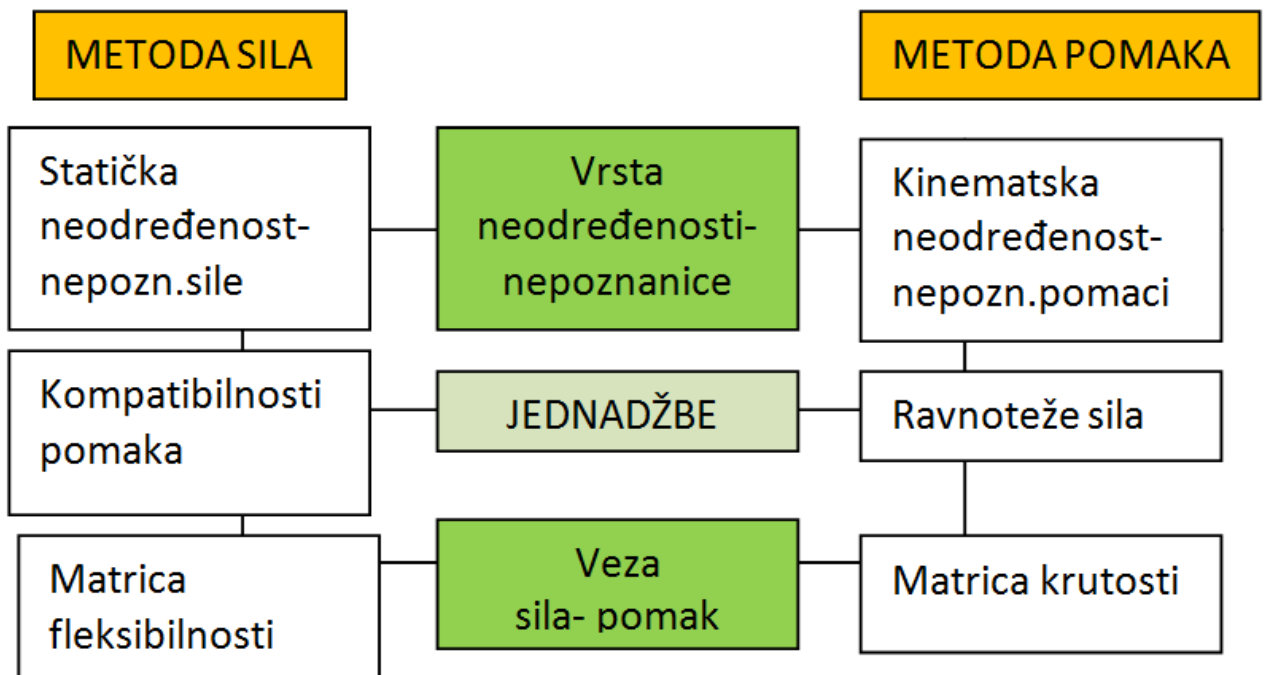


METODA SILA

RAVNINSKE KONSTRUKCIJE

- Metoda je bazirana na transformaciji danog sistema u statički određen **osnovni sistem**
- raskinute se veze nadomještaju silama koje odgovaraju reakcijama raskinutih veza
 - proračunavaju se prekobrojne statičke **sile** nužne za povrat u pomaka u početno stanje
- vrijednosti tih sila računamo iz uvjeta kompatibilnosti pomaka na mjestima raskidanja veza, sile moraju osigurati podudaranje pomaka na mjestima uklonjenih ležajeva sa stvarnim ležajnim uvjetima
- pomake proračunavamo metodom jedinične sile
- principom superpozicije zbrajamo pomake od zadanoga opterećenja i pojedinih (jediničnih) sila u raskinutim vezama
- sve se u M.S. računa na osnovnom sistemu (st.odr.)

STATIČKI NEODR. SUSTAVI



KONCEPT METODA PRORAČUNA

Metoda sila (fleksibilnosti)	Metoda pomaka(krutosti)
<ul style="list-style-type: none"> - Nepoznanice: prekobrojne sile X - Matrica fleksibilnosti D - Pomak zbog sile X (nepoznanice) $\delta(X=1)*X$ - Pomak zbog opterećenja = δ_0 - Za kompatibilnost pomaka treba: $\delta_0 + \delta * X = 0$ - rješenje prekobrojne sile X 	<ul style="list-style-type: none"> Nepoznanice: pomaci d ($\varphi, \Delta = \psi$) -Matrica krutosti K -Sila zbog pomaka d (nepoznan.) $K(u=1) * d$ -Sila zbog opterećenja = R_0 -Jednadžbe ravnoteže: $R_0 + K*d = 0$ -Rješenje pomaci : d
<p>Suvišna ograničenja –veze su otpuštene, računaju se nastali pomaci na mjestima istih-od zadanog opterećenja i suvišnih oslobođenih sila.</p> <p>Ove suvišne veličine-sile nastoje vratiti kontinuitet –podudaranje pomaka na mjestu raskinutih veza, koji je dobiven skidanjem suvišnih veza.</p>	<p>Dodatna pridržanja se dodaju i računaju se vrijednosti sila u njima –reakcije od vanjskog opt. (O.S.) Uklanjaju se pridržanja kako bi se omogućila deformacija i vratila ravnoteža-daju se početni pomaci koji uzrokuju reakcije koje uravnotežuju iste od vanjskih djelovanja.</p> <p>Iz jednadžbi ravnoteže se dobiju pomaci i nakon toga su određuju sile.</p>

METODA SILA

- KORACI u metodi sila su slijedeći:

1. Određivanje stupnja statičke neodređenosti n konstrukcije.

2. Transformiranje konstrukcije u statički određen sistem ukidanjem određenog broja statičkih ograničenja-veza, taj broj veza = uobičajeno stupnju statičke neodređenosti n . Ovo je moguće otpuštanjem vanjskih veza-ležajeva ili kreiranjem unutarnjih zglobova. Ovako kreiran sistem se zove **osnovni sistem**.

