$M_{ki} = \frac{M}{8}$		$M = \frac{M}{4}$	

Momenti upetosti $\bar{M}$ su f-ja vanjskog opterećenja.

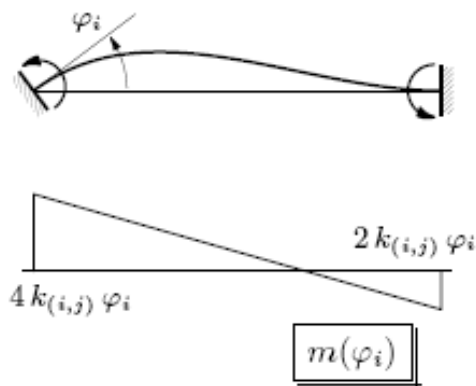
Opterećenje pojedinog štapa (temperaturom i pris. pomacima) može proizvesti sile upetosti u drugim štapovima.

INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

Stanje slobodnih pomaka čvorova:

Čvorovi u koje stavljeno pridržanje prisilno se zaokreću i pomiču da bi stanje pomaka bila kao na polaznom sustavu, te da bi poništili reaktivne momente u čvorovima iz prethodnog koraka.

Zaokret čvora

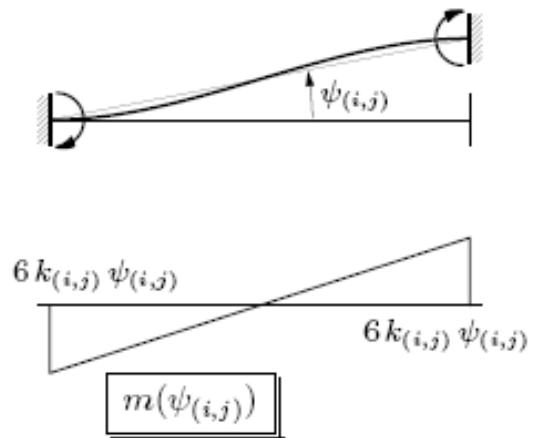


$$m_{ij} = 4 \times k_{ij} \times \varphi_i + 2 \times k_{ij} \times \varphi_j$$

$$m_{ji} = 4 \times k_{ij} \times \varphi_j + 2 \times k_{ij} \times \varphi_i$$

Zaokret čvora φ
nastaje od prisilnog
zaokreta krajeva
elementa .

Zaokret štapa



$$m_{ij} = m_{ji} = 6 \times k_{ij} \times \psi_{ij}$$

$$\psi_{(i,j)} = \frac{\Delta w_{i,j}}{l_{(i,j)}}$$

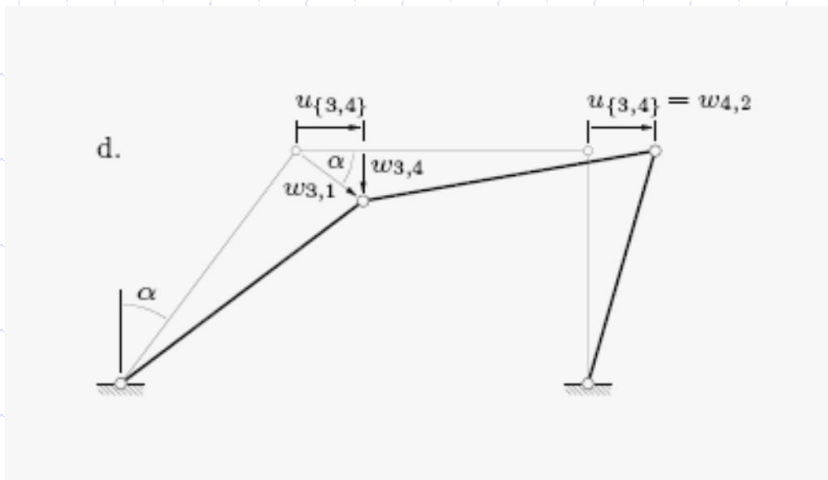
Zaokret elementa ψ
nastaje od relativnog
translatorskog pomaka
krajeva elementa .

INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

ψ = zaokret štapa nastaje uslijed poprečnih pomaka krajeva –čvorova elemenata, okomito na njegovu os t.j. relativnog pomaka čvorova.

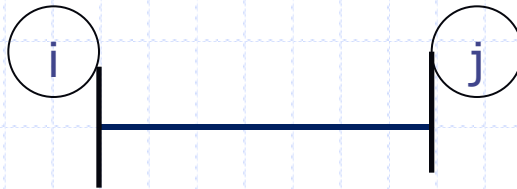
$$\Delta w_{i,j} = w_{i,j} - w_{j,i}$$

R.p.čvorova elementa su funkcije neovisnih translacijskih pomaka u sistemu. Veze poprečnih pomaka krajeva i neovisnih pomaka nalazimo pomoću dijagrama projekcija pomaka ili skice pomaka zglobne sheme.



INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

m_{ij} momenti za stanje slobodnih pomaka na krajevima elemenatamogu se izraziti kao **funkcije kutova zaokreta krajeva i kuta zaokreta elementa** kao krutogj tijela:



$$m_{ij} = 4xk_{ij}\varphi_i + 2xk_{ij}\varphi_j - 6xk_{ij}\psi_{ij}$$

$$m_{ji} = 2xk_{ij}\varphi_i + 4xk_{ij}\varphi_j - 6xk_{ij}\psi_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} m_{i,j} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = k_{(i,j)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \psi_{(i,j)} \end{bmatrix}.$$

2. rubni uveti



$$m_{ji} = k_{ij}x(3x\rho_j - 3x\psi_{ij})$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJU ELEMENATA

Vektor sila na krajevima neopterećenog štaba:

$$s^{(m)} = k^{(m)} \cdot d^{(m)} \rightarrow \begin{bmatrix} s_{ij} \\ s_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(m)} & k_{ij}^{(m)} \\ k_{ji}^{(m)} & k_{jj}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ji} \end{bmatrix}$$

Vektori sila i pomaka na krajevima:

$$s^{(m)} = \begin{pmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \\ t_{ji} \\ m_{ji} \end{pmatrix} \quad d^{(m)} = \begin{pmatrix} v_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ v_{ji} \\ \varphi_{ji} \end{pmatrix}$$

Lokalna matrica krutosti štaba
(matrica koeficijenata
uz pomake)

$$k^{(m)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Momenti –sile na krajevima štaba mogu se izraziti
kao funkcije pomaka krajeva štaba:

$$\begin{pmatrix} m_{ij} \\ m_{ji} \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 4L & 2L & 6 \\ 2L & 4L & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{ji} \\ \Delta v_{ij} \end{pmatrix} \quad t_{ij} = -t_{ji} = \frac{m_{ij} + m_{ji}}{L_{ij}}$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

UKUPNE SILE NA KRAJEVIMA ŠTAPOVA

Ukupne sile na krajevima štapova dobivaju se superpozicijom sila dobivenih za stanje slobodnih pomaka i sila upetosti za stanje spriječenih pomaka:

$$M_{ij} = m_{ij} + \overline{M}_{ij}, \quad T_{ij} = t_{ij} + \overline{T}_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} M_{i,j} \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i,j} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{M}_{i,j} \\ \overline{M}_{j,i} \end{bmatrix} = k_{(i,j)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \psi_{(i,j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{M}_{i,j} \\ \overline{M}_{j,i} \end{bmatrix},$$

Uvrstimo izraze za momente i poprečne sile od pomaka čvorova:

$$M_{ij} = 4xk_{ij}x\varphi_i + 2xk_{ij} * \varphi_j - 6xk_{ij}x\psi_{ij} + \overline{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = 4k_{ji}x\varphi_j + 2xk_{ji} * \varphi_i - 6xk_{ji}x\psi_{ij} + \overline{M}_{ji}$$

$$T_{ij} = T_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

Uzdužne sile N_{ij} i N_{ji} određuju se iz ravnoteže čvorova ili dijelova konstrukcije, slično kao kod uzdužnih sila za stanje upetosti.

