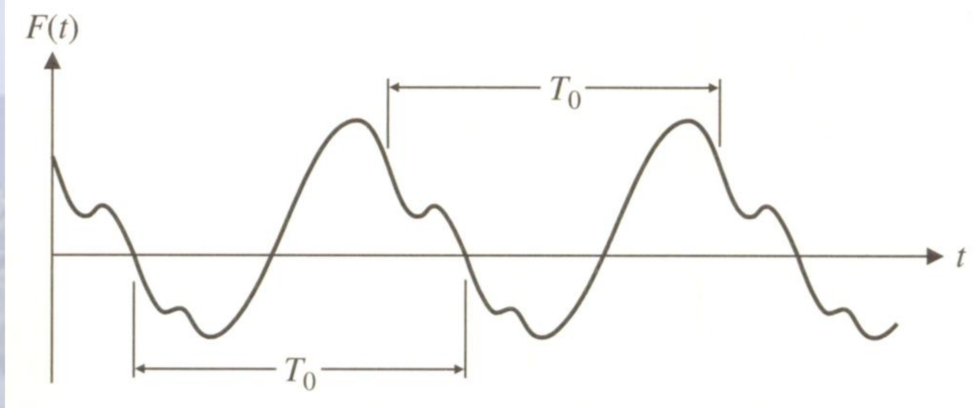
6 ODZIV NA PERIODIČKE I OPĆE DINAMIČKE UZBUDE

6.1 ODZIV NA PERIODIČKU UZBUDU

Periodička se uzbuda ponavlja u jednolikim vremenskim intervalima ili periodima.



$$F(t) = F(t + T_0)$$

FOURIEROV RED

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \right)$$

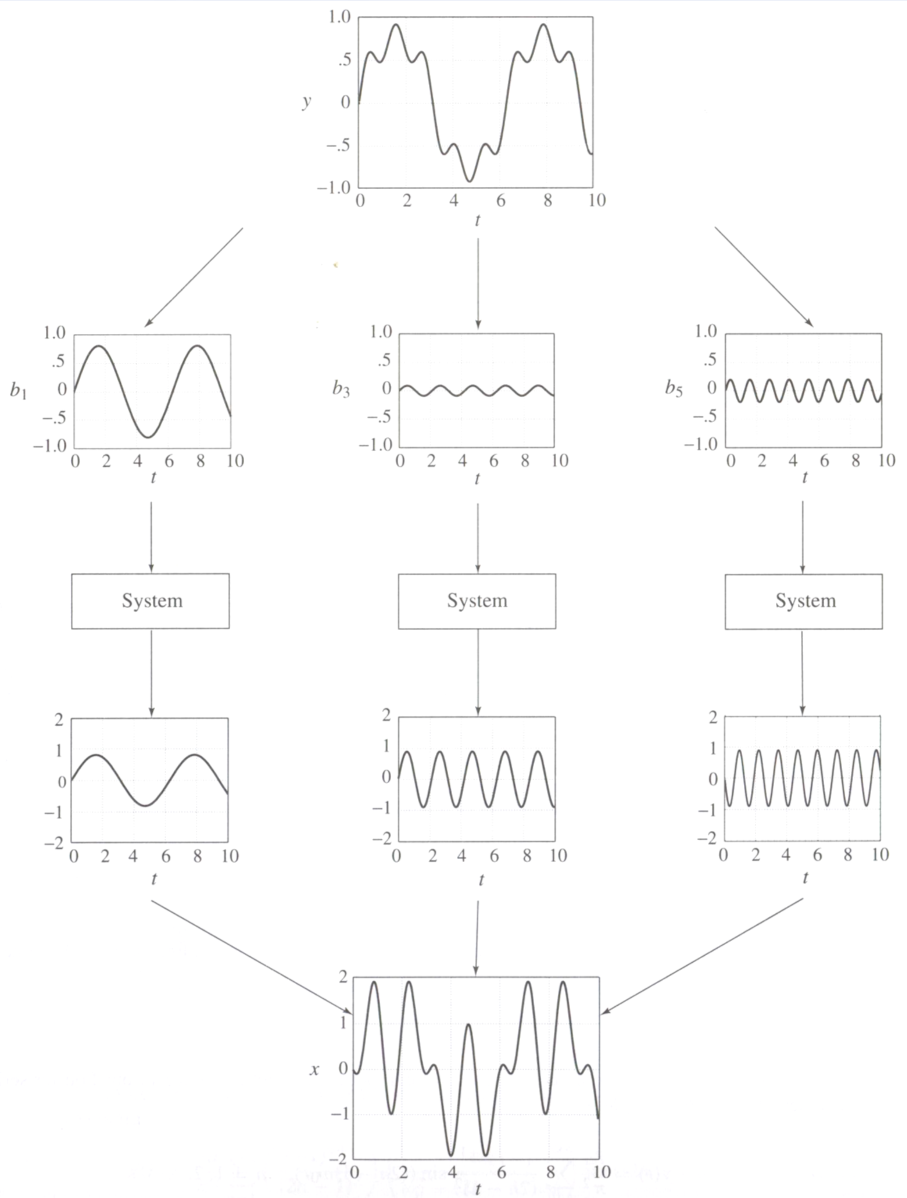
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