3. Na mjestu oslobođenih veza j , postavljaju se nepoznate sile X_j (sile u prekobrojnim vezama) koje odgovaraju reakcijama ukinutih ležaja

4. Primjena danog opterećenja ili prisilnih pomaka na osnovni sistem-u smislu crtanja dijagrama unutarnjih sila.

METODA SILA

Računaju se pomaci zbog zadanog opterećenja na mjestima ukin. veza u osn. sistemu. Ovi pomaci se označavaju δ_{10} , δ_{20} ..., δ_{n0}

5. Na mjestu ukinut. pridržanja-veza j u osn.sistemu, postavljaju se jedinične sile $X_j=1$. Izračunavaju se pomaci zbog ovih jediničnih sila na mjestima ukin. veza u osn. sistemu. Ovi pomaci se označavaju δ_{1j} , δ_{2j} ..., δ_{nj} .
6. Računanje sila X_1 do X_n koristeći uvjete kompatibilnosti s početom st.n. konstrukcijom. Ovi uvjeti transformirani osn. sistem vraćaju k početnoj st. n. konstrukciji, rješavanjem prekobrojnih sila koji pomake na osn. sistemu u oslobođenim vezama vraćaju na izvorno stanje to jest na veličinu 0. Ti uvjeti se matematički izračunavaju kao:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} = 0$$

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \dots + X_n \cdot \delta_{2n} = 0$$

$$\delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + \dots + X_n \cdot \delta_{3n} = 0$$

...

$$\delta_{n0} + X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} = 0$$

METODA SILA

Ovo je sistem n linearnih jednažbi sa n nepoznatih veličina. Pomaci su poznati, a nepoznate su sile X_j u oslobođenim vezama.

7. Izračunavanje sile S na određenim mjestima na st. n . konstrukciji korištenjem slijedećih funkcijskih veza:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 + \dots + X_n \cdot S_n$$

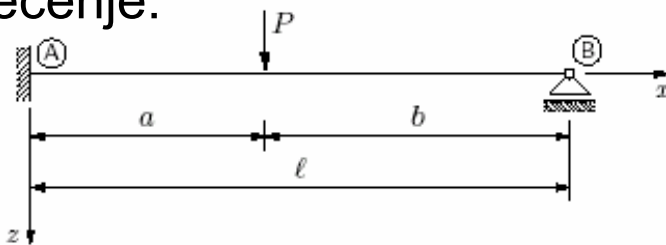
gdje su veličine X_j izračunate iz sistema jednažbi danih u prethodnom koraku.

- S_0 je sila uslijed zadanog opterećenja ili prisilnih pomaka na osnovnom sistemu.
- S_j je sila uslijed jediničnih sila $X_j=1$ na osnovnom sistemu.
- Veličina S može biti **moment savijanja, poprečna ili uzdužna sila, reakcija ili pomak.**

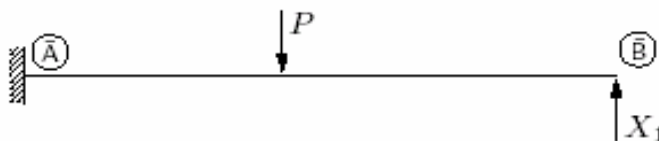
METODA SILA

- PRIMJER:

Izračunaj momente savijanja za slijedeću konstrukciju i opterećenje:



1. Određivanje stupnja statičke neodređenosti $n = 1$,
2. Transformiranje st. neod. konstrukcije u statički određen osnovni sistem.

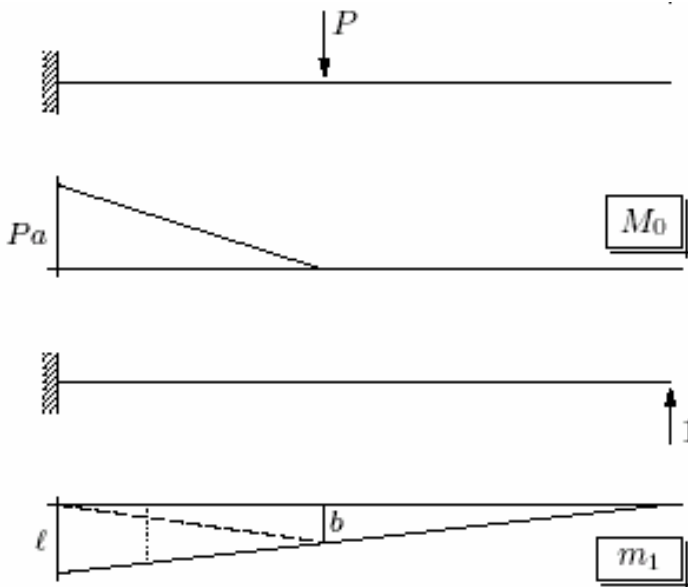


3. Na mjestu oslobođenih veza j , postavljaju se nepoznate sile X_j (sile u prekobrojnim vezama)

Osnovni sistem-konzola je opterećen s silom P u istom položaju kao na polaznom sustavu te silom X_1 .

PRIMJER:

4. Primjena danog opterećenja ili prisilnih pomaka, te jediničnih sila na osn. sistem



Računaju se pomaci zbog zadanog opterećenja na mjestima oslobođenih veza $\delta_B(P) = \delta_{1,0}$

$$\delta_{\bar{B}}(P) = \int_0^{\ell} \frac{M_0(x)m_1(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Pa^2 \right) \left(-\frac{2}{3} \ell - \frac{1}{3} b \right) = -\frac{P}{6EI} a^2 (2\ell + b).$$

PRIMJER:

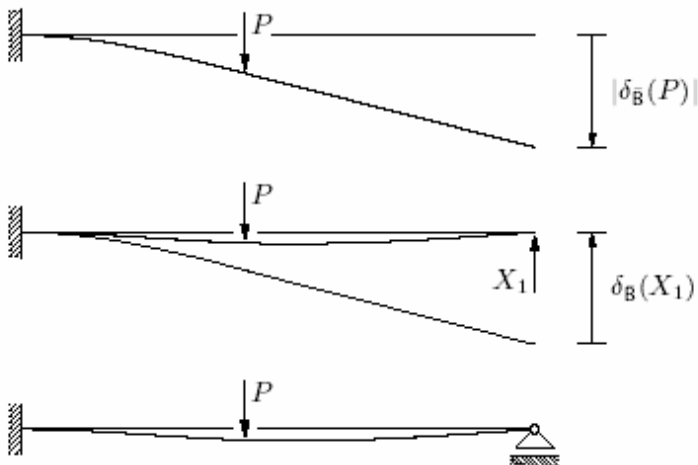
5. Računaju se pomaci zbog jediničnih sila na mjestima oslobođenih veza u osnovnom sistem.

