UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

- Kod statički neodređenih sistema – odgovor su reakcije i unutarnje sile od opterećenja; zbog prisilnih pomaka te pri promjenama temperature.
- Utjecaj temperaturnih promjena na savijanje i na produljenje/skraćenje dijelova sistema- dodatnim pribrojnicima u izrazu za slobodne članove $\delta_{i,0}$

$$EI_C\,\delta_{ik} = \int \frac{I_C}{I} M_i M_k\,ds + \int \frac{I_C}{A} N_i N_k\,ds + \int \frac{EI_C}{GA_Q} Q_i Q_k\,ds$$

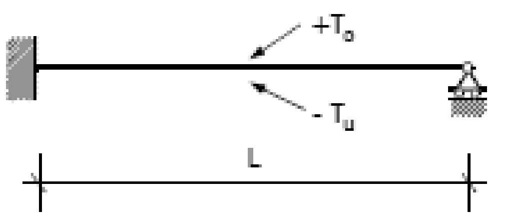
$$EI_C\,\delta_{i0} = \int \frac{I_C}{I} M_i M_0\,ds + \int \frac{I_C}{A} N_i N_0\,ds + \int \frac{EI_C}{GA_Q} Q_i Q_k\,ds$$

$$+ \underbrace{EI_C \alpha_t \int \left(N_i t_0 + M_i \frac{\Delta t}{h} \right) ds}_{\text{temperatura}} + \underbrace{EI_C\,\delta}_{\text{Priš.pomak ležaja}}$$

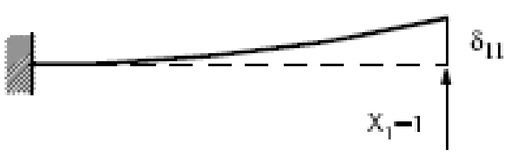
Temperatur Auflagerverschiebung

UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

- PRIMJER: Na statički n.sust. djeluje temp. razlika gornjeg i donjeg pojasa, odrediti utjecaj iste na nosač. Utjecaj su sile i pomaci.



•Progib o.s. uslijed temperature



•Progib o.s. uslijed X_1

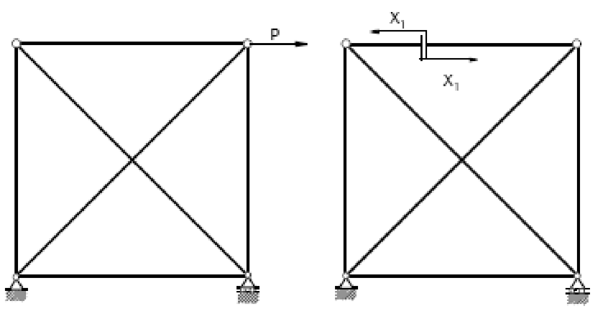
$$\delta_{10} = \alpha_t \int_0^L M_1 \frac{\Delta T}{h}\, ds \qquad \Delta T = (T_u - T_o)$$

$$EI_C\, \delta_{11} = \int_0^L M_1^{\,2}\, ds$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

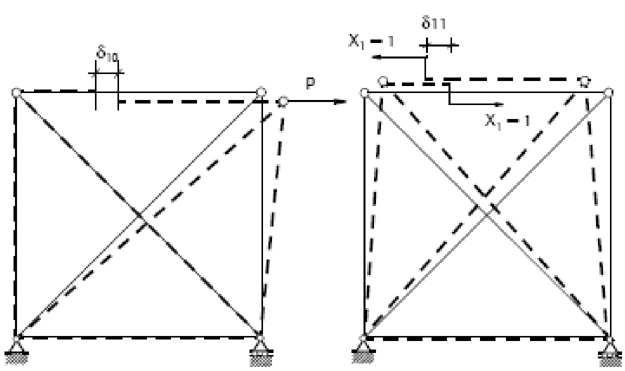
- Kod rešetke utjecaj temperature je na izduženje ili skraćenje štapova.



St.n.r. st.odr.sistem

$$EA_C\,\delta_{10} = \sum_{m=1}^{M}\left[\left(N_0\,N_1\,\frac{A_C}{A}\,s\right)_m + \underbrace{EA_C\,\alpha_t \sum_{m=1}^{M}\left(N_1\,t_0 s\right)_m}_{\text{Temperaturanteil}}\right]$$

$$EA_C\delta_{11} = \sum_{m=1}^{M}\left(N_1^2\,\frac{A_C}{A}\,s\right)_m$$



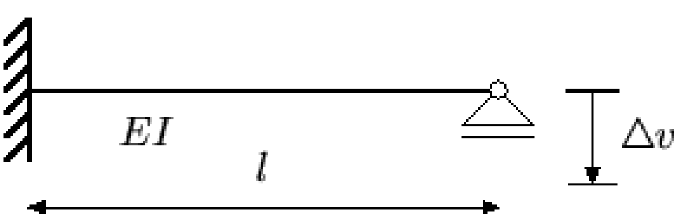
Def.uslijed vanj. djelovanja / Def. uslijed X_1=1

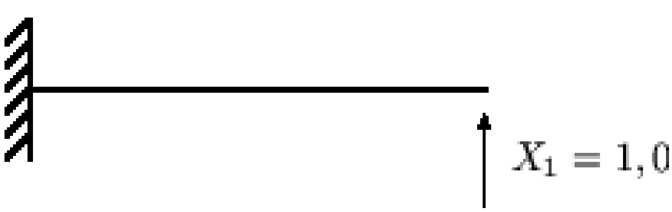
UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

Prisilni pomaci-translancijski pomaci ležaja po pravcima po kojima ti ležaji sprečavaju pomake i **zaokret**, **pomaci uslijed netočne izvedbe**.

Oblik jednadžbi kompatibilnosti ovisi o izboru osnovnoga sistema i razlikujemo dva slučaja.

(1) Pomaci od sila i vanjskog opterećenja u prekobrojnim vezama jednaki su prisilnim pomacima konstrukcije-ako o.s. odabran da su skinute veze na pravcima prisilnih pomaka. Jednadžbe diskontinuiteta umjesto kontinuiteta.

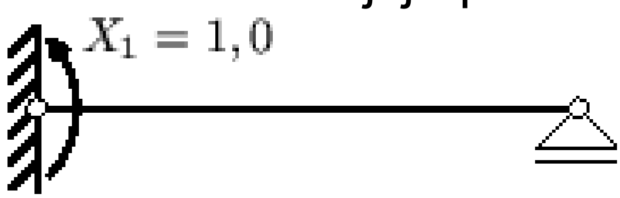


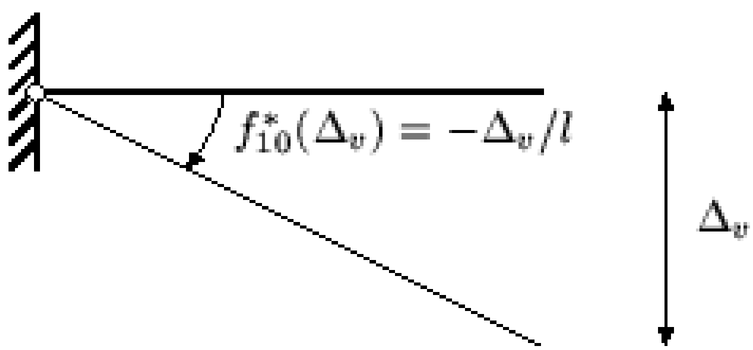


$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{\ell,j} X_j + \delta_{\ell,0} = \bar{\delta};$$

UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

(2) Osnovni je sistem takav da ni jedna zamjenjujuća sile ne djeluje na pravcu zadanog pomaka u točki čiji je pomak zadan.