Broj nepoznatih pomaka, pa prema tome i jednadžbi ravnoteže koje treba postaviti, manji je od broja nepoznanica u točnoj metodi pomaka.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

UVJETI RAVNOTEŽE

Za svaki slobodni čvor konstrukcije postavlja se po jedan uvjet ravnoteže da je **suma momenata jednaka nuli** $\Sigma M_i = 0$, tj. za čvor (i):

$$-\sum_{(k)} (m_{ik} + \overline{M}_{ik}) + M_i = 0$$

m_{ik} - moment na kraju (i) štapa (i)-(k) za stanje slobodnih pomaka
 $\overline{M}_{ik}$ - moment upetosti na kraju (i) štapa ik
 M_i - vanjski djelujući moment u čvoru (i)

Uvrste li se izvedeni izrazi za momente na krajevima štapova u jednadžbu ravnoteže, bit će

$$\sum_{(j)} a_{ij} \cdot \Phi_i + b_{ij} \cdot \Phi_j + c_{ij} \cdot \Delta v_{ij} = M_i - \sum_{(j)} \overline{M}_{ik}$$

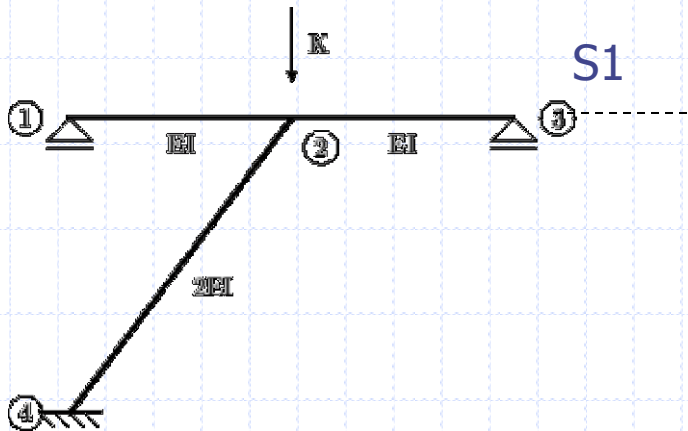
Osim jednadžbi ravnoteže čvorova treba postaviti još onoliko **dodatnih jednadžbi** koliko ima neovisnih translatorskih pomaka čvorova.

- 1) U jedn. ravnoteže se postavljaju odabrani uvjeti ravnoteže za dio konstrukcije.

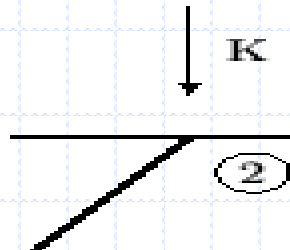
To su sume projekcija na pravac neovisnih translatorskih pomaka odnosno veza koje sprječavaju pomake, uz zahtjev da je sila u pridržajnoj vezi = 0.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

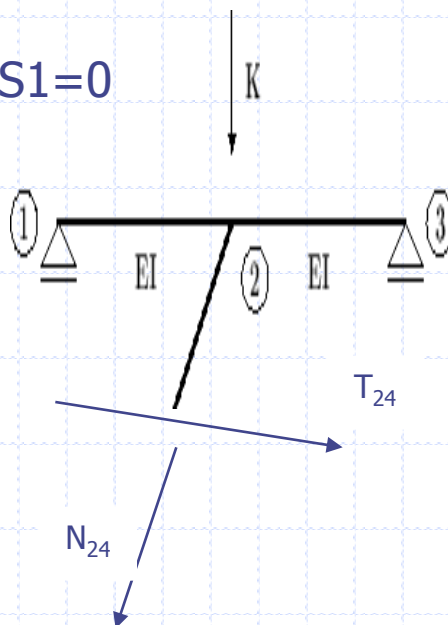
UVJETI RAVNOTEŽE



1) $\sum M_2 = 0$



2) $S_1 = 0$

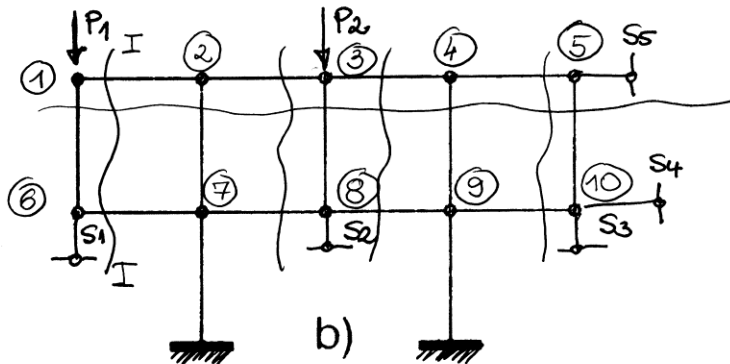


Neprimjenjiv uvjet na s_1 ovaj sistem.

N ne možemo izračunati.

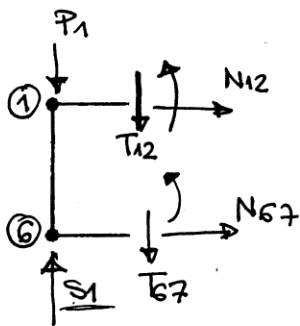
INŽENJERSKA METODA POMAKA

UVJETI RAVNOTEŽE



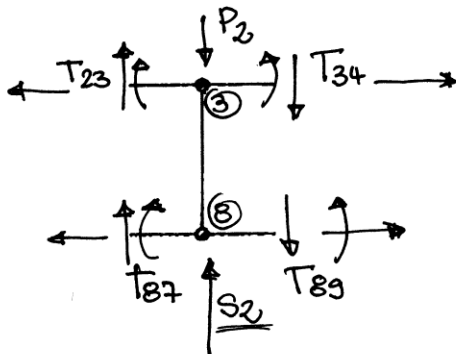
$$\sum M_i / i=1, \dots, 10 = 0 \quad \left. \vphantom{\sum M_i} \right\} 15 \text{ jedn.}$$

$$S_i / j=1, \dots, 5$$



$$S_1 = T_{12} + T_{67} + P_1 = 0$$

✓ N ne ulaze u jednađbe.



$$S_2 = 0$$

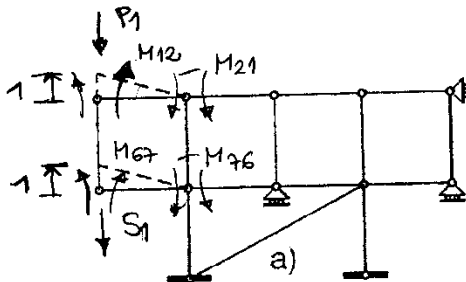
$$S_2 = T_{34} - T_{23} - T_{89} - T_{87} - P_2 = 0$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

UVJETI RAVNOTEŽE

2) Za postavljanje dodatnih jednadžbi pretežno se koristi **princip virtualnih pomaka** za kruto tijelo:

- na spojevima štapova i čvorova se oslobode momenti savijanja, dio konstrukcije se pretvara u mehanizam
- dobivenom mehanizmu se daje virtualni pomak veličine 1 tako da se čvorovi pomiču

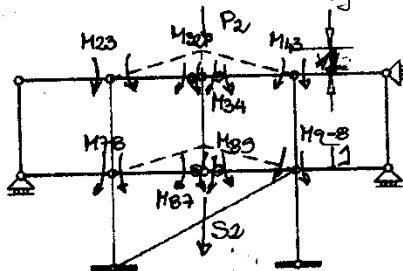


✓N, T ne ulaze u jednadžbe.

$$\psi_{67} = \psi_{12} = \frac{1}{l_{12}}$$

$$S_1 \cdot 1 = -(M_{12} + M_{21}) \cdot \psi_{12} - (M_{67} + M_{76}) \cdot \psi_{67} - P \cdot 1$$

$$T_{ij} = T_{ji} = - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$



$$S_2 \cdot 1 = \phi = -(M_{32} + M_{23}) \cdot \psi_{32} - (M_{34} + M_{43}) \cdot \psi_{34} -$$

$$-(M_{78} + M_{87}) \cdot \psi_{78} - (M_{89} + M_{98}) \cdot \psi_{89} + P_2 \cdot 1 = \phi$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

UVJETI RAVNOTEŽE

- rad oslobođenih unutarnjih sila i vanjskog opterećenja na virtualnim pomacima jednak je nuli, što predstavlja uvjet ravnoteže dijela konstrukcije kojem pripada virtualni pomak.