$$\delta_B(X_1) = \delta_{1,1}$$

$$\delta_{1,1} = \int_0^\ell \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \ell^2 \right) \left(\frac{2}{3} \ell \right) = \frac{1}{3EI} \ell^3.$$

6. Računanje sila X_1 do X_n koristeći uvjete kompatibilnosti s početnom st.n.konstrukcijom.

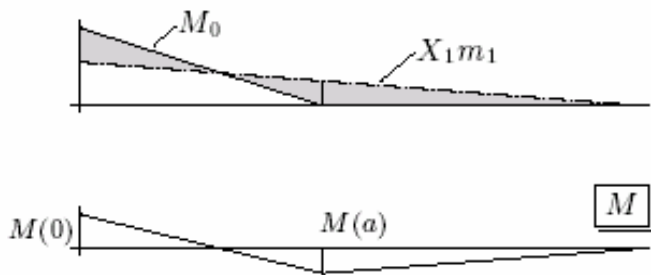
$$\delta_B = \delta_B(P) + \delta_B(X_1) = 0$$



$$\delta_{1,1} * X_1 + \delta_{1,0} = 0 \rightarrow X_1$$

PRIMJER:

7. Računanje sila S na određenim mjestima na st. n. konstrukciji.

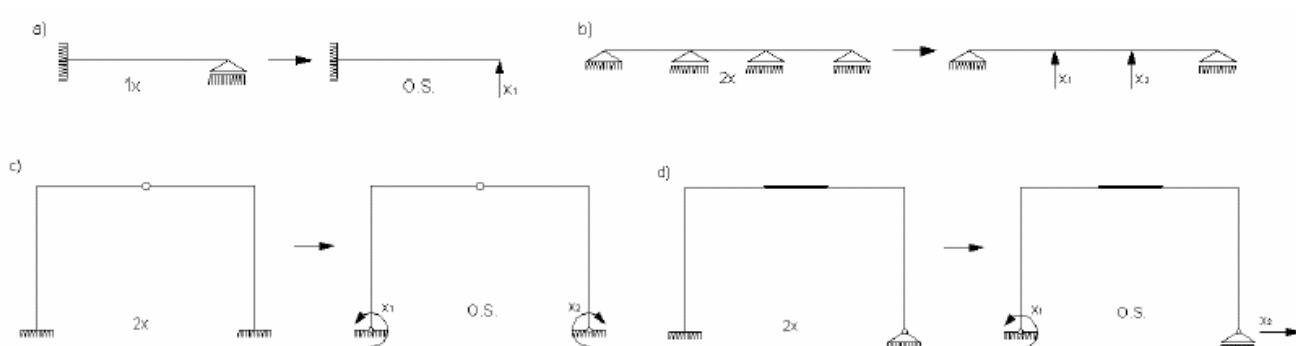


$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x) \rightarrow \text{princip superpozicije}$$

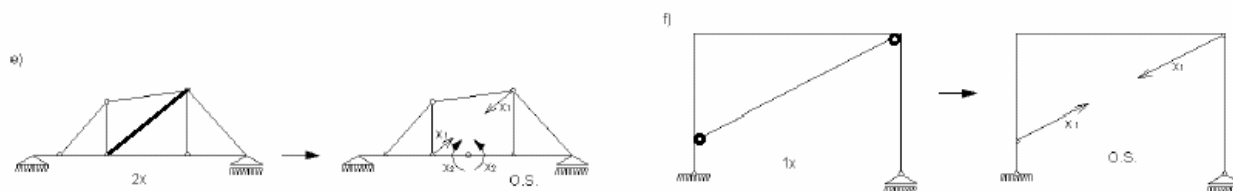
IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

- **Osnovni sistem** nastaje tako da se u zadanom sistemu(st.neodr.) **raskine određeni broj vanjskih ili unutarnjih veza.**

a) Presjecanje vanjskih veza:

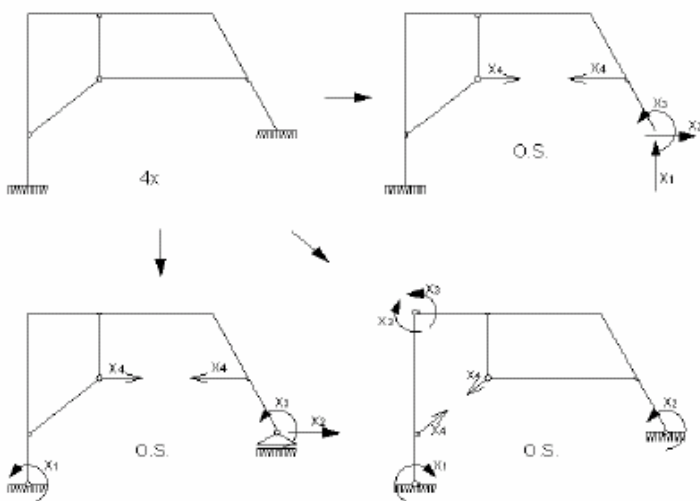


b) Presjecanje unutarnjih veza:

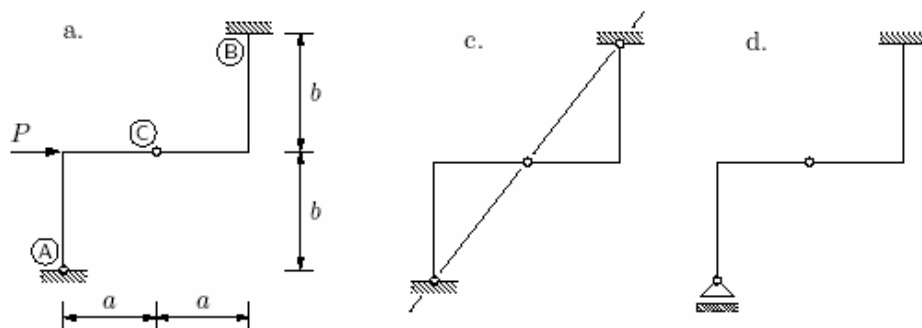
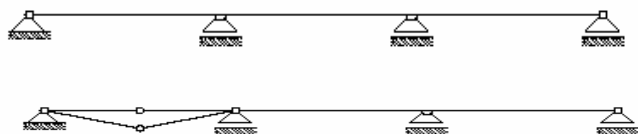


IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

c) Presjecanje unutarnjih i vanjskih veza:



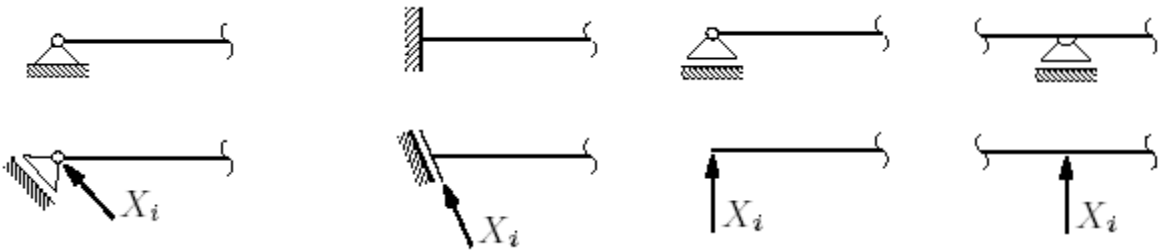
Osnovni sistem mora biti geometrijski nepromjenjiv.



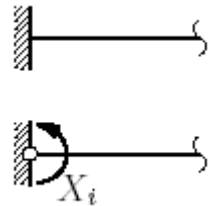
IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

Mogućnosti prekida veza

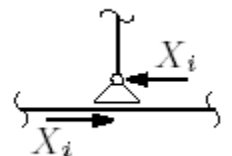
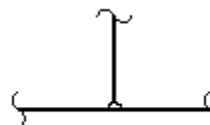
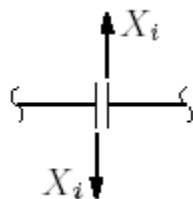
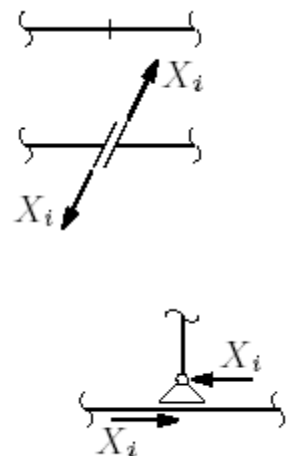
- Zamjena nepomičnog ležaja pomičnim po odabranom pravcu;



- Ubacivanjem zgloba upeti ležaj pretvaramo u zglobni;



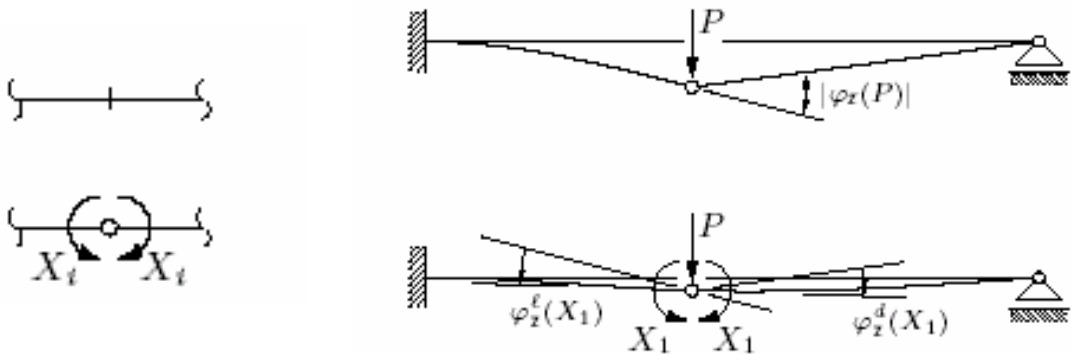
- Zamjena unutarnje krute veze vezom koja omogućava relativni translacijski pomak po odabranom pravcu.



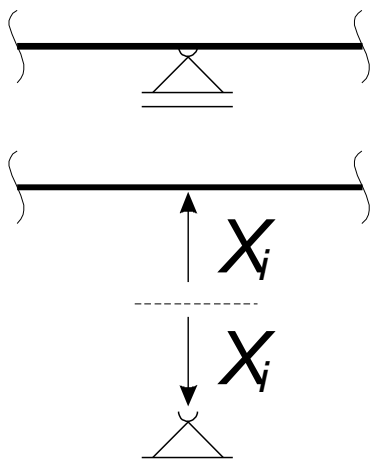
IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

- **Mogućnosti prekida veza**

Ubacivanje zgloba u neki presjek;