- u slučajevima kada se signal sile ne uprosječuje oko nule, imamo konstantan odmak;
- kako su konstante parne funkcije, odmak je jednak a_0;

6.1 ODZIV NA PERIODIČKU UZBUDU



- trajni dio odziva dobije se superpozicijom pojedinačnih partikularnih rješenja za sve harmonijske izraze od F(t):

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\Omega t - \psi_n) + b_n \sin(n\Omega t - \psi_n)}{k\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\xi nr)^2}}$$

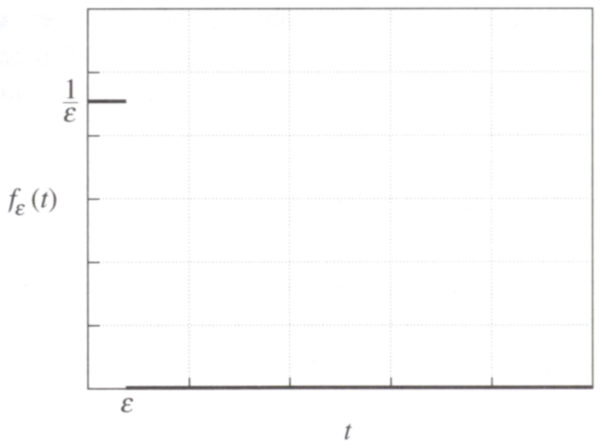
$$\psi_n = arctg\left(\frac{2\xi nr}{1-n^2r^2}\right), \quad r = \frac{\Omega}{\omega}$$

- prijelaz s vremenske na frekvencijsku domenu (projektiranje, revizije, nadzori, ispitivanje konstrukcija i materijala).

6.2 ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS

Kratko djelovanje opterećenja : ne može se zanemarivati prolazni dio odziva.

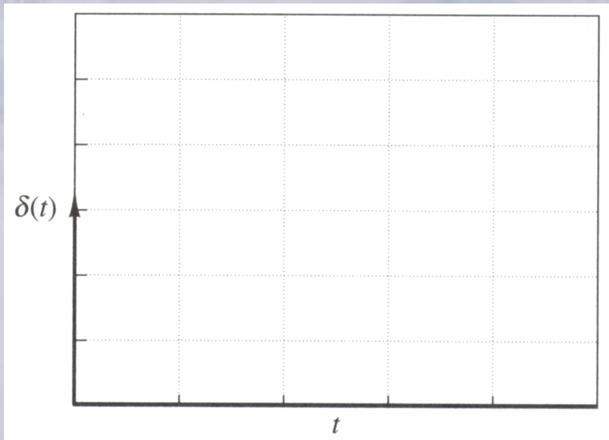
Sila impulsa – sila velikog intenziteta kratkog trajanja.