Jednadžba rada za **k**-ti neovisni translatorni pomak (gdje je ψ_{ij} zaokret štapa pri virtualnom pomaku i δ_i pomak točke na pravcu sila)

$$\sum [(M_{ij} + M_{ji}) \cdot \psi_{ij}(k) + F_i \cdot \delta_i(k) + \int q(x) \cdot \delta_x(k) \cdot dx + P_i \cdot \delta_i(k)]$$

- u jednadžbi rada **F** predstavlja koncentriranu silu na štapu a **P** koncentriranu silu u čvoru;

- Sumiranje se vrši preko svih štapova i čvorova koji imaju pomake uzrokovane virtualnim pomakom $W_k^* = 1$

- Pomaci na pravcima vanjskog opterećenja određuju se iz geometrije pomaka štapa;

- Isti postupak se ponavlja uz oslobađanje veze koja sprječava sljedeći neovisni translatorni pomak konstrukcije; Konačno se dobiva onoliko dodatnih jednadžbi koliko ima neovisnih translatorskih pomaka.

INŽENJERSKA METODA POMAKA SILE NA KRAJEVIMA ŠTAPOVA

- ⇒ Nakon rješenja sustava linearnih jednačbi, dobivaju se vrijednosti zaokreta i neovisnih translatorsnih pomaka čvorova.
- ⇒ Sile na krajevima štapova T_{ij} i M_{ij} se računaju prema izrazima danim u poglavlju o ukupnim silama na krajevima štapova.
- ⇒ Sile N_{ij} se određuju iz ravnoteže čvorova ili dijelova konstrukcije – ako to nije moguće, mora se primijeniti točna metoda pomaka.
- ⇒ Ukoliko se koristi princip virtualnih pomaka za dodatne jednačbe ravnoteže, nije potreban izračun sila $\bar{T}_{ij}$ pa se konačne sile na krajevima štapa računaju pomoću konačnih momenata:

$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} + T_{ij}^0 \quad \text{i} \quad T_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} + T_{ji}^0$$

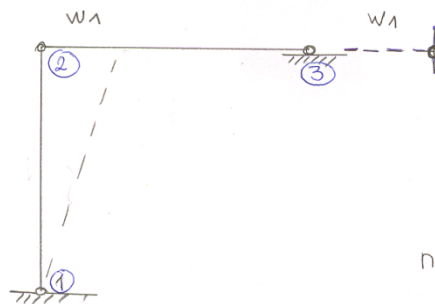
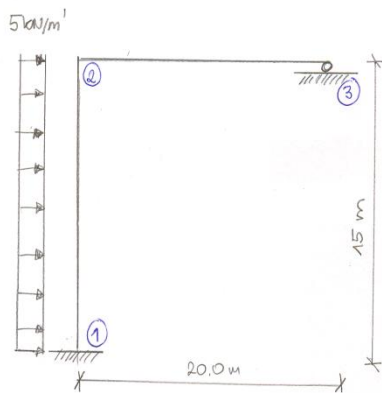
gdje su T_{ij}^0 i T_{ji}^0 sile na statički određenom štapu (tj. prostoju gredi).

INŽ. METODA POMAKA

PRIMJER:

Odrediti dijagrame unutarnjih sila za nosač na slici.

EI je konstantno.

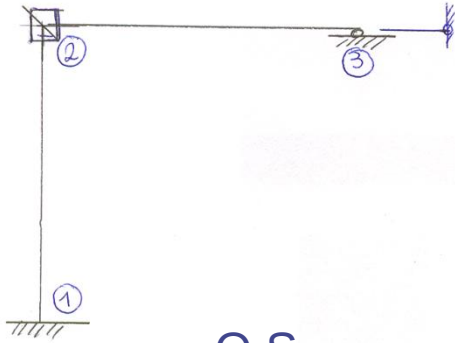


$$n = 2 \cdot 2 - 2 - 1 = 1$$

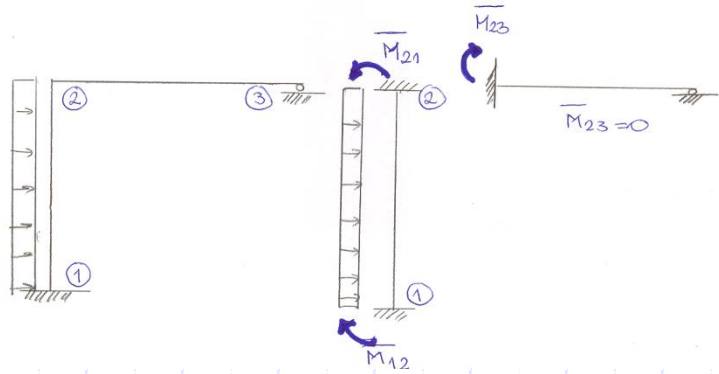
$$n = w_1$$

1. Identificiranje nepoznatih kuteva zaokreta slobodnih čvorova φ_2
2. Identificiranje nepoznatih neovisnih translatorskih pomaka, odnosno neovisnih zaokreta štapova Ψ i izražavanje zaokreta svih drugih štapova kao funkcije neovisnih zaokreta (crtanje šeme pomaknute konstrukcije). Ψ_{12} ili w_1
3. Izračunavanje momenata na kraju štapova za sve štapove

INŽ. METODA POMAKA



O.S.



Momenti upetosti

ŠTAP 1-2 :

$$\overline{M}_{12} = 5 \cdot 15^2 / 12 = 93,8 \text{ kNm}$$

$$m_{12} = 4EI / L \cdot \varphi_1 + 2EI / L \cdot \varphi_2 - 6EI / L \cdot \psi_{12}$$

$$m_{12} = 4EI / 15 \cdot 0 + 2EI / 15 \cdot \varphi_2 - 6EI / 15 \cdot \psi_{12} =$$

$$m_{12} = 0,267 EI \cdot 0 + 0,133 EI \cdot \varphi_2 - 0,40 \cdot \psi_{12}$$

$$M_{12} = m_{12} + \overline{M}_{12} = 0,133 EI \cdot \varphi_2 - 0,40 \cdot \psi_{12} + 93,8$$

