Građevna statika 2 (21093) | Metoda 1/3
Akademska godina 2020./2021.

Metoda sila

Uvod, kombiniranje dijagrama, osnovni proračun, utjecaj prisilnih pomaka, utjecaj temperaturnih promjena, utjecaj elastičnih oslonaca

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)
Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)
Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku
Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR–31 000 Osijek, Hrvatska

marin.grubisic@gfos.hr

Konzultacije: **srijedom 8:00 — 9:00 sati**
Google Classroom: **qmvjpo6**

Uvod

Statički određeni nosači se rješavaju samo pomoću uvjeta ravnoteže jer je kod njih moguće <u>samo jedno ravnotežno stanje</u>.

Statički neodređeni nosači imaju **više ravnotežnih stanja i više mogućih stanja pomaka**, pa se za njihovo rješavanje osim uvjeta ravnoteže koriste i dodatni uvjeti deformiranja.

- **Manji su momenti savijanja** pri jednaku rasponu i pod jednakim opterećenjima.
- **Manji su progibi** pri jednakoj krutosti.
- **Imaju veću sigurnost** u graničnomu stanju nosivosti (GSN).

DJELOVANJA → **ENERGETSKI ZAKONI** → UNUTARNJE SILE / POMACI / DEFORMACIJE

- Teorem o uzajamnosti radova/pomaka
- Bettijev, Maxwellov, Castiglianovi, Clapeyronovi teoremi
- **<u>Metoda jediničnog opterećenja</u>**

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Teorem o jediničnoj sili

Teorem o jediničnoj sili definira se pomoću pomaka i izvodi se iz sljedećeg uvjeta:

rad unutarnjih sila
(potencijalna energija deformiranja)

$$W = U$$

rad vanjskih sila

Pri **statičkom** opterećenju **elastičnog** tijela promjena potencijalne energije vanjskih sila **jednaka je** prirastu potencijalne energije deformacije tijela (Hookeov zakon)!

Opći izraz za **pomak ili rotaciju** na mjestu i u smjeru u **i-toj** točki zadanog poprečnog presjeka:

$$u_i, v_i, \theta_i = \sum \int_0^l \left(m_i \cdot \chi + v_i \cdot \gamma + n_i \cdot \varepsilon \right) ds$$

$\mathbf{m_i}$**,** $\mathbf{v_i}$**,** $\mathbf{n_i}$ – unutarnje sile koje nastaju uslijed djelovanja jedinične sile u i-toj točki

χ**,** γ**,** ε – deformacije nastale uslijed vanjskog opterećenja

Deformacije za pojedinačna djelovanja

- **Rotacija** (kut zaokreta presjeka) – deformacija uslijed momenta savijanja:

$$\chi = \frac{M}{E \cdot I} + \left(\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \right)$$

djelovanje nejednolike temperature koja daje istu deformaciju – **zaokret poprečnog presjeka**

- Deformacija od poprečne sile:

$$\gamma = k \cdot \frac{V}{G \cdot A}$$

Uvjet su konstantni poprečni presjeci !

- Uzdužna deformacija uslijed djelovanja uzdužne sile:

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} + \left(\alpha_t \cdot t_s \right)$$

djelovanje jednolike temperature koja daje istu uzdužnu deformaciju – **širenje ili skupljanje**

Deformacije za pojedinačna djelovanja

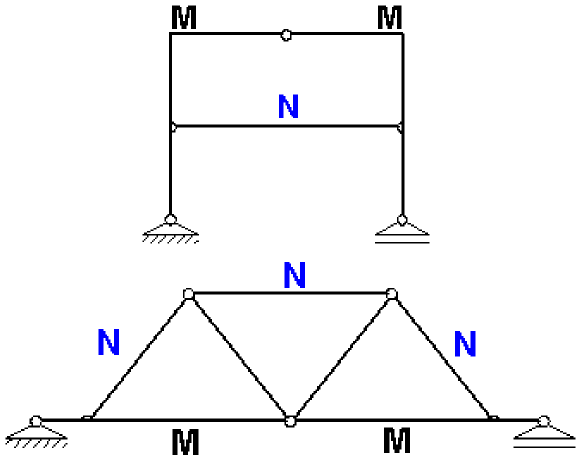
$$u_i, v_i, \theta_i = \sum \int_0^l (m_i \cdot \chi + v_i \cdot \gamma + n_i \cdot \varepsilon)\, ds$$

$$\chi = \frac{M}{E \cdot I} + \left(\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}\right) \qquad \gamma = k \cdot \frac{V}{G \cdot A} \qquad \varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} + (\alpha_t \cdot t_s)$$

$$u_i, v_i, \theta_i = \sum \int_0^l \left(m_i \cdot \frac{M}{E \cdot I} + t_i \cdot \frac{V}{G \cdot A} + n_i \cdot \frac{N}{E \cdot A} \right) ds$$