$$F(t) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < t \leq \varepsilon$$

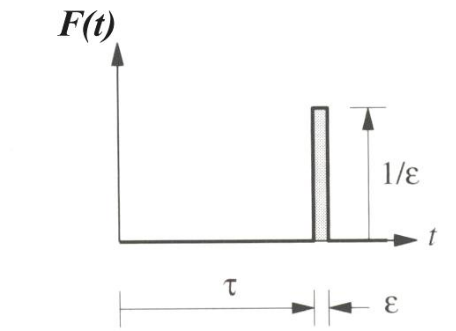
Za $\varepsilon \rightarrow 0$: veličina sile $\rightarrow \propto$;

matematički se ova funkcija definira pomoću tzv. DIRAC DELTA funkcije: $\delta(t)$.

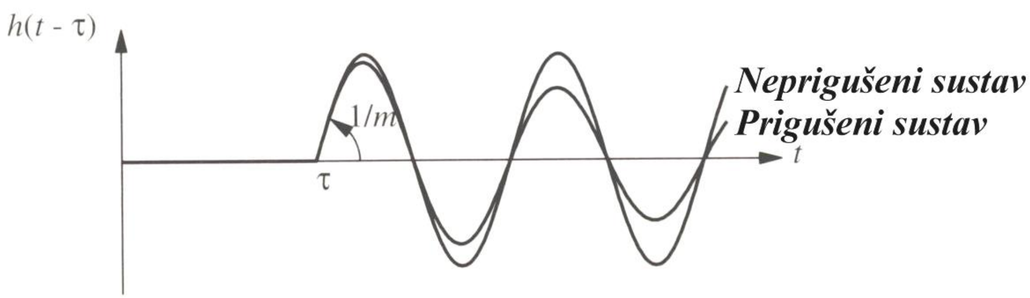


JEDINIČNI IMPULS: površina ispod funkcije F(t) uvijek je jednaka 1.

6.2 ODZIV NA JEDINIČNI IMPULS



Funkcija odziva na jedinični impuls



Djelovanje sile: jedinični impuls koncentriran u trenutku τ:

$$F(t) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \tau < t \leq \varepsilon$$

Sukladno II. Newtonovom zakonu:

$$F(t) = m\ddot{u}$$

odnosno za konstantnu masu

$$F(t) = \frac{d}{dt}(m\dot{u})$$

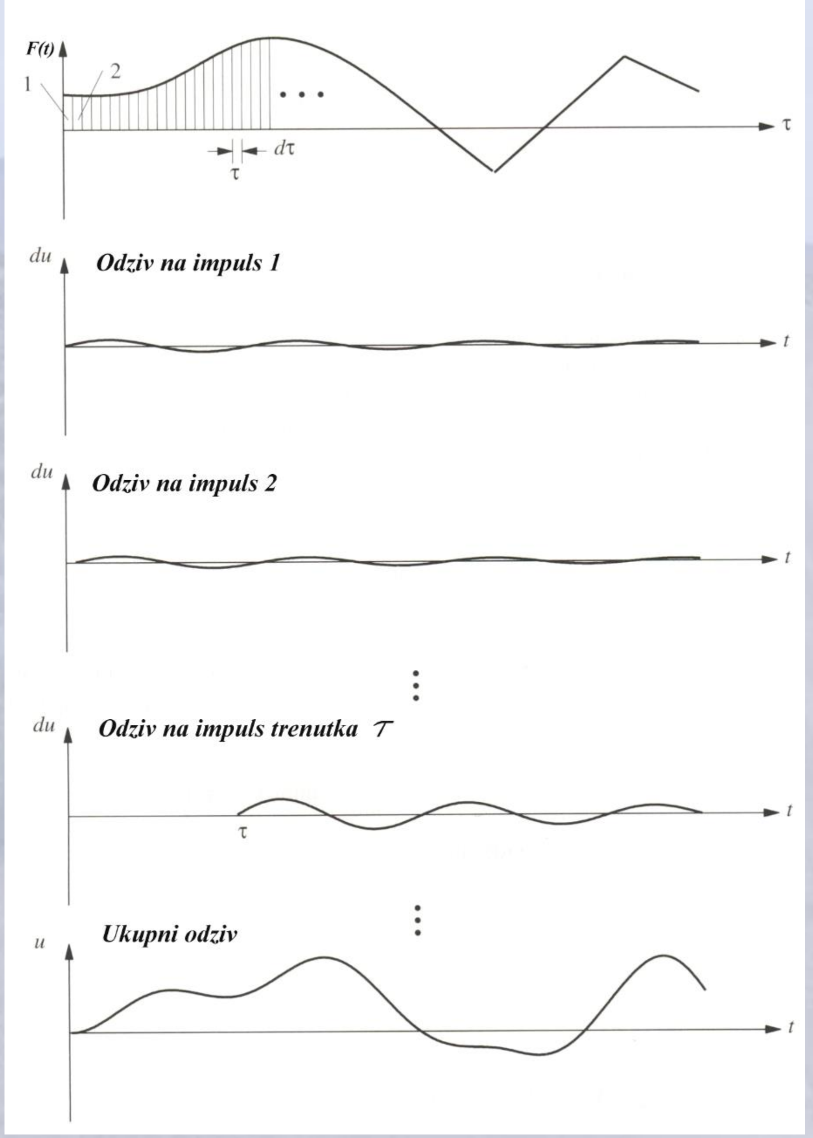
Integriranjem obje strane po vremenu t, dobije se