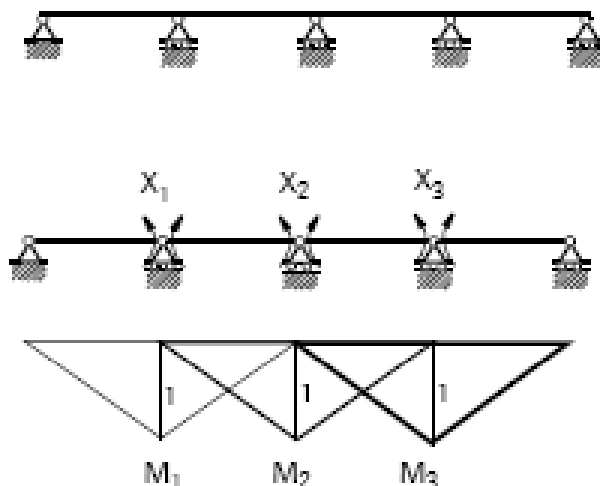
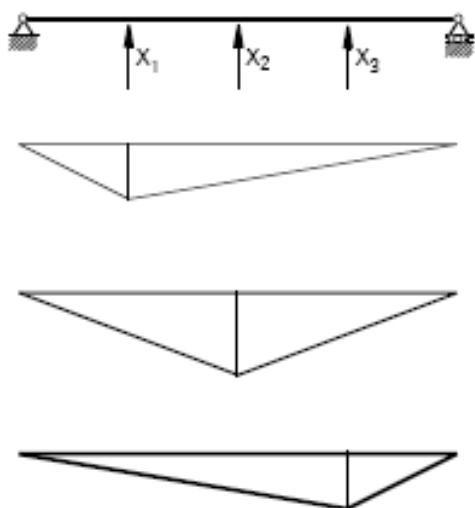
Presijecanjem prekobrojnih veza oslobađa se par sila i za vanjske i unutarnje veze.



-u slučaju elastično popustljive podloge i drugi par oslobođene sile utječe na sile i pomake u konstrukciji.

IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

- Izbor osnovnog sistema bitno utječe na složenost i trajanje proračuna metodom sila
- Osnovni sistem treba odabrati tako da **integracijski izrazi budu što kraći.**
- Pri izboru o.s. teži se da **iščežavanje momenata savijanja na što većem dijelu sustava** odnosno da se puno koeficijenata poništi kao posljedica toga.

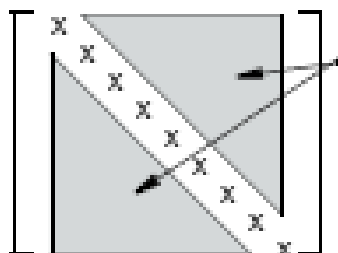


$$\delta_{1,0} = \int_0^{\ell} \frac{M_0(x) m_1(x)}{E I(x)} dx$$

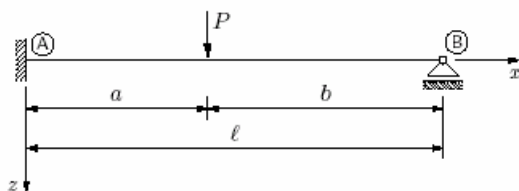
$$\delta_{1,1} = \int_0^{\ell} \frac{m_1^2(x)}{E I(x)} dx$$

IZBOR OSNOVNOG SUSTAVA

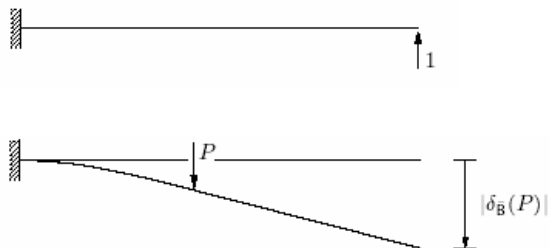
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$



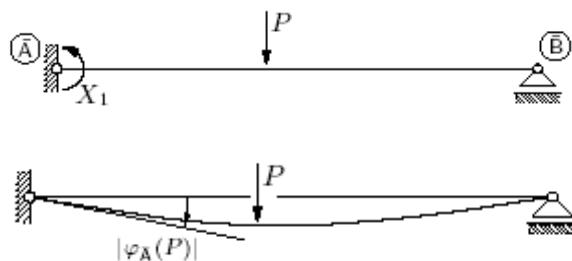
- Osnovni sistem treba biti **blizak zadanom sistemu po deformacijama.**



1. O.S.

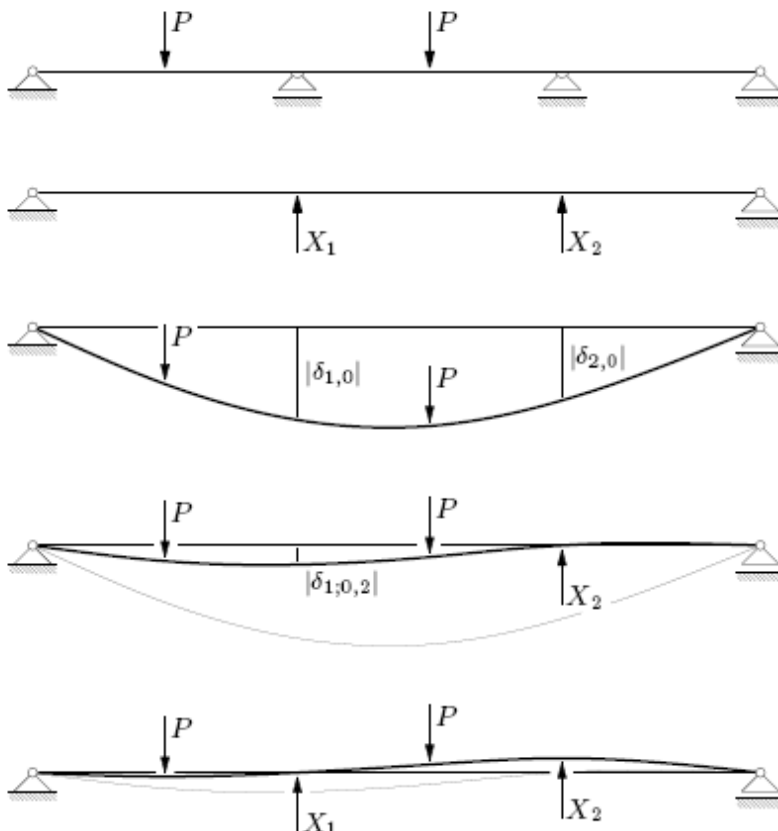


2. O.S.



JEDNADŽBE METODE SILA

- Jednadžbe za određivanje nepoznatih veličina X_i statički neodređenih veličina formalni su zapis uvjeta kompatibilnosti pomaka. U metodi sila **uvjetima kompatibilnosti pomaka izražavamo zahtjev za podudaranjem progibnih linija zadanoga i osnovnog sistema** na koji djeluju i prekobrojne veličina.