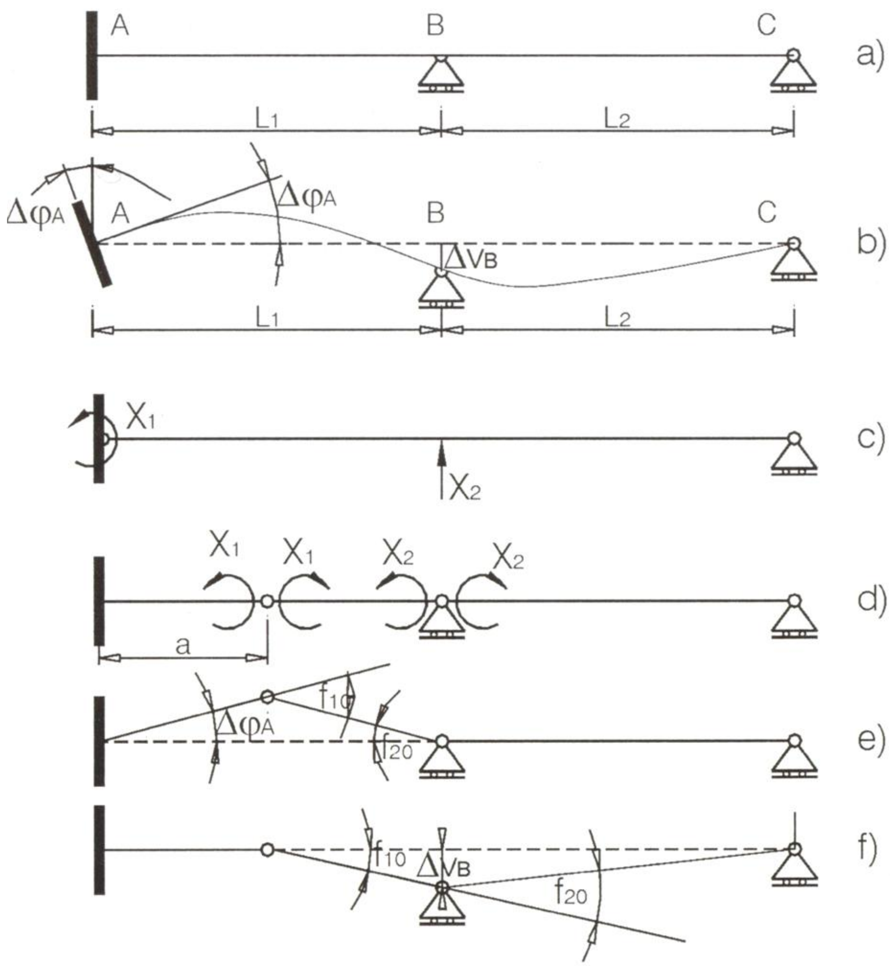


$$f_{11}^{*} \cdot X_1 + f_{10}^{*}(\Delta_v) = 0.$$

Svi pomaci po pravcima raskinutih veza moraju isčeznuti. Utjecaji prisilnoga pomaka -u δi,0 raskidanjem odgovarajuće veze osnovni sistem pretvaramo u mehanizam, crtamo plan pomaka za zadani pomak i iz njega očitavamo pomake hvatišta sila Xi koje pribrajamo vrijednostima δi,0.

UTJECAJ PRISILNIH POMAKA I TEMPERATURE U METODI SILA

<u>Primjer</u>: kontinuirani nosač kod kojeg je ležaj A izveden zaokrenut za kut $\Delta\varphi_A$ a ležaj B pomaknut za Δv_B.



1. OSN.SIST.

2. OSN.SIST.

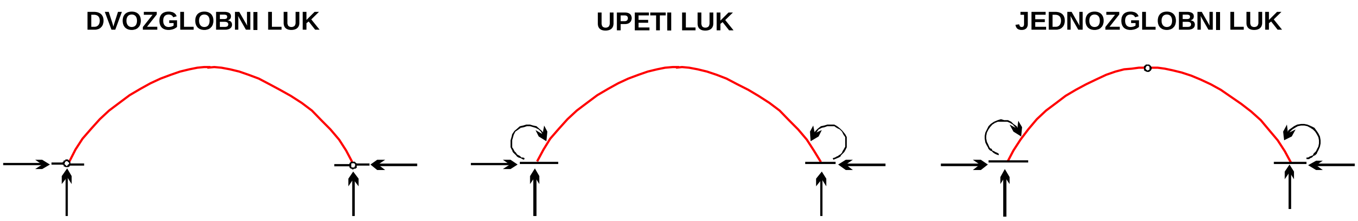
1. OSN.SIST. $X1*\delta 11+X2*\delta 12+\delta 10=\Delta\varphi A$

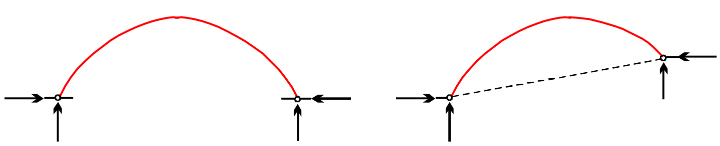
$X1*\delta 12+X2*\delta 22+\delta 20= -vB$

2. OSN.SIST. $X1*\delta 11+X2*\delta 12+\delta 10= 0 \Rightarrow \delta 10(\Delta\varphi A); \quad \delta 10(vB)$

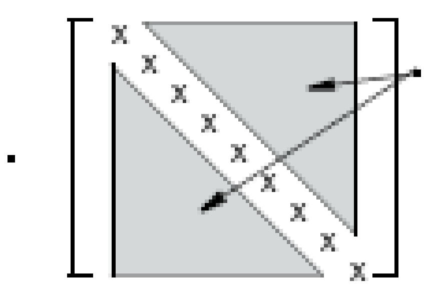
$X1*\delta 12+X2*\delta 22+\delta 20= 0 \Rightarrow \delta 20(\Delta\varphi A); \quad \delta 20(vB)$

SREDIŠTE ELASTIČNOG POMAKA





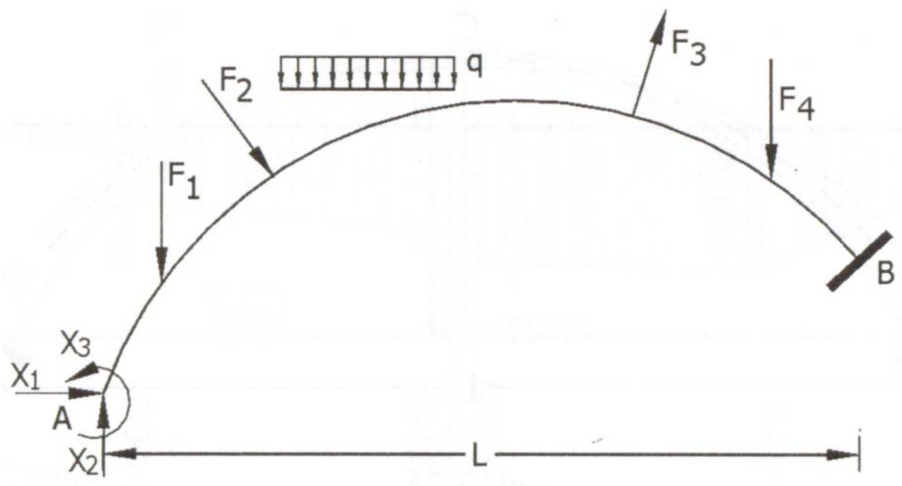
Ukoliko luk ima 1 os simetrije i jednaku krutost
po duljini mogu se uvesti neka olakšanja u proračunu.



Teži se da je što više δi,j=0.

SREDIŠTE ELASTIČNOG POMAKA

Odabrani osnovni sustav:



Jednadžbe kontinuiteta:

$$X_1 f_{11} + X_2 f_{12} + X_3 f_{13} + f_{10} = 0$$
$$X_1 f_{21} + X_2 f_{22} + X_3 f_{23} + f_{20} = 0$$
$$X_1 f_{31} + X_2 f_{32} + X_3 f_{33} + f_{30} = 0$$

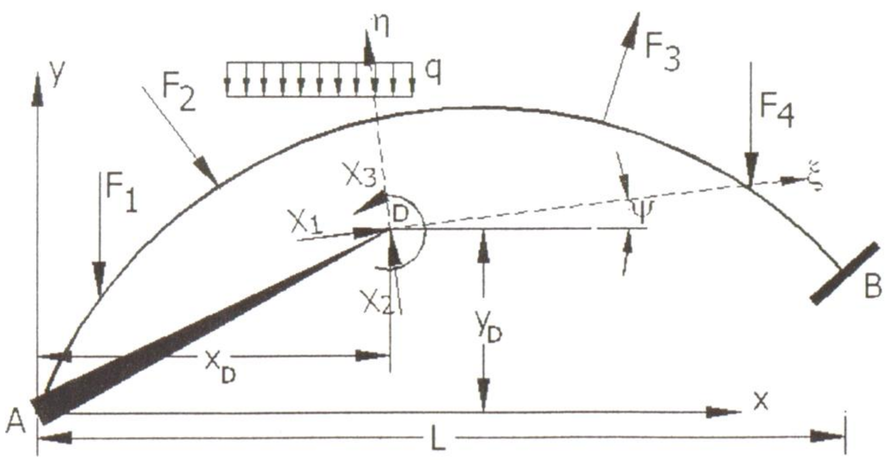
$$\Rightarrow \quad \mathrm{F} \cdot \mathrm{X} + \mathrm{F}_0 = 0$$

Izračun elemenata matrice fleksibilnosti, koja je simetrična oko glavne dijagonale, relativno je jednostavan ako je luk konstantnog poprečnog presjeka a os zadana analitičkim izrazom podgodnim za direktnu integraciju.