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u}$$

Veličina impulsa *Količina gibanja*

$h(t-\tau)$ - funkcija odziva na jedinični impuls

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU (DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE)



Proizvoljna opća sila ***F(t)*** može se prikazati nizom infinitezimalno malih impulsa.

Odziv linearnog dinamičkog sustava na jedan od tih impulsa koji djeluje u trenutku τ a veličine je ***F(τ) dτ*** jednak je umnošku veličine sile i funkcije odziva na jedinični impuls:

$$du(t) = [F(\tau)\, d\tau]\, h(t-\tau) \qquad za\; t \rangle \tau$$

Odziv sustava u trenutku ***t*** suma je odziva na sve impulse koji su djelovali do tog trenutka:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

(integral konvolucije).

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU
(DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE)

Primjena integrala konvolucije na sustav s jednim stupnjem slobode daje Duhamelov integral:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\left[\omega_d(t-\tau)\right]d\tau$$

odnosno za neprigušeni sustav:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\left[\omega_n(t-\tau)\right]d\tau.$$

Ako su zadani početni uvjeti u(0) i $\dot{u}(0)$, ukupni se odziv dobije sumiranjem s prethodno definiranim izrazima (slobodne oscilacije).

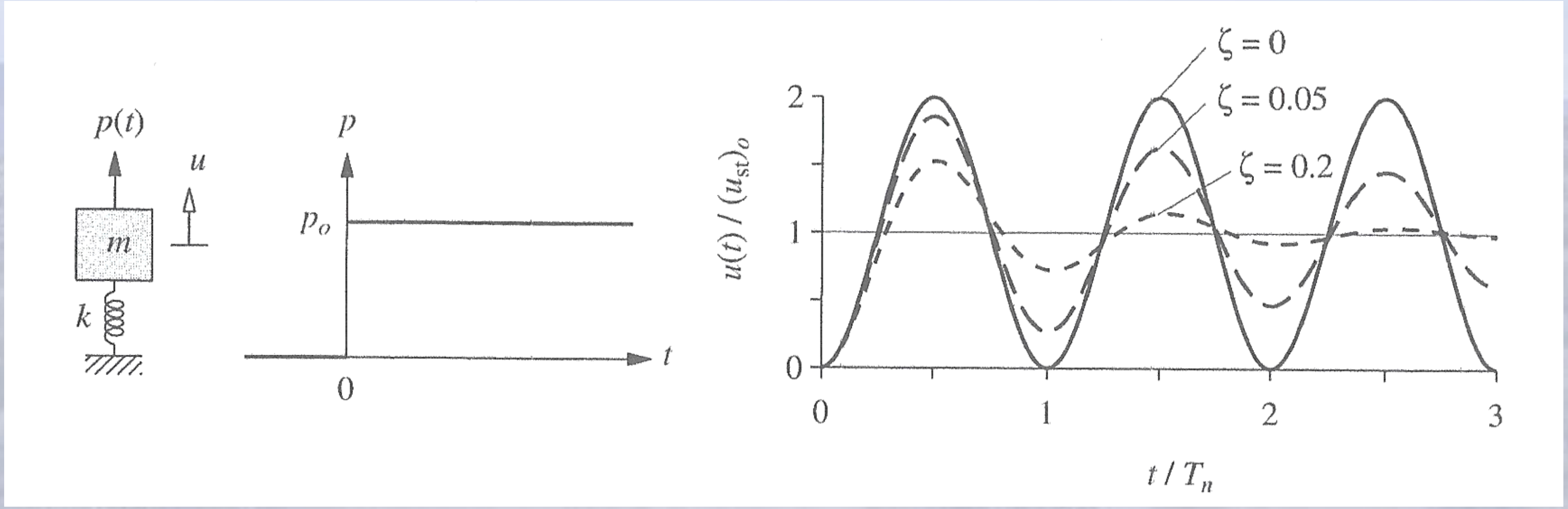
Primjena Duhamelovog integrala :

- linearni sustavi (zbog pravila superpozicije)
- rješenje Duhamelovog integrala: analitički i numerički.

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU

(DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE)

na primjeru naglo nanešene konstantne sile



$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin\left[\omega_n (t-\tau)\right] d\tau$$

$$F(\tau) = p_0 = const$$

$$x(t) = u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p_0 \sin\left[\omega_n (t-\tau)\right] d\tau$$

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU (DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE) na primjeru naglo nanešene konstantne sile

$$\sin\omega(t-\tau)=\sin\omega t\cos\omega\tau-\cos\omega t\sin\omega\tau$$

$$x(t)=u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p_0\sin[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau=$$

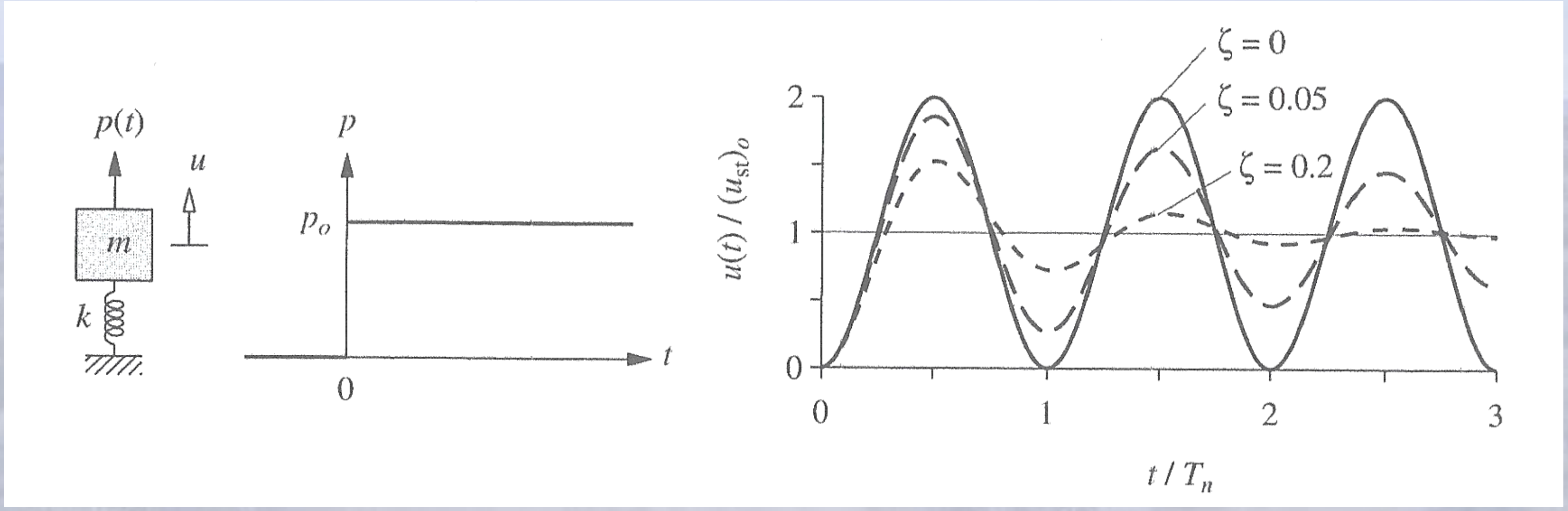
$$=\frac{p_0}{m\omega}\int_0^t(\sin\omega t\cos\omega\tau-\cos\omega t\sin\omega\tau)\,d\tau=\frac{p_0}{m\omega}\left(\sin\omega t\int_0^t\cos\omega\tau\,d\tau-\cos\omega t\int_0^t\sin\omega\tau\,d\tau\right)=$$