$$\overline{M}_{21} = -5 \cdot 15^2 / 12 = -93,8 \text{ kNm}$$

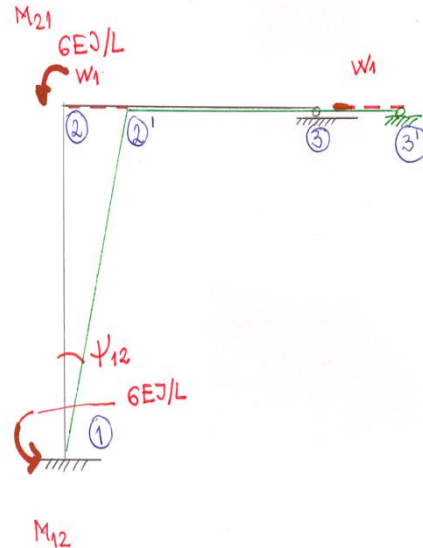
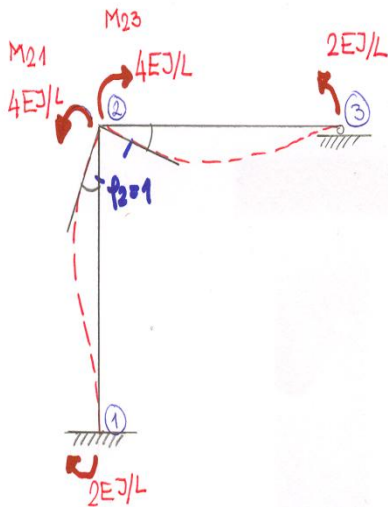
$$m_{21} = 4EI / L \cdot \varphi_2 + 2EI / L \cdot \varphi_1 - 6EI / L \cdot \psi_{12}$$

$$m_{21} = 4EI / 15 \cdot \varphi_2 + 2EI / 15 \cdot 0 - 6EI / 15 \cdot \psi_{12} =$$

$$m_{21} = 0,267 EI \cdot \varphi_2 + 0,133 EI \cdot 0 - 0,40 \cdot \psi_{12}$$

$$M_{21} = m_{21} + \overline{M}_{21} = 0,267 EI \cdot \varphi_2 - 0,40 \cdot \psi_{12} - 93,8$$

INŽ. METODA POMAKA



Momenti za stanje slobodnih pomaka čvorova i štapova

ŠTAP 2-3 :

$$\overline{M}_{23} = 0 \text{ kNm}$$

$$m_{12} = 3EI / L * \varphi_2 - 3EI / L * \psi_{23}$$

$$m_{12} = 3EI / 20 * \varphi_2 - 3EI / 20 * 0 =$$

$$m_{12} = 0,15EI * \varphi_2 - 0,15 * 0$$

$$M_{23} = m_{23} + \overline{M}_{23} = 0,15EI * \varphi_2$$

INŽ. METODA POMAKA

4. Za svaki slobodan čvor u kome su nepoznati zaokreti čvora postavi jednačbe ravnoteže ($\sum M_i = 0$)

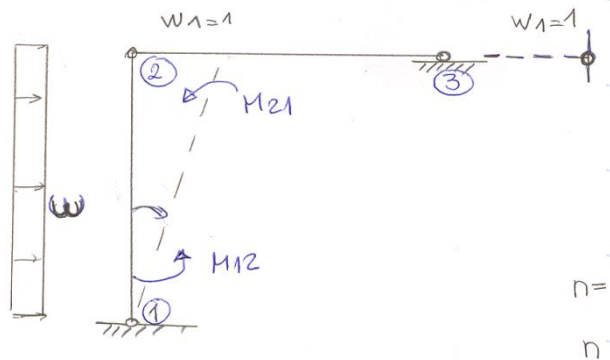
$$\sum M_2 = 0$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$0,133EI * \varphi_2 - 0,40 * \psi_{12} - 93,8 + 0,15EI = 0$$

$$0,417EI * \varphi_2 - 0,40 * \psi_{12} = 93,8$$

5. Za svaku neovisnu rotaciju štap (neovisni translacijski pomak) formuliramo jednačbe ravnoteže bazirane na principu virtualnih pomaka



n=
n

$$\omega * 5 * 15^2 / 2 - M_{21} * \omega - M_{12} * \omega = 0$$

$$M_{21} - M_{12} = 563$$

$$0,267EI * \varphi_2 - 0,40EI * \psi_{12} - 93,8 - 0,133EI * \varphi_2 - 0,40 * \psi_{12} + 93,8 = 563$$

$$0,40EI * \varphi_2 - 0,80EI * \psi_{12} = 563$$

INŽ. METODA POMAKA

6. Rješavamo sustav jednačbi odnosno nepoznate kuteve zaokreta čvorova φ i kuteve zaokreta štapova Ψ .

$$0,417EI * \varphi_2 - 0,40 * \psi_{12} = 93,8 \quad \varphi_2 = -865 / EI$$

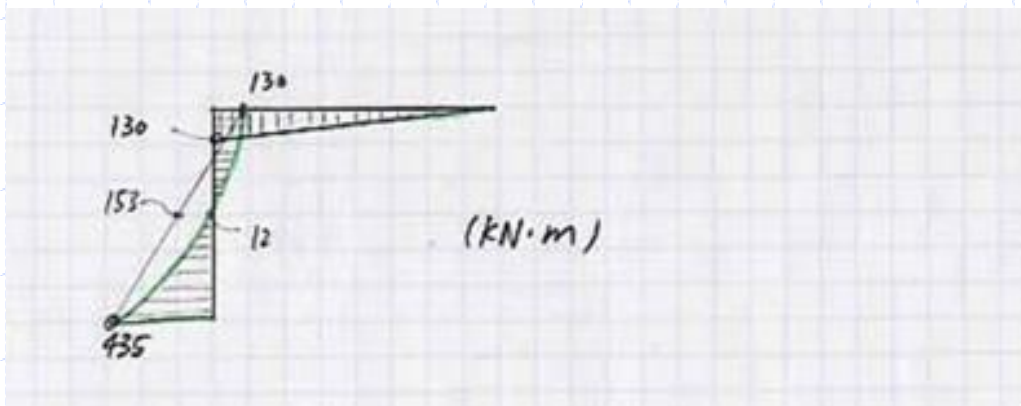
$$0,40EI * \varphi_2 - 0,80EI * \psi_{12} = 563 \quad \psi_{12} = -1140 / EI$$

7. Računamo momente na kraju štapova koristeći jednačbe iz koraka 3. i rješenja dobivena u koraku 6.

$$M_{12} = 0,133EI * (-865 / EI) - 0,40 * (-1140 / EI) + 93,8 = 435 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 0,267EI * (-865 / EI) - 0,40 * (-1140 / EI) - 93,8 = 131 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 0,15EI * (-865 / EI) = 130 \text{ kNm}$$



INŽENJERSKA METODA POMAKA

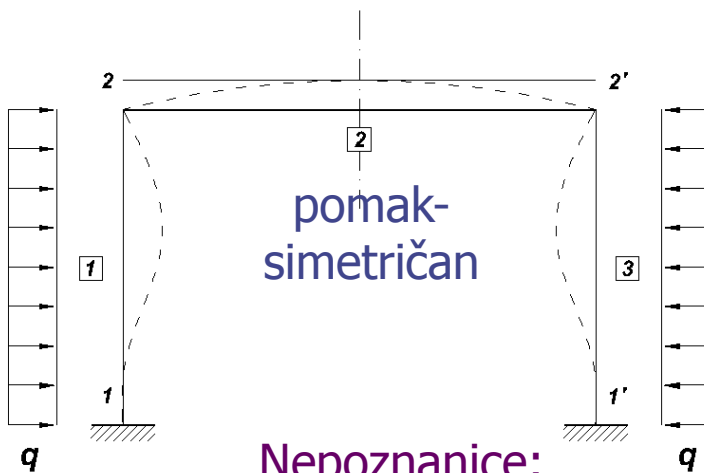
Olakšice

SIMETRIJA I ANTISIMETRIJA

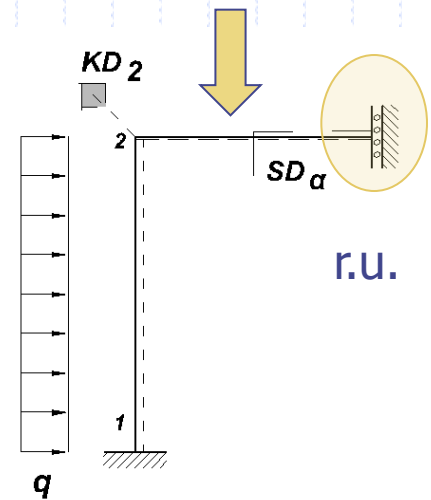
Sistem	Optereć.	M	T	N
simetričan	Simetrič.	sim	antisim	sim
	Antisim.	antisim	sim	antisim

simetričan model

Simetričan sustav, simetrično opterećenje: pola modela s rubnim uvjetima koji osiguravaju "simetrično ponašanje"