Kada je oblik dobiven kao tlačna linija ili je promjenjivog poprečnog presjeka, koeficijenti matrice fleksibilnosti se računaju numeričkom integracijom.

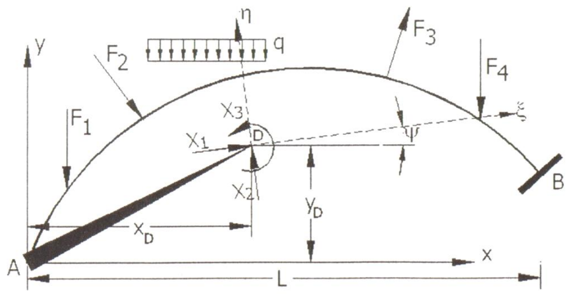
SREDIŠTE ELASTIČNOG POMAKA

Tražimo točku u ravnini luka u kojoj elementi matrice fleksibilnosti van glavne dijagonale iščezavaju čime se dobiju tri neovisne jednadžbe s po jednom nepoznanicom (ortogonalizacija matrice).



$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \quad odnosno \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{f_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \end{Bmatrix}$$

Točka (D) u kojoj nepoznate sile imaju pretpostavljeno svojstvo zove se SREDIŠTE ELASTIČNOG POMAKA ili ELASTIČNO TEŽIŠTE.



SREDIŠTE EL. POMAKA

Veličine x_D, y_D i kut ψ određuju se iz uvjeta da su izvan dijagonalni elementi matrice popustljivosti jednaki 0.

- Element "teške linije" $dg = ds/EI(s)$
- Duljina teške linije $\int_A^B \frac{ds}{EI(s)} = \int_A^B dg = G$
- Statički moment oko osi y $\int_A^B \frac{x \cdot ds}{EI(s)} = \int_A^B x \cdot dg = S_G(y)$
- Statički moment oko osi x $\int_A^B \frac{y \cdot ds}{EI(s)} = \int_A^B y \cdot dg = S_G(x)$

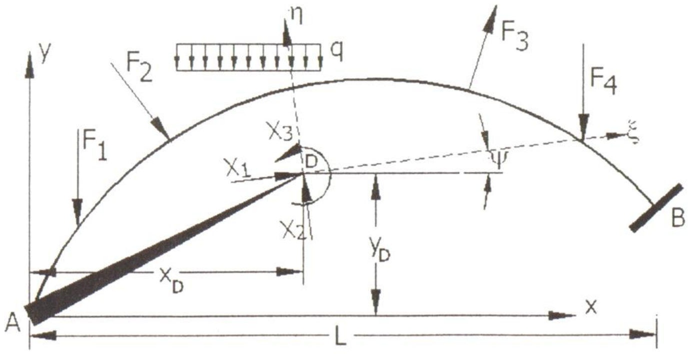
Ako su $I_G(x')$ moment inercije oko osi $x'=x-x_D$, $I_G(y')$ moment inercije oko osi $y'=y-y_D$ i $I_G(x',y')$ centrifugalnimoment inercije "teške linije" luka oko točke D, tada vrijedi:

$$\int_A^B \frac{(x-x_D)^2}{EI(s)}\,ds = \int_A^B (x-x_D)^2\,dg = I_G(y')$$

$$\int_A^B \frac{(y-y_D)^2}{EI(s)}\,ds = \int_A^B (y-y_D)^2\,dg = I_G(x')$$

$$\int_A^B \frac{(x-x_D)(y-y_D)}{EI(s)}\,ds = \int_A^B (x-x_D)(y-y_D)\,dg = I_G(y',x')$$

Napomena: zanemaren doprinos uzdužnih i poprečnih sila elementima matrice popustljivosti.



SREDIŠTE EL. POMAKA

Koordinate točke D i kut ψ mogu se izraziti pomoću karakteristika "teške linije":

$$x_D = \frac{S_G(y)}{G}, \quad y_D = \frac{S_G(x)}{G}, \quad \psi = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2 \cdot I_G(x', y')}{I_G(y') - I_G(x')} \right)$$

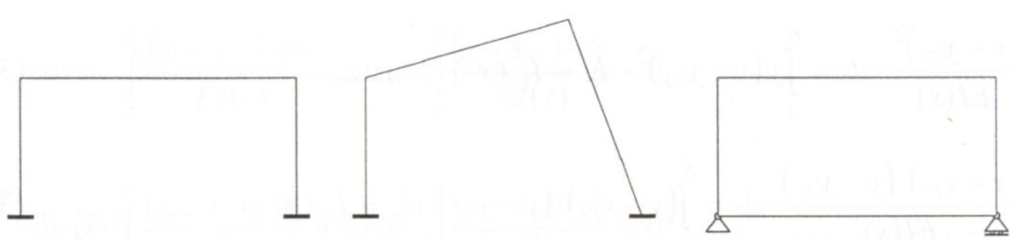
dok su dijagonalni elementi matrice popustljivosti:

$$f_{11} = \int_A^B \frac{m_1^2}{EI} ds = I_G(x') cos^2 \psi - I_G(x', y') sin 2\psi + I_G(y') sin^2 \psi$$

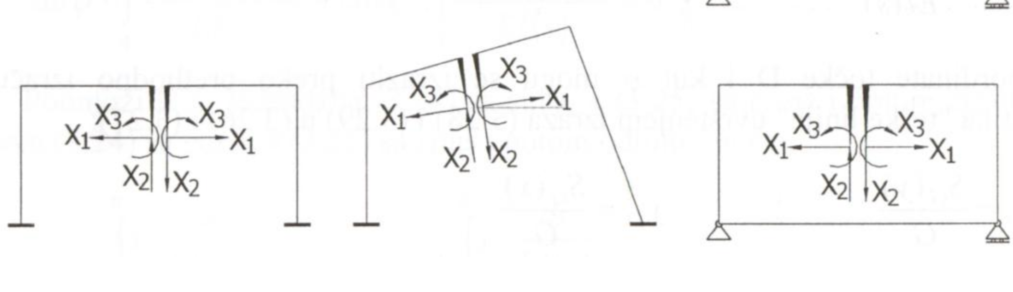
$$f_{22} = \int_A^B \frac{m_2^2}{EI} ds = I_G(x') sin^2 \psi + I_G(x', y') sin 2\psi + I_G(y') cos^2 \psi$$

$$f_{33} = \int_A^B \frac{m_3^2}{EI} ds = G$$

Simetrični lukovi: $x_D = L/2$, $\psi = 0 \Rightarrow$ ostaje samo y_D.



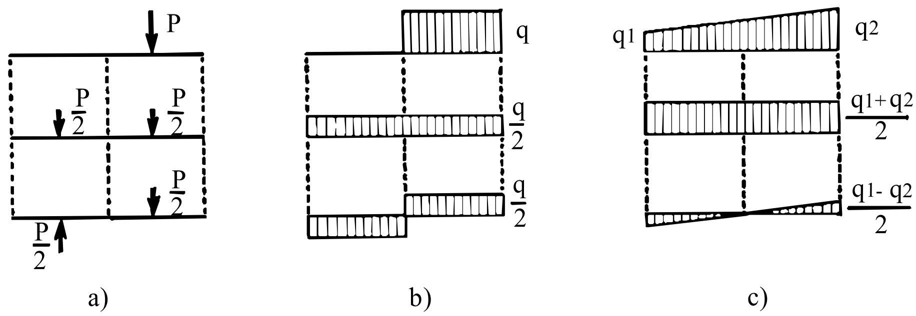
Nosači poligonalnih oblika



PRIMJER:

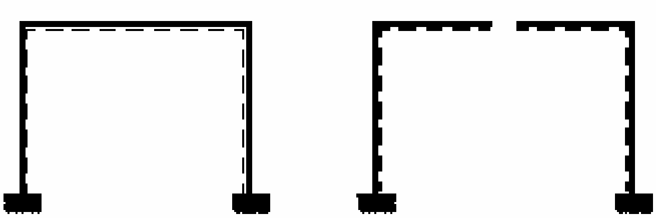
METODA SILA

SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

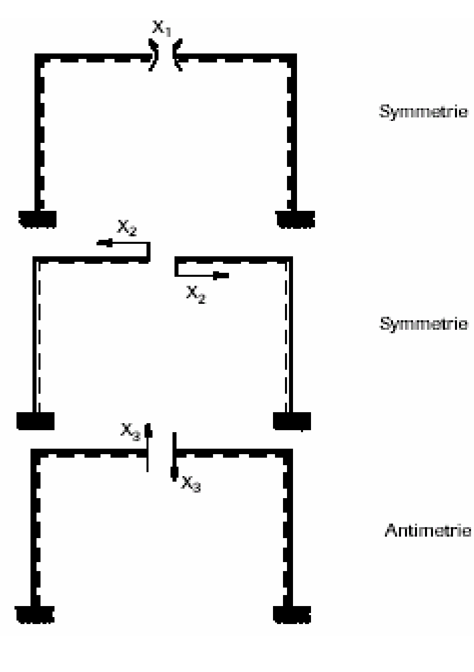


Svako opterećenje možemo prikazati kao zbroj simetričnog i antisimetričnog.Pojednostavnjenje proračuna metodom sila korištenjem osi simetrije nosača-u smanjenju opsega računanja. Uvjet korištenja simetrije je geometrijska i fizikalna simetrija(materijalna).