$$=\frac{p_0}{m\omega}\left[\sin\omega t\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\right)_0^t+\cos\omega t\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)_0^t\right]=$$

$$=\frac{p_0}{k}(\sin\omega t\sin\omega t+\cos\omega t\cos\omega t-\cos\omega t)=\frac{p_0}{k}(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t-\cos\omega t)=\frac{p_0}{k}(1-\cos\omega t)$$

$$\int\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{1}{\omega}\sin\omega\tau,\qquad\int\sin\omega\tau\,d\tau=-\frac{1}{\omega}\cos\omega\tau$$

6.3 ODZIV NA PROIZVOLJNU OPĆU SILU (DUHAMELOV INTEGRAL – INTEGRAL KONVOLUCIJE) na primjeru naglo nanešene konstantne sile



Neprigušene vibracije:

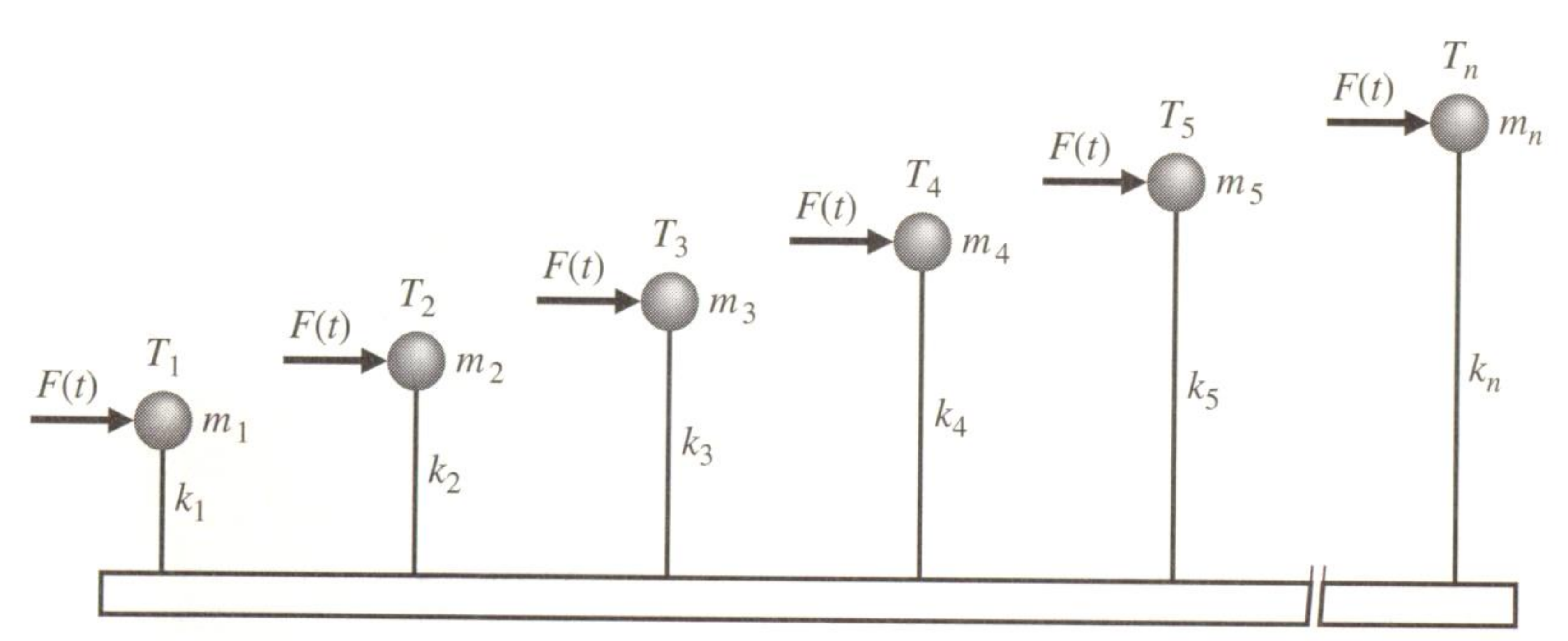
$$x(t)=u(t)=\frac{p_0}{k}(1-\cos\omega t)=X_0(1-\cos\omega t)$$