JEDNADŽBE METODE SILA

Na pomak hvatišta sile X_2 utječe, osim sila P i X_2 , i sila X_1 , pa je ukupni pomak te točke

$$\delta_2 = \delta_{2,0} + X_1 \delta_{2,1} + X_2 \delta_{2,2};$$

Uvjeti kompatibilnosti $\delta_1 = 0$ i $\delta_2 = 0$ daju sustav jed.

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = 0,$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0.$$

Uvjete kompatibilnosti ne možemo zadovoljavati pojedinačno, jedan neovisno o ostalima, jer svaka prekobrojna sila utječe na pomake hvatišta pomaka svih drugih prekobrojnih sila. Formalni je izraz tih uvjeta stoga sustav jednačbi.

Uvjeti kompatibilnosti traže istodobno isčezavanje svih tih n pomaka:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jednačbe metode sila-**jednačbe kompatibilnosti, kontinuiteta ili neprekinutosti.**

JEDNADŽBE METODE SILA

- u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \cdots & \delta_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \vdots \\ \delta_{n,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$DX + \Delta = 0.$$

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \cdots & \delta_{n,n} \end{bmatrix}$$

Matrica popustljivosti ili matrica fleksibilnosti.

D je simetrična oko gl. dijagonale jer je $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$,
i pozitivno definitna, kvadratna.

JEDNADŽBE METODE SILA

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} [m_i(x) \kappa_j(x) + n_i(x) \varepsilon_j(x)] dx,$$

$\delta_{i,j}$ -koeficijenti popustljivosti ili koeficijenti fleksibilnosti značenja pomaka hvatišta sila X_i po pravcima njihova djelovanja zbog djelovanja jediničnih sila u hvatištima, na pravcima i u smislu sila X_j .

$\delta_{i,j}$ → uzrok
 ↓
 mjesto

$$\delta_{i,j} \geq 0$$

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[\frac{m_i(x) m_j(x)}{E I(x)} + \frac{n_i(x) n_j(x)}{E F(x)} \right] dx,$$

$$\delta_{i,i} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[\frac{m_i^2(x)}{E I(x)} + \frac{n_i^2(x)}{E F(x)} \right] dx$$

$$\delta_{i,i} > 0$$

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left(\frac{m_i m_j}{E I} + \frac{n_i n_j}{E F} \right) dx = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left(\frac{m_j m_i}{E I} + \frac{n_j n_i}{E F} \right) dx = \delta_{j,i}$$

JEDNADŽBE METODE SILA

Vektor Δ -vektor vanjskih sila

$$DX + \Delta = 0.$$

Komponente $\delta_{i,0}$ vektora Δ su pomaci su hvatišta sila X_i po pravcima njihova djelovanja, uslijed vanjskih utjecaja.

$$\delta_{i,0} = \sum_{(s)} \int_0^{\ell_s} [m_i(x) \kappa_0(x) + n_i(x) \varepsilon_0(x)] dx,$$

Vanjska djelovanja- opterećenja, utjecaj temperaturnih promjena i prisilni pomaci.

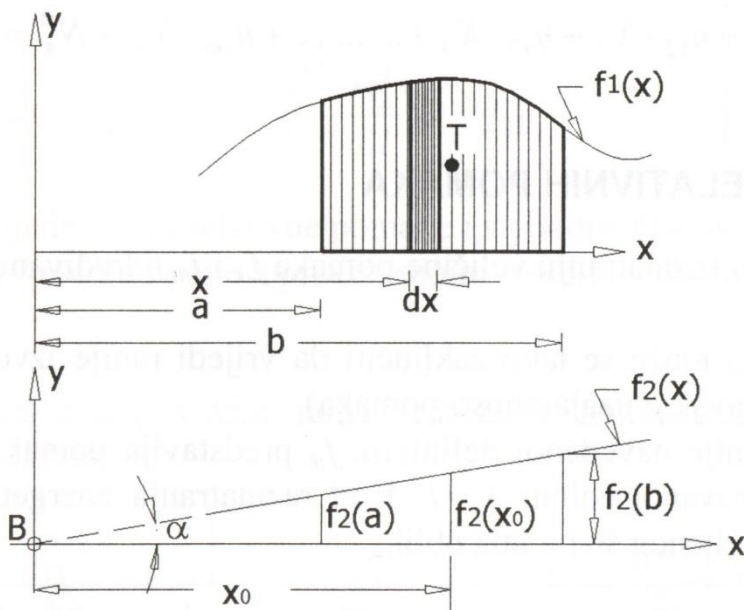
$$\kappa_0(x) = \frac{M_0(x)}{E I(x)} + \alpha_t \frac{\Delta t(x)}{h(x)},$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{N_0(x)}{E F(x)} + \alpha_t t_s(x).$$

$\delta_{i,0}$ i $\delta_{i,j}$ veličine pomaka određujemo iz deformacijske energije sistema.

VEREŠČAGINOV TEOREM

- Integracija za dobivanje veličina $\delta_{i,0}$ i $\delta_{i,j}$ se vrši preko cijele konstrukcije. Često se zanemaruje doprinos poprečne sile, kao i N sile gdje ona nije dominantno djelovanje.
- Integracija pomoću teorema Vereščagina (pod uvjetom da je barem jedna podintegralna funkcija linearna).