1. način korištenja simetrije je uvođenje simetričnih i antisimetričnih nepoznanica.



S.N.S. O.S.

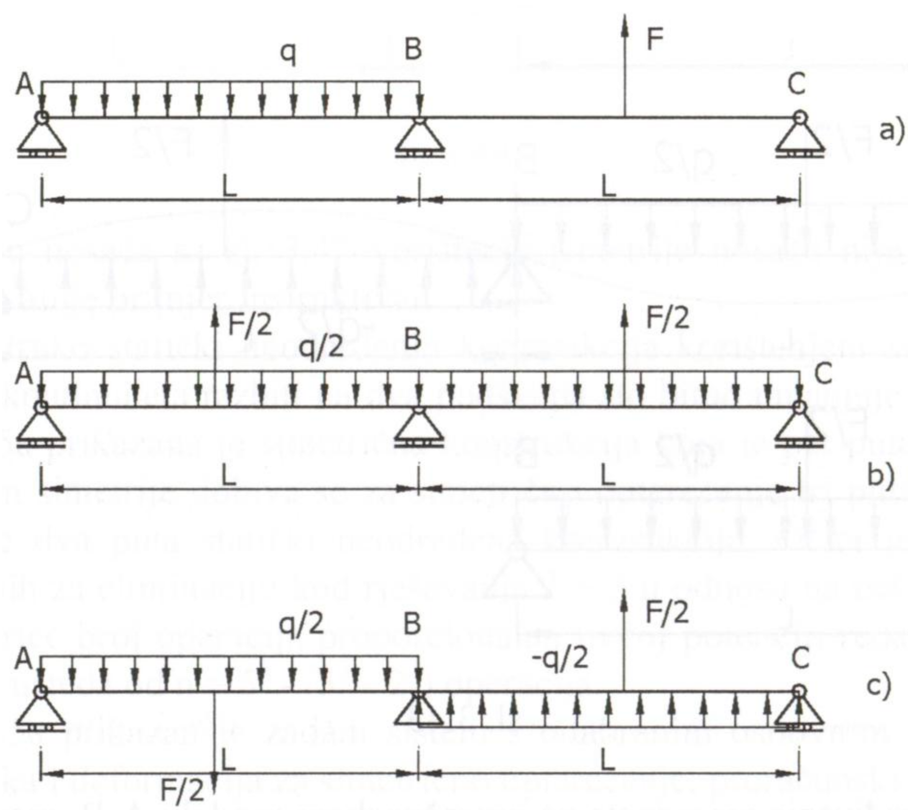


METODA SILA

SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

<u>Primjer:</u>

Zadano opterećenje razlaže se na simetrično i antimetrično (os simetrije prolazi kroz ležaj B).



METODA SILA

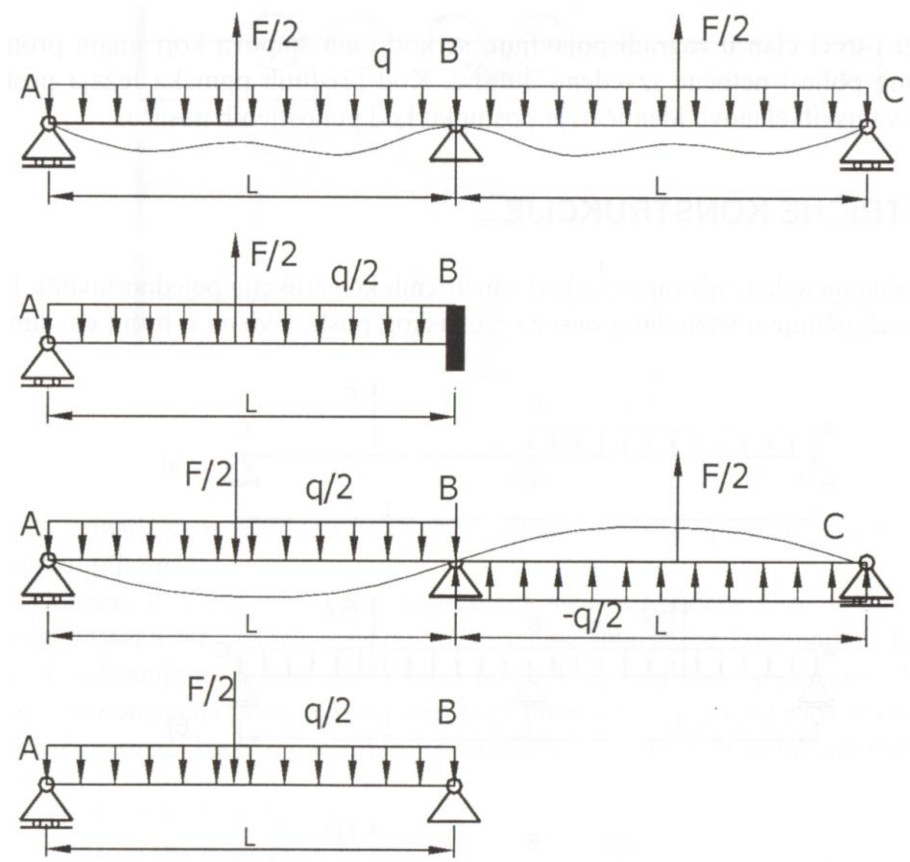
SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

Simetrično opterećenje:

- *Usljed simetrije nosača i opterećenja, pomaci i deformacije su simetrični oko osi simetrije;*
- *Kinematski (geometrijski) rubni uvjeti*

$$v = 0, \quad dv/dx = 0$$

- *Nosač se ponaša kao da je ležaj B upet te je proračunski model jednorasponski nosač.*



METODA SILA

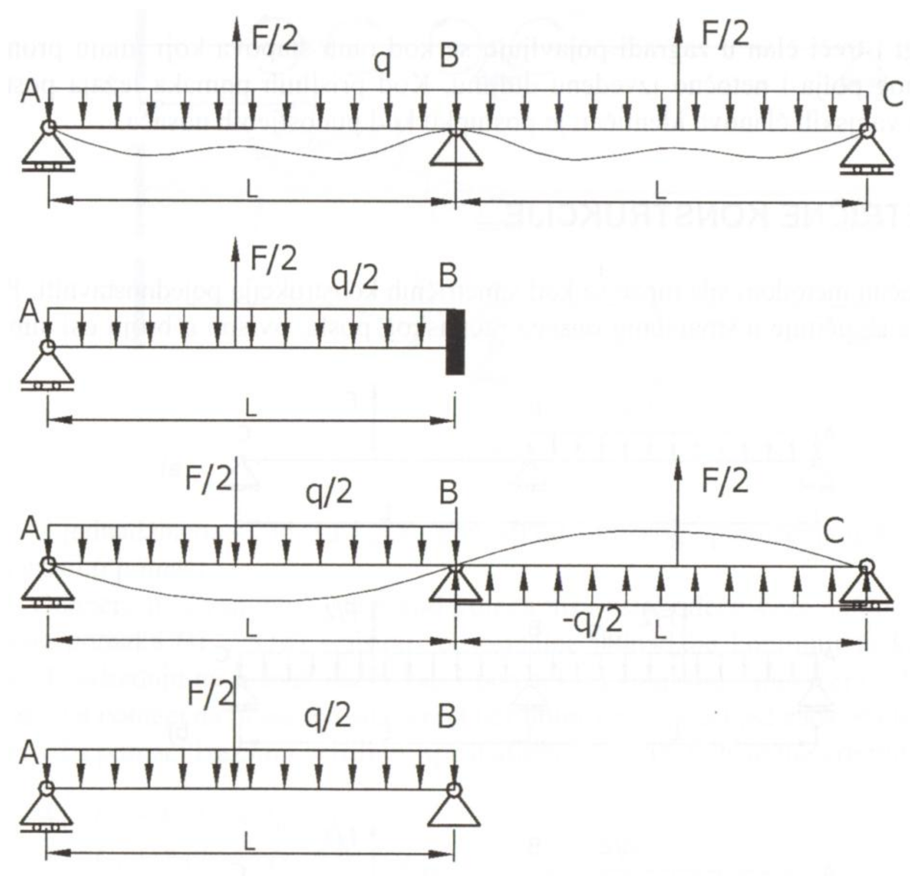
SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