Prigušene vibracije:

$$x(t)=u(t)=X_0\left[1-e^{-\zeta\omega t}\left(\cos\omega_D t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

6.4 SPEKTAR ODZIVA ("RESPONSE SPECTRUM")

- Prikaz max. vršnog odziva na određenu uzbudu u odnosu na pojedine dinamičke karakteristike različitih konstrukcijskih sustava (vlastiti periodi i frekvencije);
- Vršni odziv (pomak, brzina, ubrzanje) dobije se za skup oscilatora s jednim stupnjem slobode (SDOF) za skup različitih vlastitih perioda ili frekvencija, variranjem koeficijenta prigušenja.



6.4 SPEKTAR ODZIVA ("RESPONSE SPECTRUM")

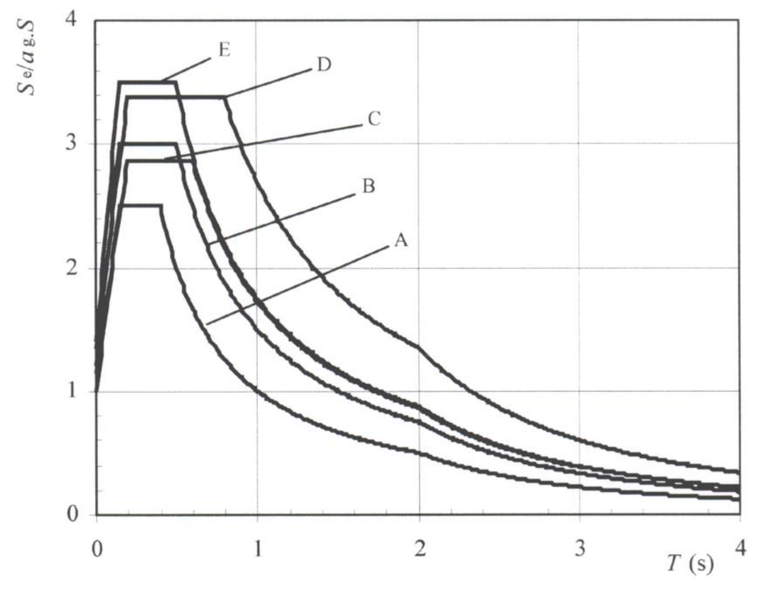
A) Rješenje Duhamelovog integrala

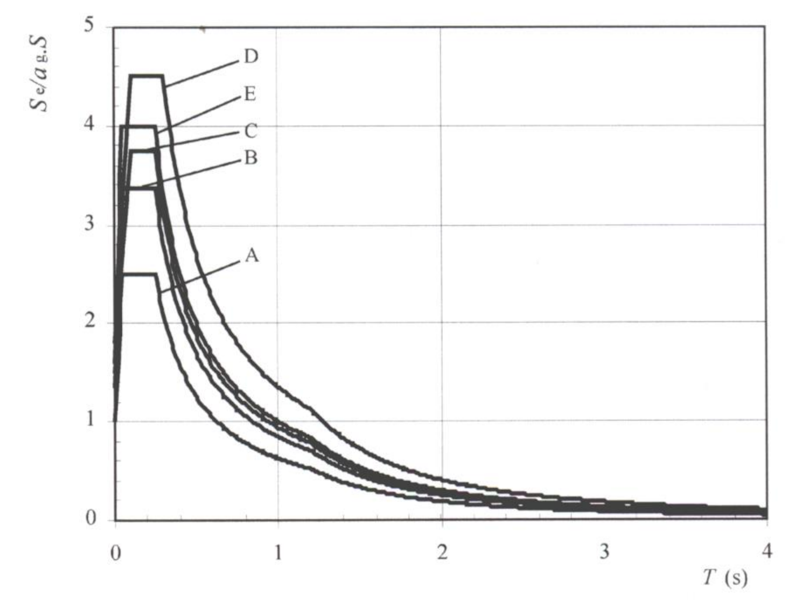
$$\left[x(t)\right]_{max} = \left| \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\left[\omega_d (t-\tau)\right] d\tau \right|_{max}$$

B) Numerička integracija

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad x_{max}$$