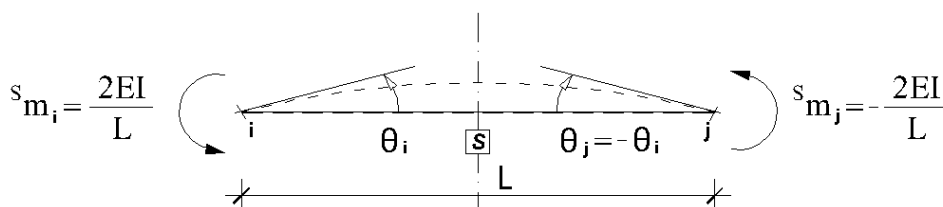


Nepoznanice:
 $\varphi_2, \varphi_{2'}, W$



Nepoznanice:
 φ_2

$$s_{m_i} = \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j, \quad \theta_j = -\theta_i \rightarrow s_{m_i} = \frac{2EI}{L} \theta_i$$

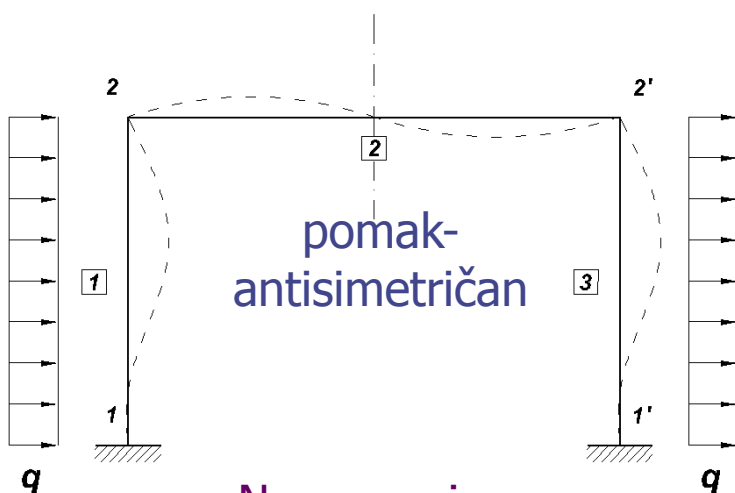


INŽENJERSKA METODA POMAKA

SIMETRIJA I ANTISIMETRIJA

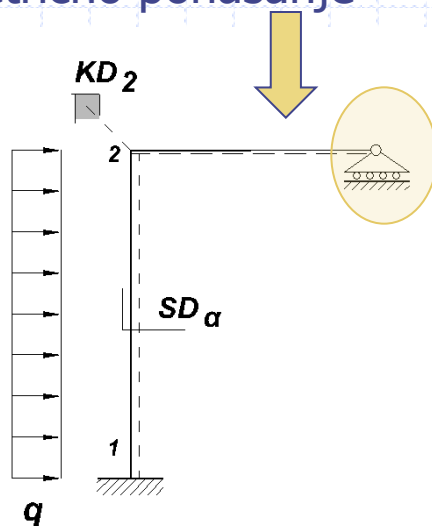
Antisimetričan model

Simetričan sustav, antisimetrično opterećenje: pola modela s rubnim uvjetima koji osiguravaju "antisimetrično ponašanje"



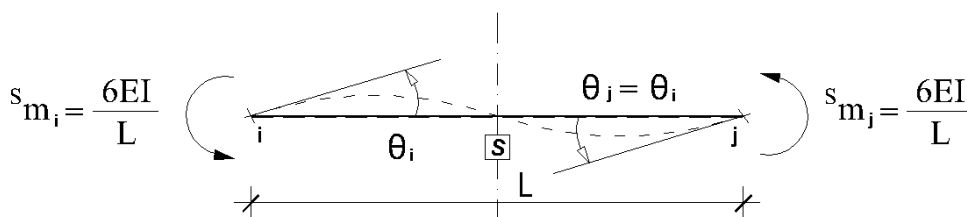
Nepoznanice:

$$\varphi_2, \varphi_{2'}, W$$



Nepoznanice:

$$\varphi_2, W$$

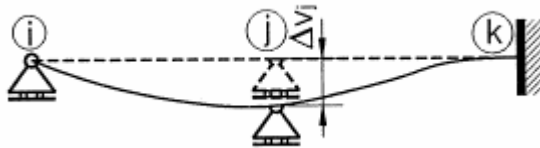


$$M_k = M_s + M_a$$

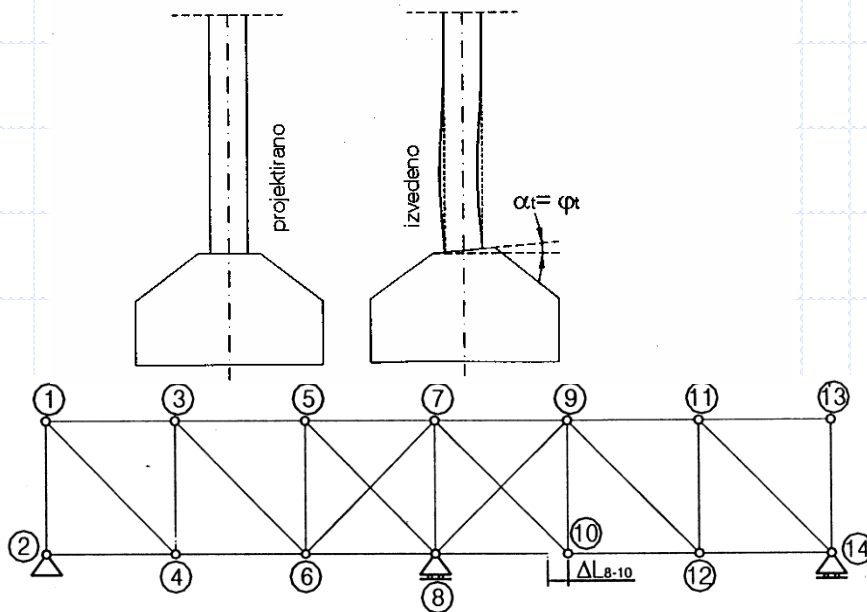
INŽENJERSKA METODA POMAKA

PRISILNI POMACI LEŽAJA

Od slijeganja ležaja



Od netočne izvedbe



$$S = EF\Delta S.$$

Za statički neodređene sustave dobije se polje sila i pomaka od istih.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

PRISILNI POMACI LEŽAJA

EFEKTE PRISILNIH POMAKA LEŽAJA

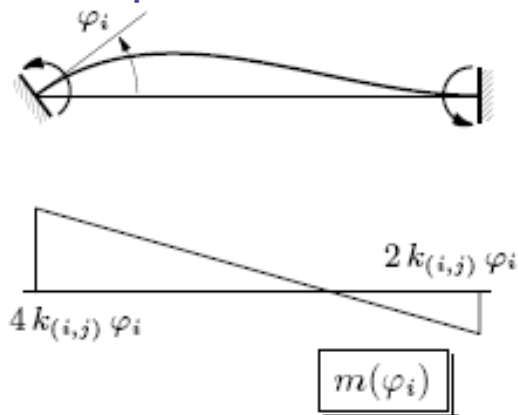
Kao opterećenje-uzimamo preko momenata upetosti $\overline{M}$

$\overline{M}$ se izražava preko izraza m za stanje slobodnih pomaka ;
 $m=f(\text{pomaka krajeva elementa})$