Antisimetrično opterećenje:

- *Usljed simetrije nosača, pomaci i deformacije su antisimetrični oko osi simetrije;*
- *Kinematski (geometrijski) rubni uvjeti u osi simetrije*

$$v = 0, \quad d^2v / dx^2 = 0$$

- *Nosač se ponaša kao da je ležaj B zglobni ležaj te je proračunski model jednorasponski nosač.*

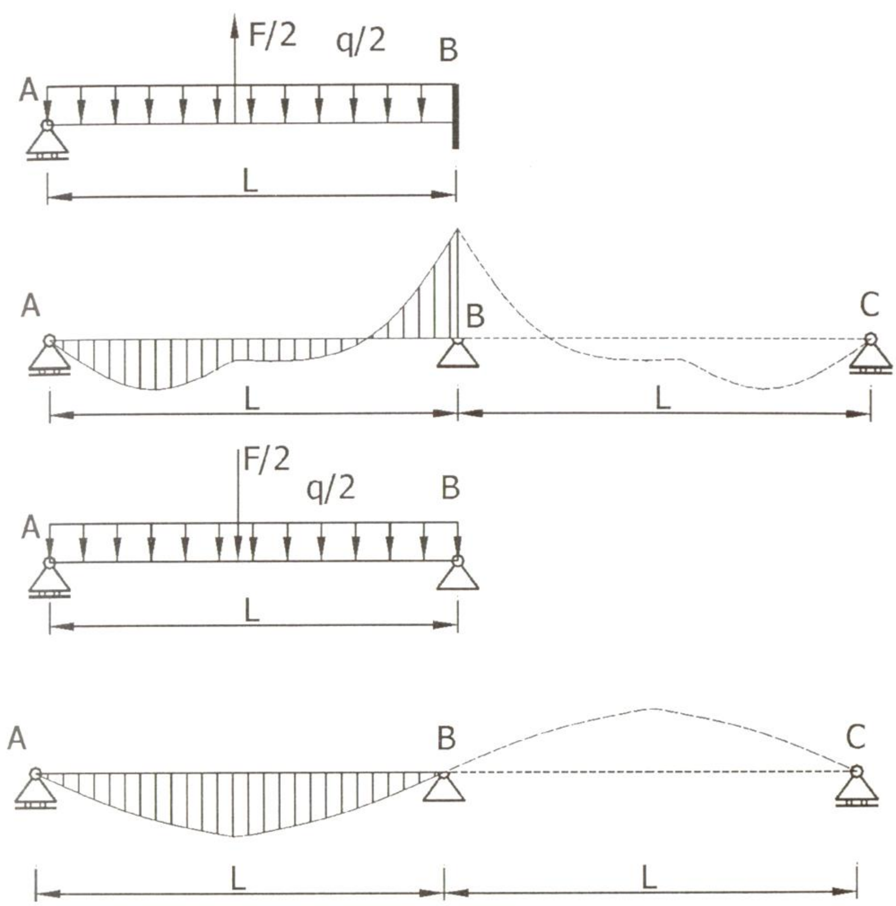


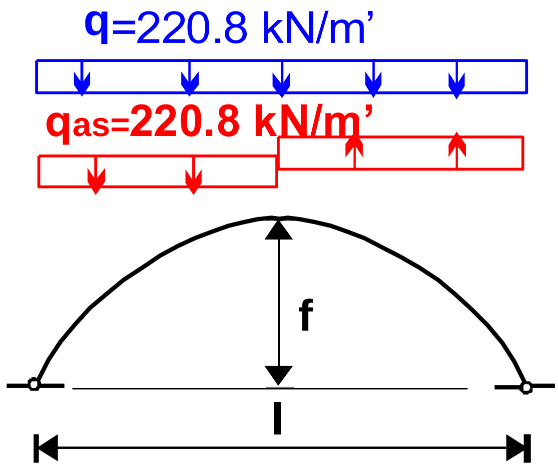
METODA SILA

SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

Nakon određivanja momenata na mproračunskom modelu A-B, momente na nosaču B-C dobivamo preslikavanjem oko osi simetrije.

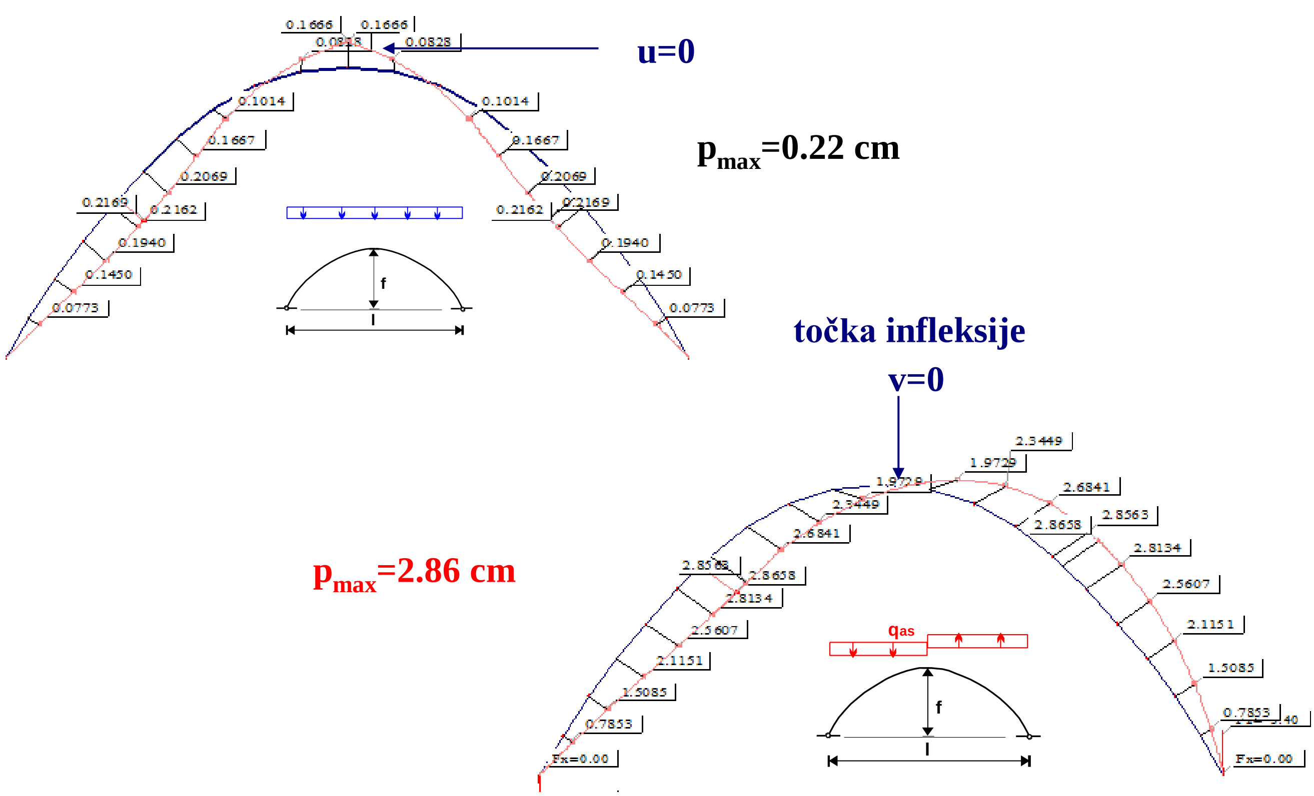
Konačni momenti savijanja dobiju se superpozicijom od simetričnog i antisimetričnog stanja opterećenja.