$\Rightarrow$ skup krivulja spektra odziva za različite vrijednosti prigušenja



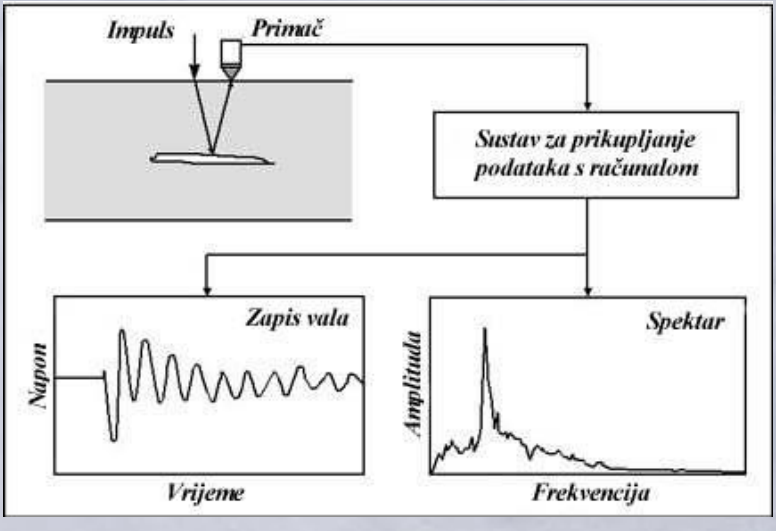


7 DINAMIČKA ANALIZA U FREKVENCIJSKOJ DOMENI

Dva su pristupa u analizi i prikazu dinamičkog odziva sustava s jednim stupnjem slobode (SDOF) izloženog djelovanju opće uzbudne sile:

- ***Rješenje u vremenskoj domeni***
  - Jednadžbe gibanja rješavaju se integriranjem po vremenu;
  - Metode rješavanja inženjerskih zadaća u većini su slučajeva numeričke.

- ***Rješenje u frekvencijskoj domeni***
  - Određuju se koeficijenti amplituda rješenja Fourierovog reda za svaku pojedinu frekvenciju;
  - Fourierovi koeficijenti se najčešće određuju numerički (diskretna Fourierova transformacija s N brojem konačnih točaka);
  - Danas se u programima najčešće koristi postupak tzv. brze transformacije (FFT=Fast Fourier Transform), s $N=2^L$ brojem konačnih točaka.



Primjena frekventnog zapisa u ispitivanju konstrukcija