Proračunska šema:

1. Za zadani sustav crta se osnovni sustav(upeta šema)
2. Na njemu se oslobađa veza na mjestu i smjeru zadanog prisilnog pomaka, i daje prisilni pomak
3. Nacrta se plan pomaka ostatka upete konstrukcije-vidi se da li prisilni pomak izaziva na elementima φ ili ψ .
4. Računa se $\overline{M}$ iz izraza za m (stanje slobodnih pomaka)

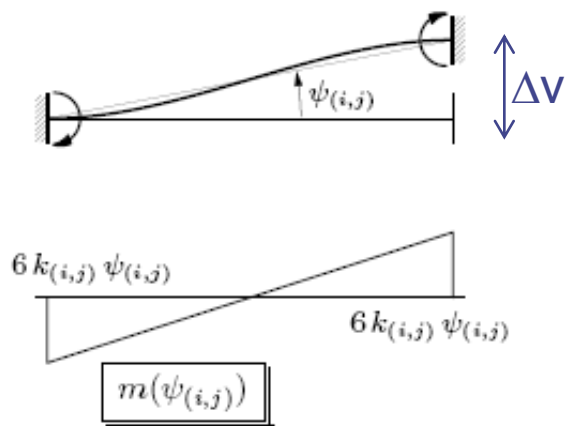
Prisilni pomak: zaokret čvora



$$\overline{M}_{ij} = 4 * k_{ij} * \varphi_i$$

$$\overline{M}_{ji} = 2 * k_{ij} * \varphi_i$$

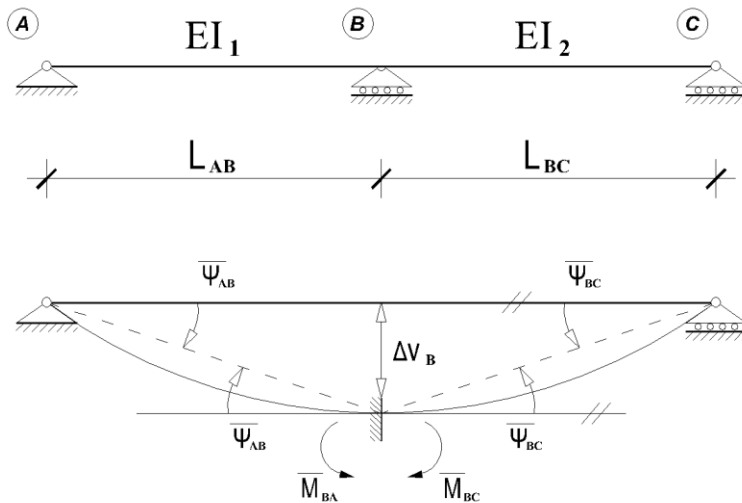
Prisilni pomak: zaokret štapa ψ



$$\overline{M}_{ij} = \overline{M}_{ji} = 6 * k_{ij} * \psi_i$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

PRISILNI POMACI LEŽAJA



$$\varphi_B = ?$$

$$\Delta v_B$$

$$\bar{\psi}_{BA} = \frac{\Delta v_B}{l_{AB}}$$

$$\bar{\psi}_{BC} = \frac{\Delta v_B}{l_{BC}}$$

$$\bar{M}_{BA} = -3 * k_{AB} * \bar{\psi}_{BA}$$

$$\bar{M}_{BC} = 3 * k_{CB} * \bar{\psi}_{BC}$$

M za stanje upetosti od opterećenja

Ukupne sile na kraju štapa:

$$M_{BA} = 3 * k_{AB} * \varphi_B + \bar{M}_{BA}$$

$$M_{BC} = 3 * k_{CB} * \varphi_B + \bar{M}_{BC}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

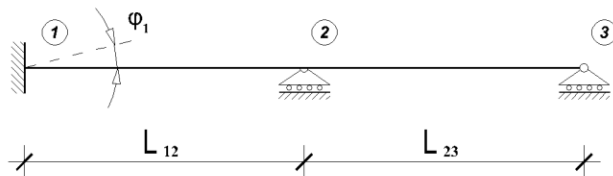
$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$3 * k_{AB} * \varphi_B - 3 * k_{AB} * \frac{\Delta v}{l_{AB}} + 3 * k_{CB} * \varphi_B + 3 * k_{CB} * \frac{\Delta v}{l_{BC}} = 0$$

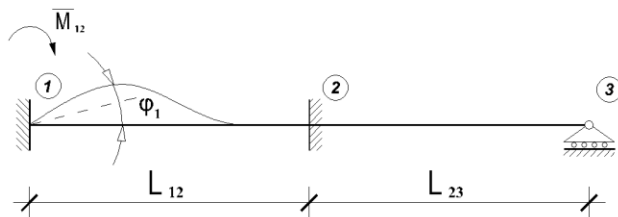
$$\Rightarrow \varphi_B \Rightarrow M_{BA}; M_{BC}$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

PRISILNI POMACI LEŽAJA



Upeta shema



$$\bar{M}_{23} = 0$$

$$\varphi_2 = 0 \quad \psi_{12} = 0$$

$$\psi_{23} = 0 \quad \varphi_3 = 0$$

Momenti upetosti jesu:

$$\bar{M}_{12} = 4 \cdot k_{12} \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_2 = 0$$

$$\bar{M}_{21} = 2 \cdot k_{12} \cdot \Phi_1$$

Konačni momenti na krajevima štapova jesu:

$$M_{12} = 2 \cdot k_{12} \cdot \Phi_2 + \bar{M}_{12}$$

$$M_{21} = 4 \cdot k_{21} \cdot \Phi_2 + \bar{M}_{21}$$

$$M_{23} = 3 \cdot k_{23} \cdot \Phi_2 + \bar{M}_{23}$$

Uvjeti ravnoteže čvora jesu:

$$\sum_{i=1}^2 M_{2i} = 0 \Rightarrow M_{21} + M_{23} = 0$$

odnosno

$$(4 \cdot k_{12} + 3 \cdot k_{23}) \cdot \Phi_2 + 2 \cdot k_{12} \cdot \Phi_1 = 0$$

Kut zaokreta čvora (2) jest:

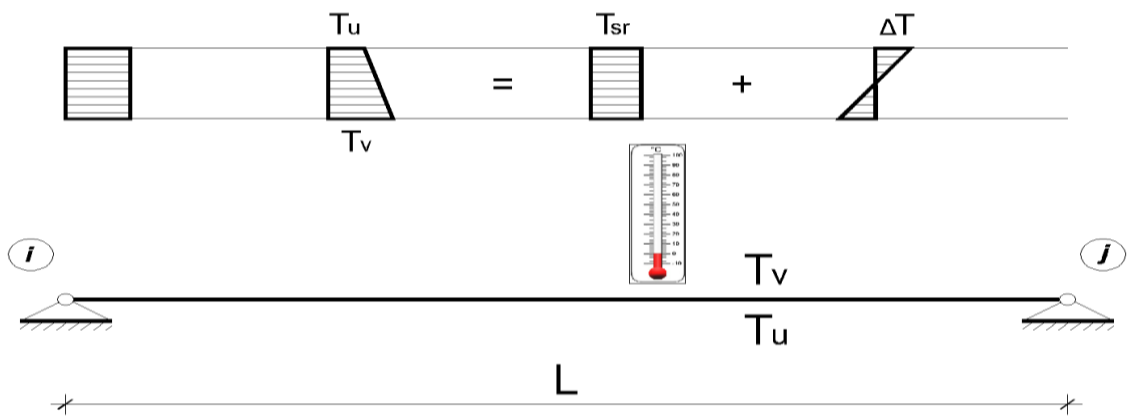
$$\Phi_2 = -\frac{2 \cdot k_{12} \cdot \Phi_1}{4 \cdot k_{12} + 3 \cdot k_{23}}$$