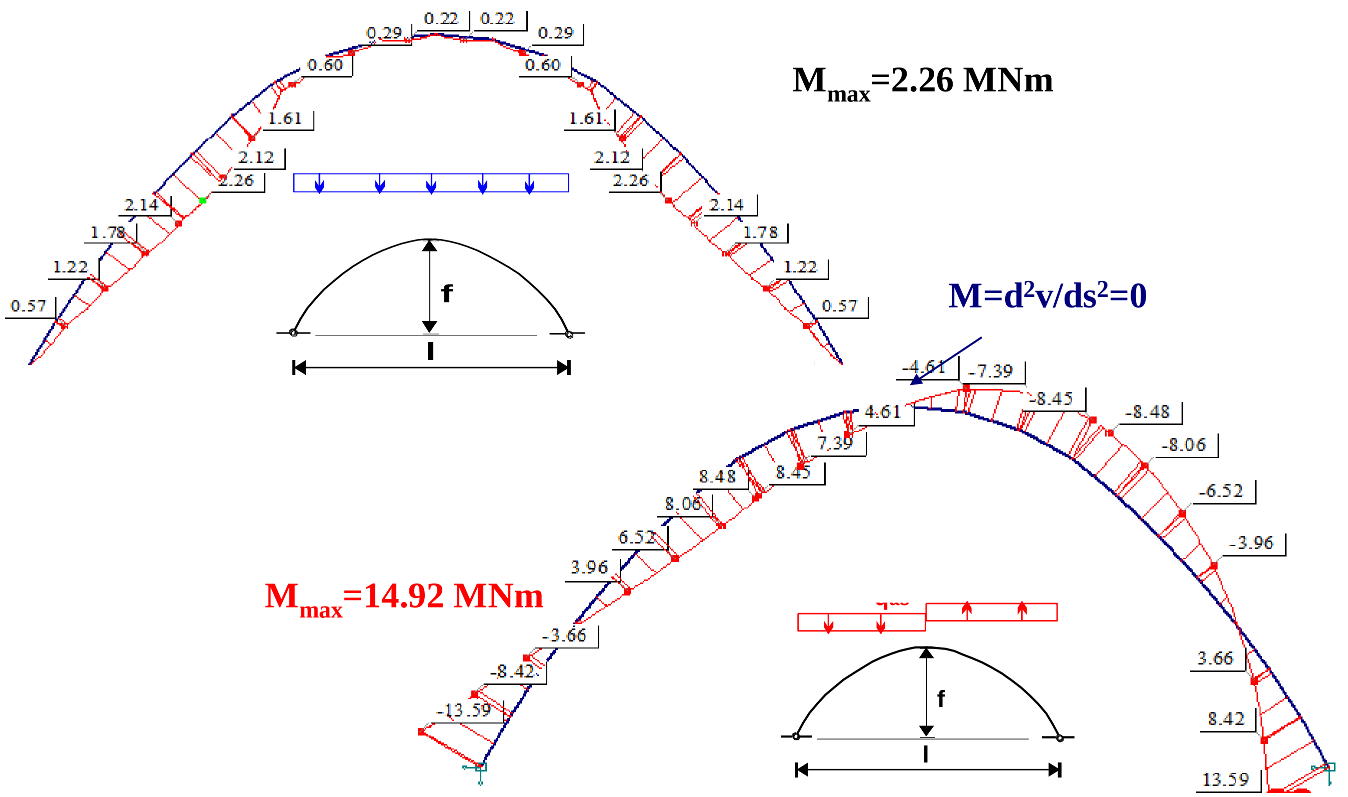
Primjer dvozglobnog luka

SIMETRIJA I ANTISIMETRIJA



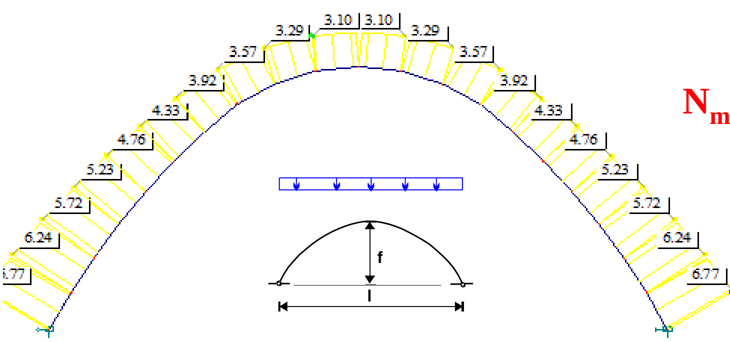
Simetrično opterećenje i simetrija nosača, pomaci i deformacije su simetrični oko osi simetrije.
Dijagrami un sila su simetrični.
Kinematski (geometrijski) rubni uvjeti u=0; dv/ds =0- nagib tangente na progibnu liniju=0.

SIMETRIJA I ANTISIMETRIJA



Antisimetrično opterećenje i simetrija nosača - pomaci i deformacije su antisimetrični oko osi simetrije.
Dijagrami un sila su antisimetrični.
Kinematski (geometrijski) rubni uvjeti u osi simetrije $v=0$; $d^2v/dx^2=0$-točka infleksije.

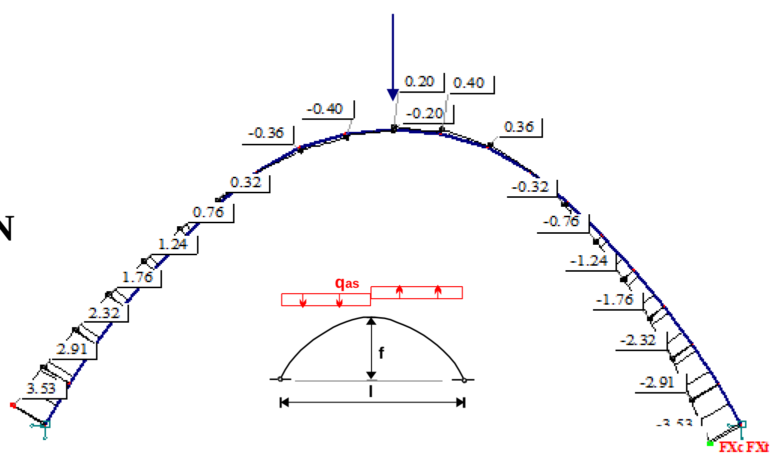
SIMETRIJA I ANTISIMETRIJA



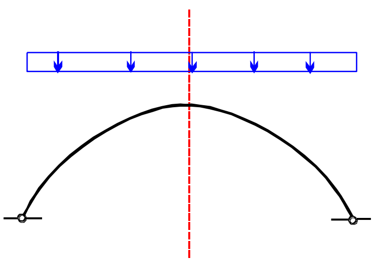
N_{max}=6.8 MN

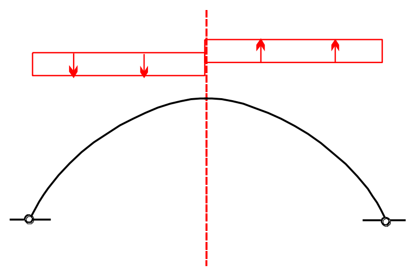
N=0

N_{max}=2.94 MN



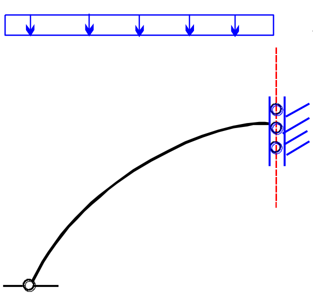
S I M E T R I J A I A N T I S I M E T R I J A