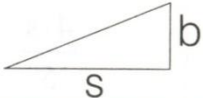
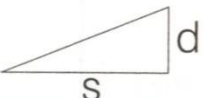
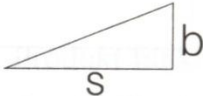
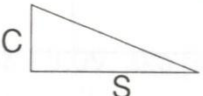
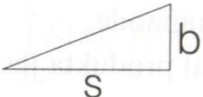
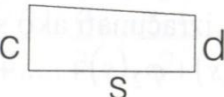
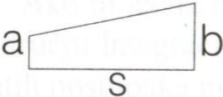
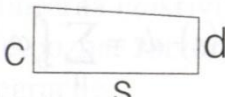
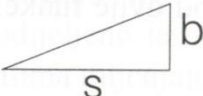
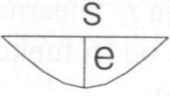
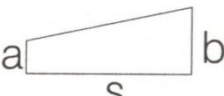
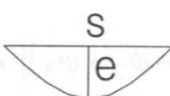


$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot dx = A_1 \cdot f_2(x_0)$$

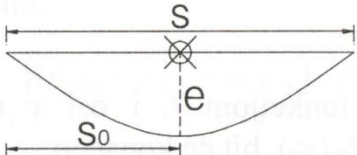
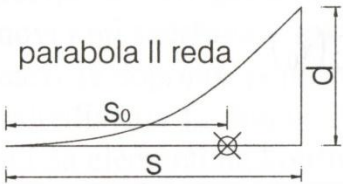
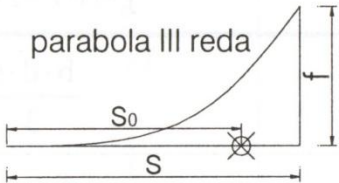
VEREŠČAGINOV TEOREM

Vereščaginov teorem:

Integral umnoška dviju neprekinutih funkcija u granicama (a,b), pri čemu je jedna funkcija linearna, jednak je umnošku površine, omeđene nelinearnom funkcijom i osi x, u granicama integracije, i ordinate linearne funkcije ispod težišta površine nelinearne funkcije.

$f_1(s)$	$f_2(s)$	$\int_b^s f_1(s) \cdot f_2(s) \cdot ds$
		$\frac{b \cdot d \cdot s}{3}$
		$\frac{b \cdot c \cdot s}{6}$
		$\frac{(2 \cdot b \cdot d + c \cdot b) \cdot s}{6}$
		$\frac{(2ac + 2bd + abcd) \cdot s}{6}$
		$\frac{b \cdot e \cdot s}{3}$
		$\frac{(a + b) \cdot e \cdot s}{3}$

VEREŠČAGINOV TEOREM

Funkcija	Površina	Položaj težišta s_0
	$\frac{2 \cdot s \cdot e}{3}$	$\frac{s}{2}$
<p>parabola II reda</p> 	$\frac{s \cdot d}{3}$	$\frac{3 \cdot s}{4}$
<p>parabola III reda</p> 	$\frac{f \cdot s}{4}$	$\frac{4 \cdot s}{5}$

VANJSKE I UNUTARNJE SILE

ODREĐIVANJE VANJSKIH I UNUTARNJIH SILA U ST.N.S.

- Osnovni sistem, koji je uz zadana djelovanja opterećen i prekobrojnim silama i momentima čije su vrijednosti rješenja jednadžbi kompatibilnosti, nalazi se u **istom mehaničkom stanju** kao i zadani statički neodređeni sistem pod zadanim djelovanjima. Njihove se progibne linije poklapaju, a vrijednosti prekobrojnih veličina u osnovnom sistemu jednake su vrijednostima reakcija ili unutarnjih sila u zadanom sistemu na mjestima zamišljenih prekida.
- Vrijednost bilo koje veličine u statički neodređenom sistemu možemo izračunati kao algebarski zbroj vrijednosti te veličine u osnovnom sistemu od zadanih djelovanja i od statički neodređenih veličina.

VANJSKE I UNUTARNJE SILE

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^n R_i, \quad R = R_0 + \sum_{i=1}^n X_i r_i.$$

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i X_i$$

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_i X_i$$

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^n N_i X_i$$

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i X_i$$

$$\delta = \delta_0 + \sum_{i=1}^n \delta_i X_i$$

PRISILNI POMACI LEŽAJA I TEMPERATURA

- Kod statički neodređenih sistema – odgovor reakcije i unutarnje sile od opterećenja; zbog prisilnih pomaka te pri promjenama temperature.
- Utjecaj temperaturnih promjena na savijanje i na produljenje/skraćenje dijelova sistema- dodatnim pribrojnicima u izrazu za slobodne članove $\delta_{i;0}$

$$EI_C \delta_{ik} = \int \frac{I_C}{I} M_i M_k ds + \int \frac{I_C}{A} N_i N_k ds + \int \frac{EI_C}{GA_Q} Q_i Q_k ds$$

$$EI_C \delta_{i0} = \int \frac{I_C}{I} M_i M_0 ds + \int \frac{I_C}{A} N_i N_0 ds + \int \frac{EI_C}{GA_Q} Q_i Q_k ds$$

$$+ EI_C \alpha_t \int \left(N_i t_0 + M_i \frac{\Delta t}{h} \right) ds + \underbrace{EI_C \delta}_{\text{Pris. pomak ležaja}}$$

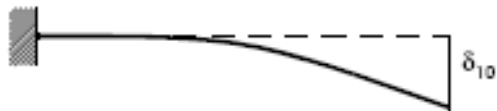
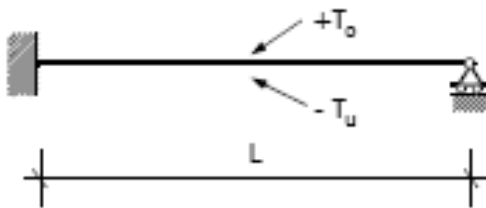
temperatura

Anlagerverschiebung

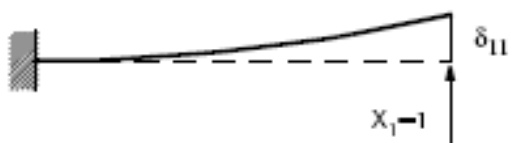
Pris. pomak ležaja

PRISILNI POMACI LEŽAJA I TEMPERATURA

- PRIMJER: Na statički n.sust. djeluje temp. razlika gornjeg i donjeg pojasa, odrediti utjecaj iste na nosač. Utjecaj su sile i pomaci.