U stanju sl. pomaka $\varphi_1 = 0$ za upeti ležaj

$\Phi_2 = 0 \rightarrow$ jer u upetoj ščemi nisu spregnuti transl. pomaci

INŽENJERSKA METODA POMAKA

TEMPERATURA



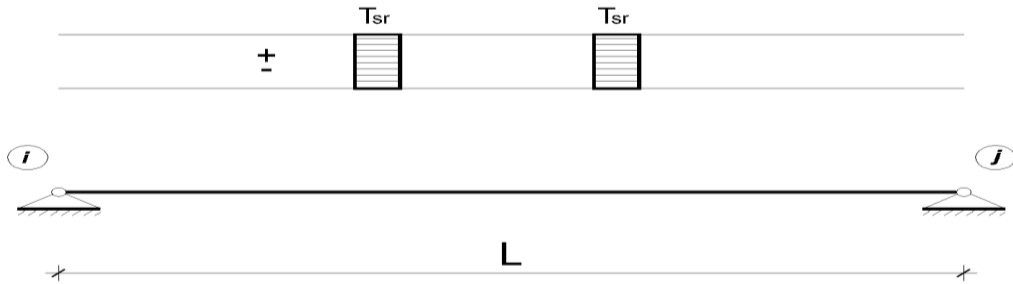
Prolaz temperature kroz elemente je linearan.
Rastavlja se na jednoliku/srednju i nejednoliku temperaturu.

Svaka temperatura uzrokuje drugačije sile i deformacije na elementima. To su sile upetosti, jer je temperatura opterećenje.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

JEDNOLIKA TEMPERATURA

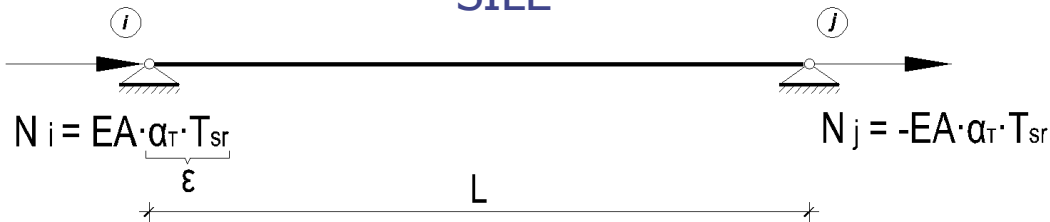
1) SREDNJA -JEDNOLIKA TEMPERATURA



POMACI



SILE



Ova temperatura uzrokuje pomake i drugih elemenata na koje ne djeluje. Pomaci $\perp$ na osu elemenata uzrokuju ψ kut zaokreta elementa i moment od istoga.

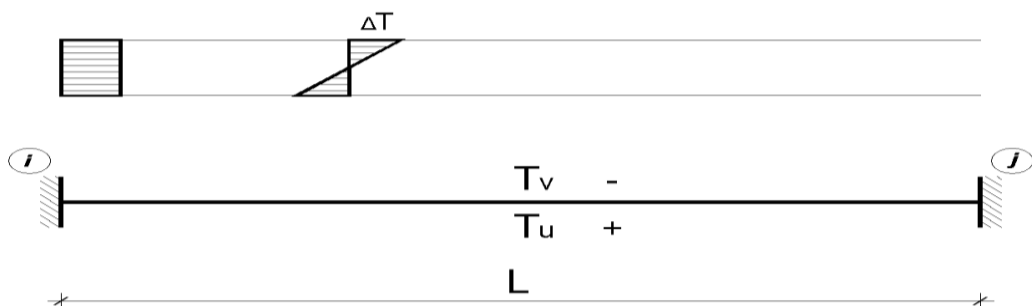
Za pomak koji je L na os nosača M se računa iz:

$$\bar{M}_{ij} = c_{ij} * \psi_{ij} * \varpi_{ij}$$

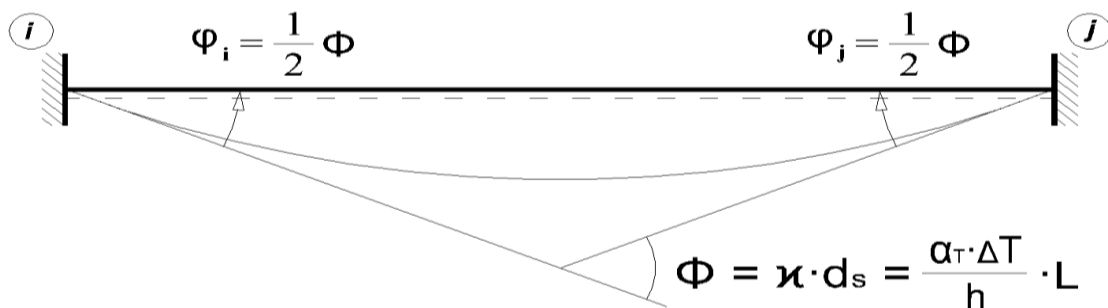
$$\bar{M}_{ij} = 6 * k_{ij} * \psi_{ij} * \varpi_{ij} \quad ; \quad \bar{M}_{ij} = 3 * k_{ij} * \psi_{ij} * \varpi_{ij}$$

INŽENJERSKA METODA POMAKA

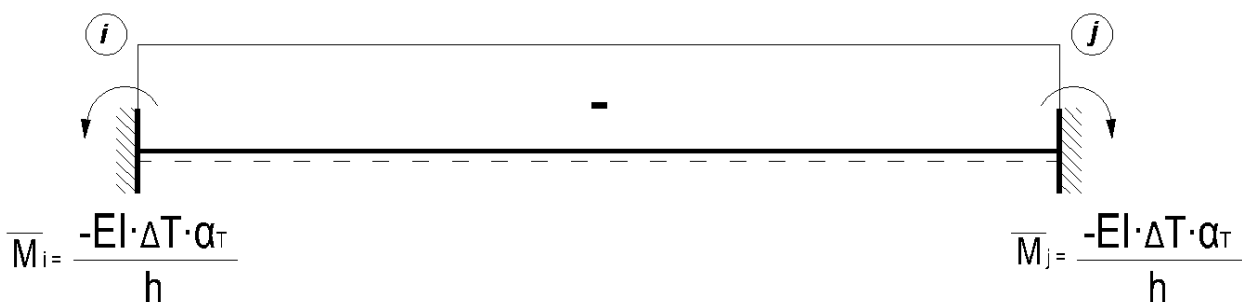
NEJEDNOLIKA-PROMJENJIVA TEMPERATURA



POMACI



SILE

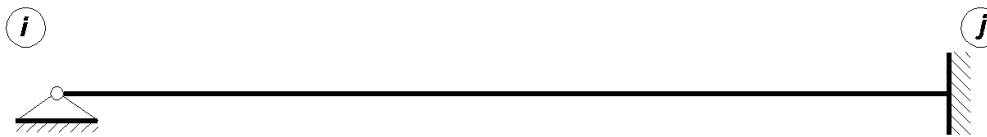
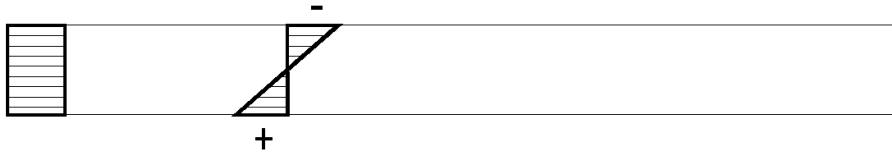


Ova temperatura uzrokuje sile i pomake samo na elementima na kojima djeluje.