MODEL SIMETRIJE

MODEL ANTISIMETRIJE

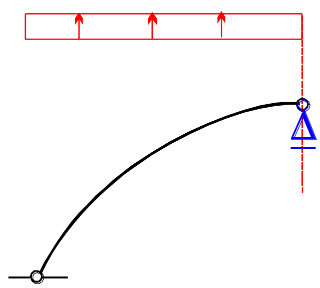


upeto pomični oslonac

$T=0=dv/ds \rightarrow v\neq 0$

$u=0 \rightarrow N\neq 0$

$\varphi=0 \rightarrow M\neq 0$



pomični oslonac

$v=0 \rightarrow T\neq 0$

$M=d^2v/ds^2=0 \rightarrow \varphi\neq 0$

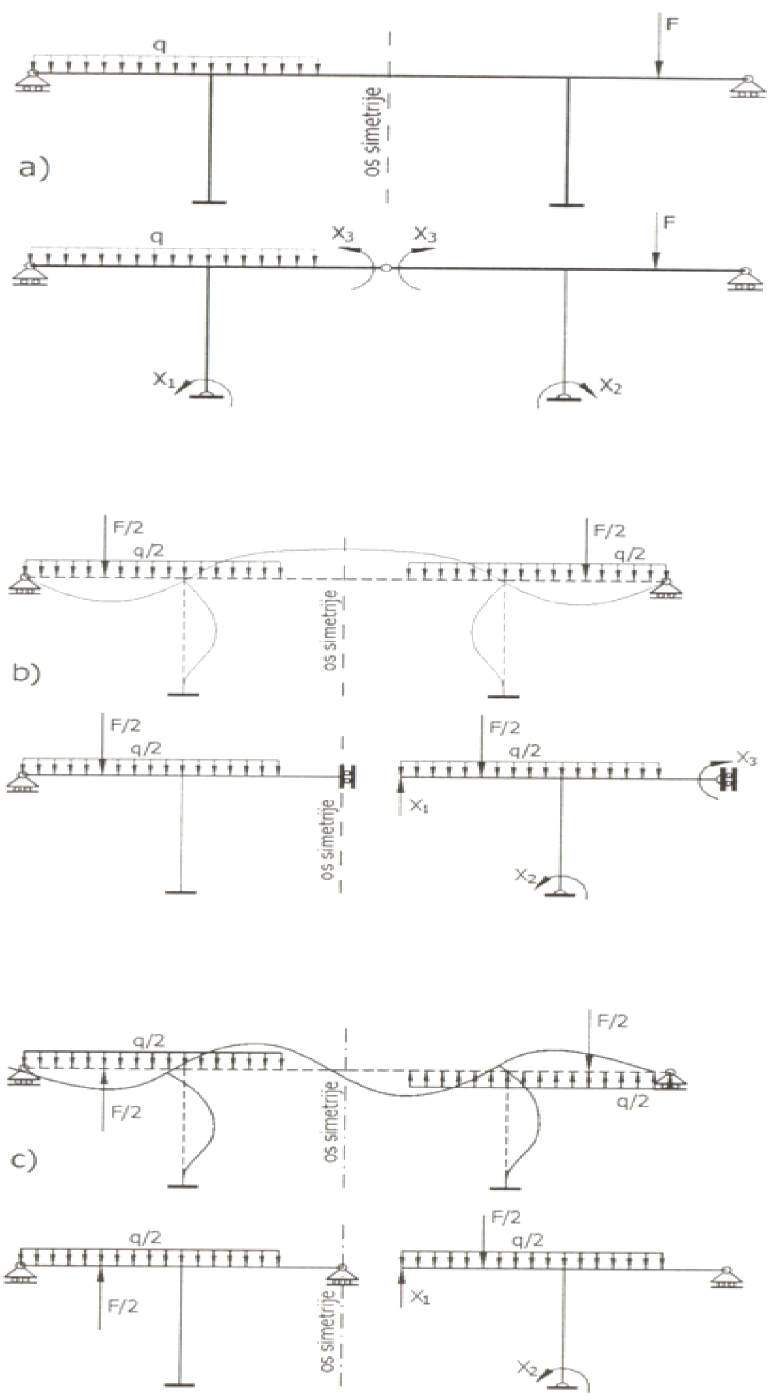
Proračunski model-1/2 nosača sa zadanim r.uvjetima.

Konačni dijagrami un.sila dobiju se superpozicijom od simetričnog i antisimetričnog stanja opterećenja.

METODA SILA

SIMETRIČNE KONSTRUKCIJE

Primjer višestruko statički neodređenog nosača



n=ns+na

5=3+2

METODA SILA

REDUKCIJSKI STAVAK

Za određivanje pomaka točaka statički neodređenog nosača moguće je formalno koristiti teorem jedinične sile.

Odredimo pomak točke na "v" puta statički neodređenom sustavu tako da na mjestu, pravcu i smjeru traženog pomaka djelujemo jediničnom silom.

- *momenti od vanjskog opterećenja "n" puta statički neodređenog nosača*

$$M_x^{(v)} = M_x^0 + \sum_{k=1}^{v} X_k m_k$$

- *momenti na istom nosaču od jedinične sile na mjestu i pravcu traženog pomaka*

$$m_x = m_x^0 + \sum_{1}^{v} Y_i m_i$$

- *Traženi pomak je:*

$$f = \int \frac{M_x^v m_x}{EI} ds$$

$$f = \int \frac{1}{EI}\left(M_x^0 + \sum_{1}^{v} X_k m_k\right) m_x^0 ds +$$

$$+ \int \frac{1}{EI}\left[M_x^0 \cdot \sum_{1}^{v} Y_i m_i + \left(\sum_{1}^{v} X_k m_k\right)\left(\sum_{1}^{v} Y_i m_i\right)\right] ds$$

METODA SILA

REDUKCIJSKI STAVAK

Nadalje je:

$$I_2 = \sum_1^v Y_i \cdot \int \frac{1}{EI} M_x^0 m_i \cdot ds + \sum_1^v Y_i \cdot \int \frac{1}{EI} m_i \sum_1^v X_k m_k \cdot ds$$

Dok je sukladno oznakama iz metode sila

$$I_2 = \sum_1^v Y_i \left(f_{i0} + \sum_1^v X_k f_{ik} \right) = 0$$

Izrazi u zagradi predstavljaju zapravo jednadžbe kontinuiteta za bilo koji osnovni sustav opterećen vanjskim opterećenjem s prekobrojnim silama X_i te je izraz $I_2=0$, te preostaje

$$f = \int \frac{1}{EI} \left(M_x^0 + \sum_1^v X_i m_i \right) \cdot m_0 \cdot ds = \int \frac{1}{EI} M_x^v m_0 \cdot ds$$

Pomak točke jednak je integralu umnoška relativnih deformacija na statički neodređenom sustavu i odgovarajućih unutarnjih sila od jedinične sile na proizvoljnom osnovnom sustavu.

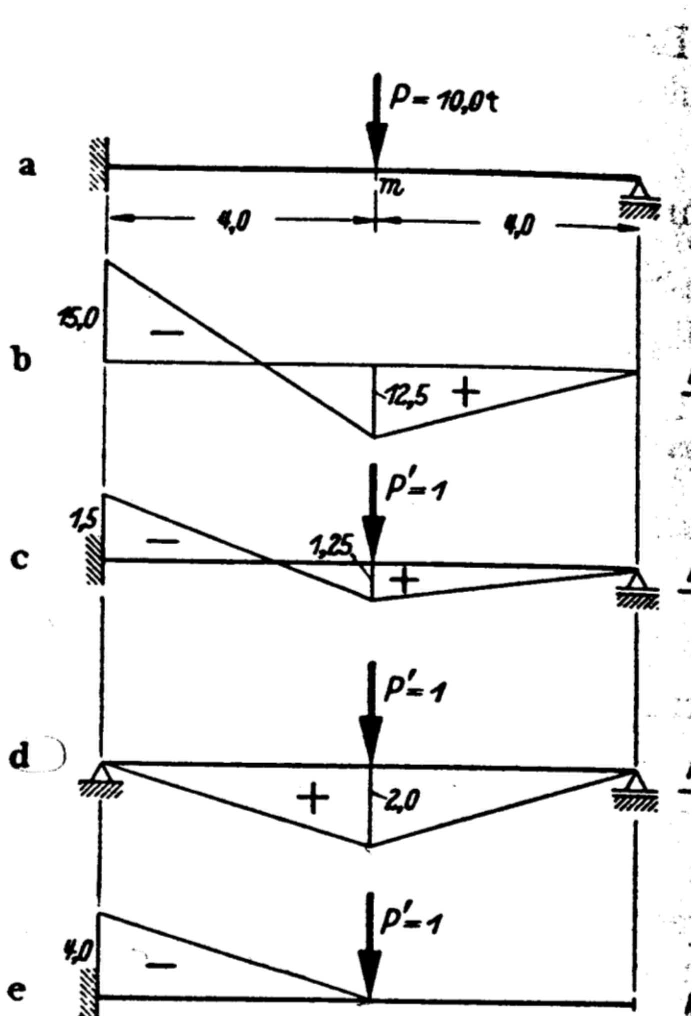
METODA SILA

REDUKCIJSKI STAVAK

Primjer:

Za jednostrano upeti nosač na slici odredi progib

δm=v pod djelovanjem opterećenja P=10 t.