•Progib o.s. uslijed temperature



•Progib o.s. uslijed X_1

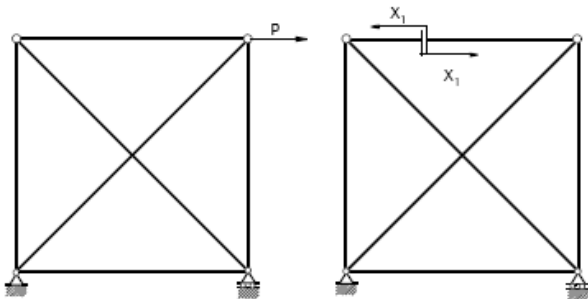
$$\delta_{10} = \alpha_t \int_0^L M_1 \frac{\Delta T}{h} ds \quad \Delta T = (T_u - T_o)$$

$$EI_C \delta_{11} = \int_0^L M_1^2 ds$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

PRISILNI POMACI LEŽAJA I TEMPERATURA

- Kod rešetke utjecaj temperature je na izduženje ili skraćenje štapova.

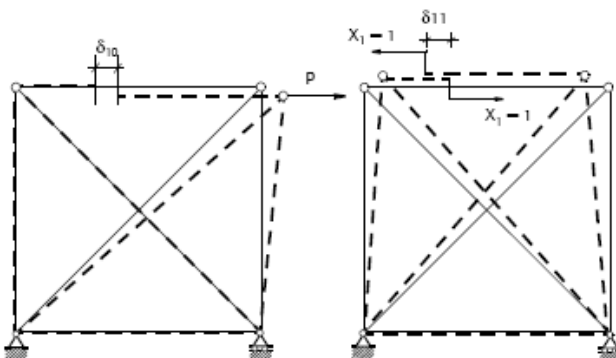


St.n.r.

st.odr.sistem

$$EA_C \delta_{10} = \sum_{m=1}^M \left[\left(N_0 N_1 \frac{A_C}{A} s \right)_m + \underbrace{EA_C \alpha_t \sum_{m=1}^M (N_1 t_0 s)_m}_{\text{Temperaturanteil}} \right]$$

$$EA_C \delta_{11} = \sum_{m=1}^M \left(N_1^2 \frac{A_C}{A} s \right)_m$$



Def.uslijed vanj. djelovanja / Def. uslijed $X_1=1$

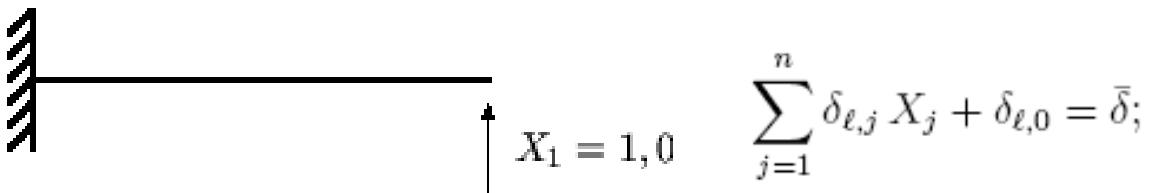
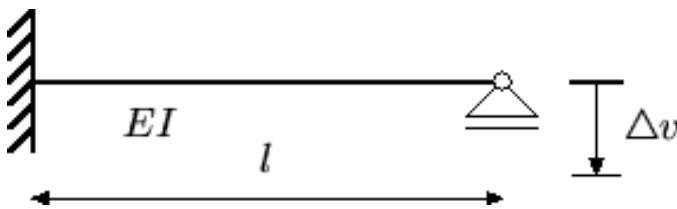
PRISILNI POMACI LEŽAJA I TEMPERATURA

Prisilni pomaci-translancijski pomaci ležaja po pravcima po kojima ti ležaji sprečavaju pomake i zaokret, pomaci uslijed netočne izvedbe.

Oblik jednadžbi kompatibilnosti ovisi o izboru osnovnoga sistema i razlikujemo dva slučaja.

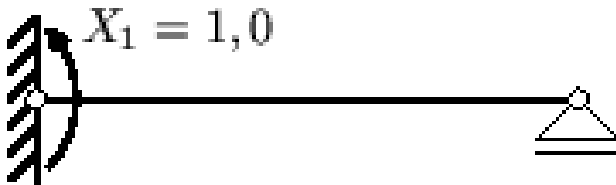
(1)

Osnovni je sistem odabran tako da je hvatište jedne od sila koje zamjenjuju raskinute veze u točki čiji je pomak zadan i da pritom ta sila djeluje na pravcu zadanog pomaka.



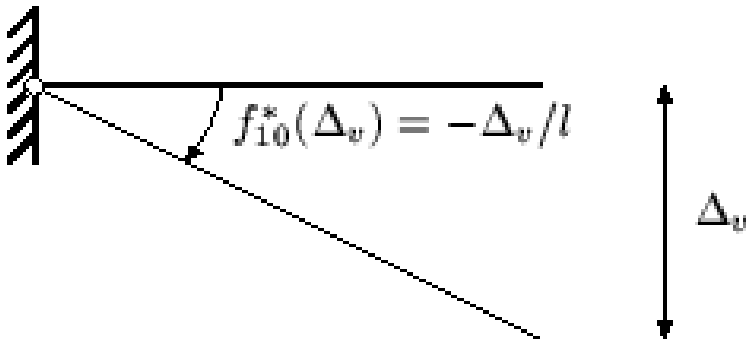
PRISILNI POMACI LEŽAJA I TEMPERATURA

- (2)
- Osnovni je sistem takav da ni jedna zamjenjujuća sile ne djeluje na pravcu zadanog pomaka u točki čiji je pomak zadan (hvatište sile može biti u toj točki, ali se pravac djelovanja sile ne smije poklapati s pravcem pomaka; ako pak sila djeluje na pravcu pomaka, njeno hvatište ne smije biti točka čiji je pomak zadan



Ni jedna prekobrojna sila ne djeluje na pravcu prisilnog pomaka u točki čiji je pomak zadan. Svi pomaci po pravcima raskinutih veza moraju iščeznuti. Utjecaji prisilnoga pomaka -u $\delta_i;0$ - raskidanjem odgovarajuće veze osnovni sistem pretvaramo u mehanizam, crtamo plan pomaka za zadani pomak i iz njega očitavamo pomake hvatišta sila X_i koje pribrajamo vrijednostima $\delta_i;0$.

PRISILNI POMOCI LEŽAJA I TEMPERATURA



$$f_{11}^* \cdot X_1 + f_{10}^*(\Delta_v) = 0.$$