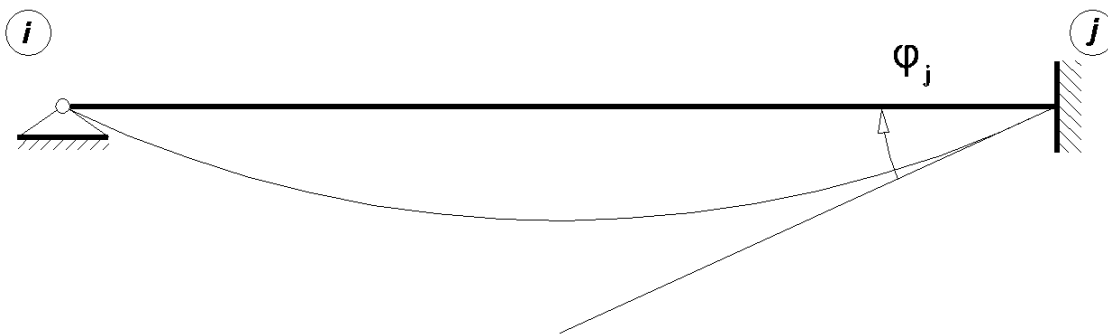
Sile računamo po izrazu ovisno o šemi upetosti.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

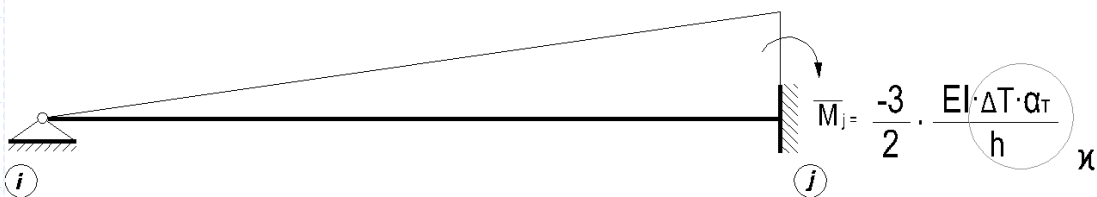
NEJEDNOLIKA-PROMJENJIVA TEMPERATURA



POMACI



SILE



INŽENJERSKA METODA POMAKA

TEMPERATURA-primjer.

Po približnoj metodi pomaka odrediti momente upetosti za zadano temperaturno polje.

E i I elemenata nebitni.

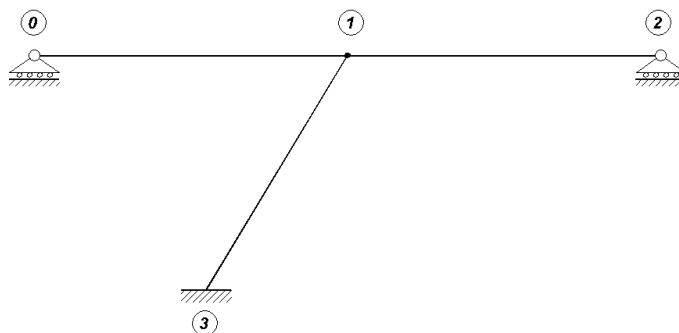
Na svakom elementu djeluje jednolika tsr. i nejednolika temperatura Δt .

Zadatak se rješava u 2 koraka.

Računamo $\overline{M}$ za:

a) tsr.

b) Δt

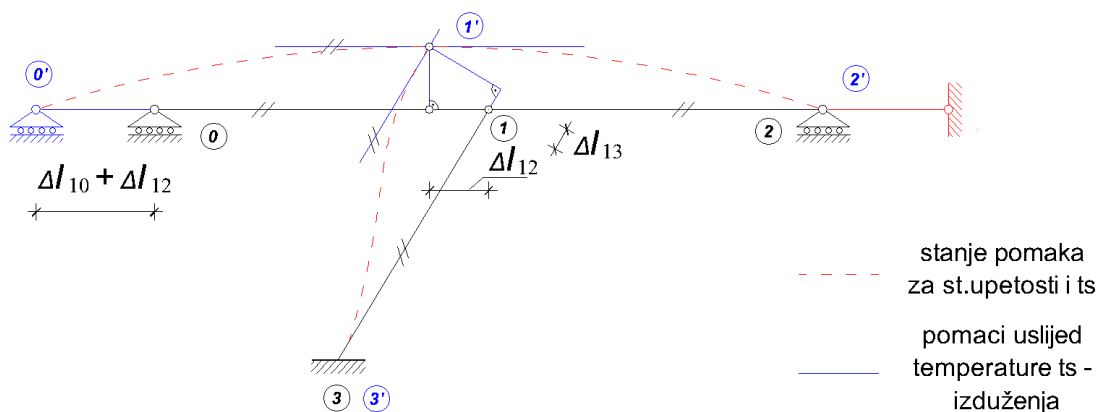


INŽENJERSKA METODA POMAKA

TEMPERATURA

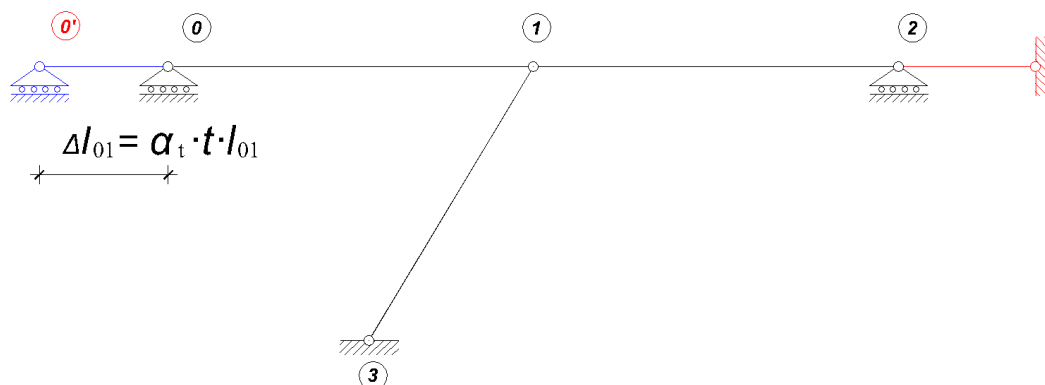
A) Djelovanje jednolike temperature

Za jednoliku temperaturu mijenjaju se samo duljine štapova → što izaziva pomake cijele konstrukcije.



Gledamo li jednoliko djelovanje temp. na svaki štap posebno možemo superponirati utjecaje.

a - A) Djelovanje ts na štap 01



$\overline{M}_{ij} = 0$ Ne zaokreću se ni čvorovi niti štapovi.

TEMPERATURA

The diagram illustrates a continuous beam structure with four supports labeled 0', 0, 1, and 2. Support 0' is a roller support on the left. Support 0 is a roller support. Support 1 is a vertical support. Support 2 is a roller support. A horizontal support is also shown at the end of the beam. The beam is divided into segments by these supports. Internal forces and moments are indicated: $\overline{M}_{10}$, $\overline{M}_{13}$, $\overline{M}_{12}$, and $\overline{M}_{31}$ are moments; Δl_{12} is a displacement; and α is an angle. The beam is shown in a deformed state with dashed lines.

The diagram shows a continuous beam with three supports labeled 0, 1, and 2. Support 0 is a roller support on the left. Support 1 is a roller support in the middle. Support 2 is a roller support on the right. A horizontal beam connects these supports. A vertical distance Δl_{13} is indicated between the beam and a point below it. An inclined member connects support 1 to support 3. The angle between the inclined member and the horizontal is α . Bending moments are labeled $\overline{M}_{10}$, $\overline{M}_{13}$, $\overline{M}_{12}$, and $\overline{M}_{31}$. A point 1' is marked on the beam near support 1. A dashed red line connects support 0 to support 1'.

INŽENJERSKA METODA POMAKA

TEMPERATURA

B) Za djelovanje nejednolike temperature Δt konstrukcija se miče prema slici.
Posljedica je promjena zakrivljenosti štapova.