M

M'

M'_0

M'_0

METODA SILA

REDUKCIJSKI STAVAK

a) bez korištenja redukcionog stavka

Dva puta rješavamo statički neodređeni sustav.

$$EI\,\delta_m = \int M' M\,ds$$
$$= \tfrac{1}{6}\left[2\,(15{,}0 \cdot 1{,}5 + 12{,}5 \cdot 1{,}25) - (15{,}0 \cdot 1{,}25 + 12{,}5 \cdot 1{,}5)\right] 4{,}0$$
$$+ \tfrac{1}{3}\,12{,}5 \cdot 1{,}25 \cdot 4{,}0,$$
$$EI\,\delta_m = 46{,}7.$$

b) uz upotrebu redukcijskog stavka

Jednom rješavamo statički neodređeni sustav.

$$I\,\delta_m = \int M_0' M\,ds = \tfrac{1}{6}(2 \cdot 12{,}5 \cdot 2{,}0 - 15{,}0 \cdot 2{,}0)\,4{,}0 + \tfrac{1}{3}\,12{,}5 \cdot 2{,}0 \cdot 4{,}0 = 46,$$

c) Uz drugačije odabran O.S.-konzolu pomak je:

$$EI\,\delta_m = \int M_0' M\,ds = \tfrac{1}{3}\,15{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 4{,}0 - \tfrac{1}{6}\,12{,}5 \cdot 4{,}0 \cdot 4{,}0 = 46{,}7.$$

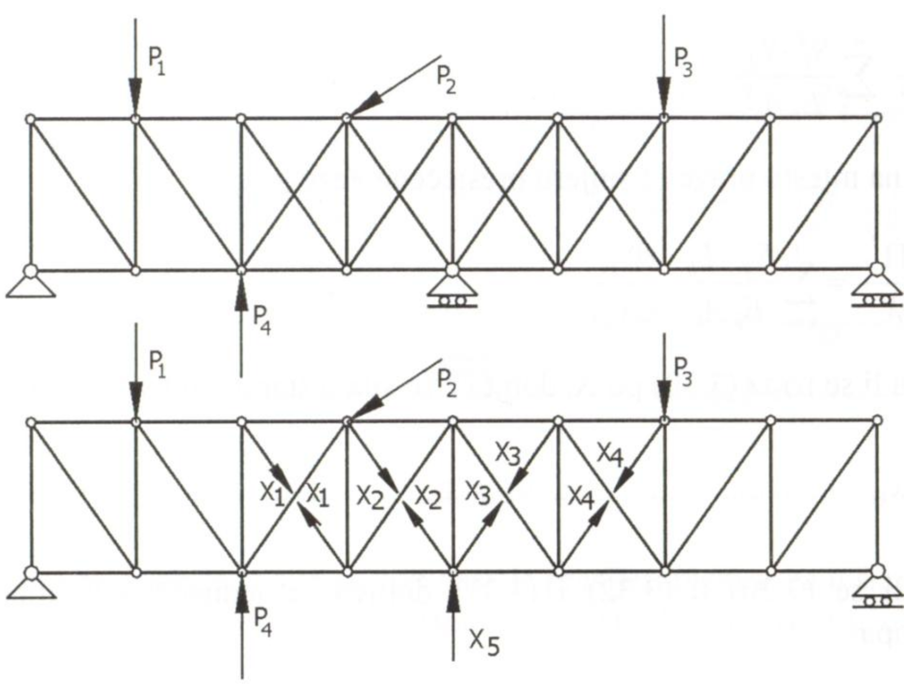
METODA SILA

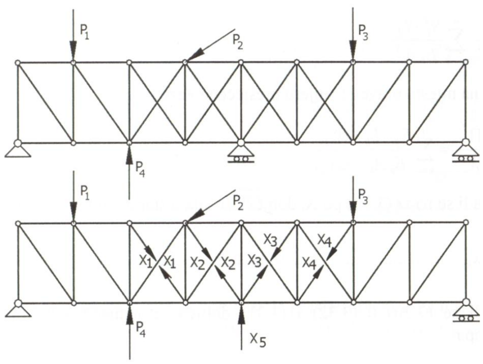
STATIČKI NEODREĐENE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE

Broj veza preko minimalno potrebnog u nosaču određuje se kao razlika broja kinematskih sloboda i broja kinematskih ograničenja $\Rightarrow$ stupanj statičke neodređenosti.

Osnovni sustav dobije se presijecanjem štapova konstrukcije i ležajnih veza tako da preostali štapovi i vanjske veze tvore kinematski i statički određeni sustav.

Dodatne jednadžbe dobiju se iz uvjeta geometrijskog kontinuiteta presječnih veza.





METODA SILA

STATIČKI NEODREĐENE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE

Sile u štapovima: $$S_k = S_k^0 + \sum_{j=1}^{m} s_{kj} X_j$$

S_k ukupna sila u štapu (k), S_k^0 sila u štapu (k) na osnovnom sustavu od vanjskog opterećenja, s_{kj} sila u štapu (k) na osnovnom sustavu od sile X_j=1.

Uvjeti konstinuiteta: relatvni pomak presječenih krajeva štapa na pravcu štapa jednak je nuli.

Rešetkaste konstrukcije $\Rightarrow$samo uzdužne sile u štapovima.

Deformacijska energija: $$\Pi_d^* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^L \frac{S_k^2 ds}{E_k A_k}$$

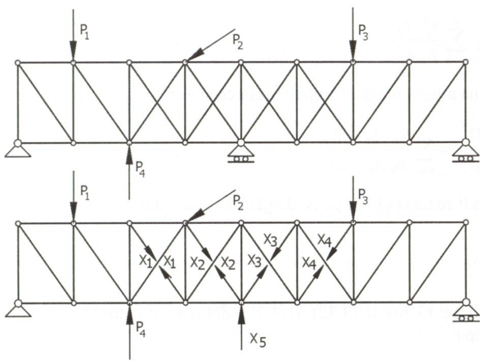
odnosno za konstantne podintegralne veličine: $$\Pi_d^* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k^2 L_k}{E_k A_k}$$

Pomak na mjestu, pravcu i smjeru poresječne veze:

$$\Delta_i = \frac{\partial \Pi_d^*}{\partial X_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k L_k}{E_k A_k} \cdot \frac{\partial S_k}{\partial X_i}$$

Derivacijom po X_i, dobije se sila u štapu (k) od sile X_i=1:

$$\frac{\partial S_k}{\partial X_i} = s_{ki}$$



METODA SILA

STATIČKI NEODREĐENE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE

Jednadžba kontinuiteta i-tog presječenog štapa:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_j \frac{s_{kj}}{E \cdot A_k} \cdot s_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k^0}{E \cdot A_k} \cdot s_{ki} = 0$$

Promjenom redoslijeda sumacije i uvođenjem oznaka

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki} \frac{s_{kj} L_k}{EA_k} = \frac{\partial^2 \Pi_d^*}{\partial X_i \partial X_j} = f_{ij}$$

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki} \frac{S_k^0 L_k}{EA_k} = f_{i0}$$

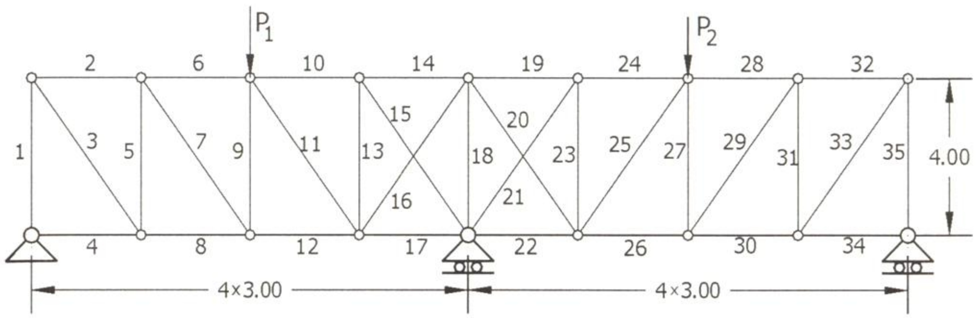
dobije se $$\sum_{j=1}^{n} X_j f_{ij} + f_{i0} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Rješenjem ovog sustava linearnih jednadžbi određuju se sile u prekobrojnim vezama a potom sile u štapovima sukladno početnom izrazu.

METODA SILA

STATIČKI NEODREĐENE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE

<u>Primjer:</u> *Odredite sile u štapovima zadanog rešetkastog nosača za zadana opterećenja.*



- *presijecanjem veza u štapovima 16, 19 i 20 ⇒ osnovni sustav 1*
- *Presijecanjem štapova 15, 21 i ležajne veze u sredini nosača ⇒ osnovni sustav 2.*