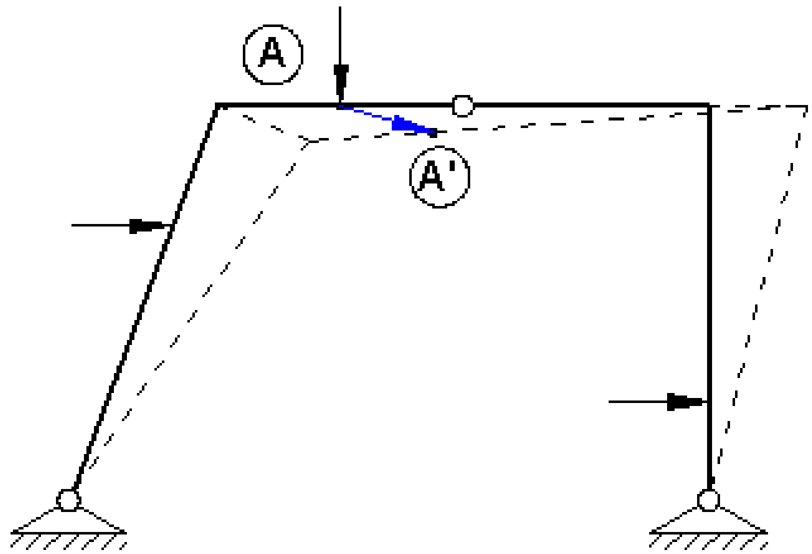
Najveće deformacije u konstrukciji nastaju uslijed djelovanja **momenata savijanja**, a najmanje (zanemarivih vrijednosti) su od poprečne sile.

Utjecaj uzdužne sile je zanemariv, osim kod štapova u kojima je uzdužna sila *N* dominantna i kod štapova malog poprečnog presjeka.



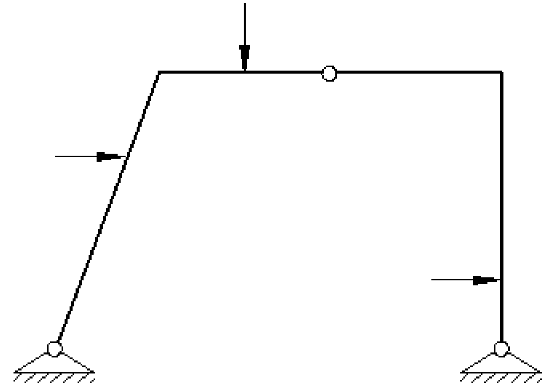
Određivanje pomaka čvorova i rotacija poprečnog presjeka

Pod djelovanjem vanjskog opterećenja dolazi do deformacije sustava, ali nas zanimaju određeni pomaci određenih točaka
(npr. **pomak točke A**).

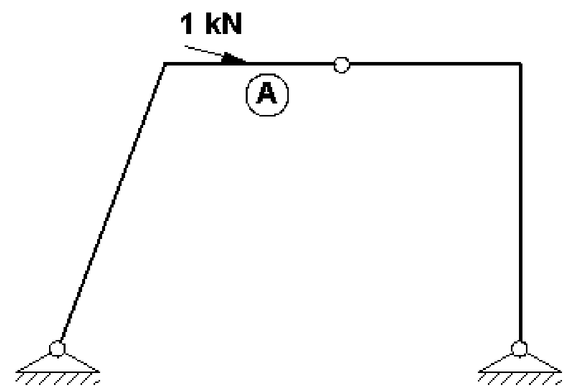


Određivanje pomaka čvorova i rotacija poprečnog presjeka

1. Za zadano **vanjsko opterećenje** odredimo dijagrame: **M, V i N**



2. Sa sustava **uklanjamo vanjsko opterećenje** i na mjestu (A) i u smjeru traženog pomaka **zadajemo jedinično opterećenje** i dobivamo jedinične dijagrame: $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{n_1}$

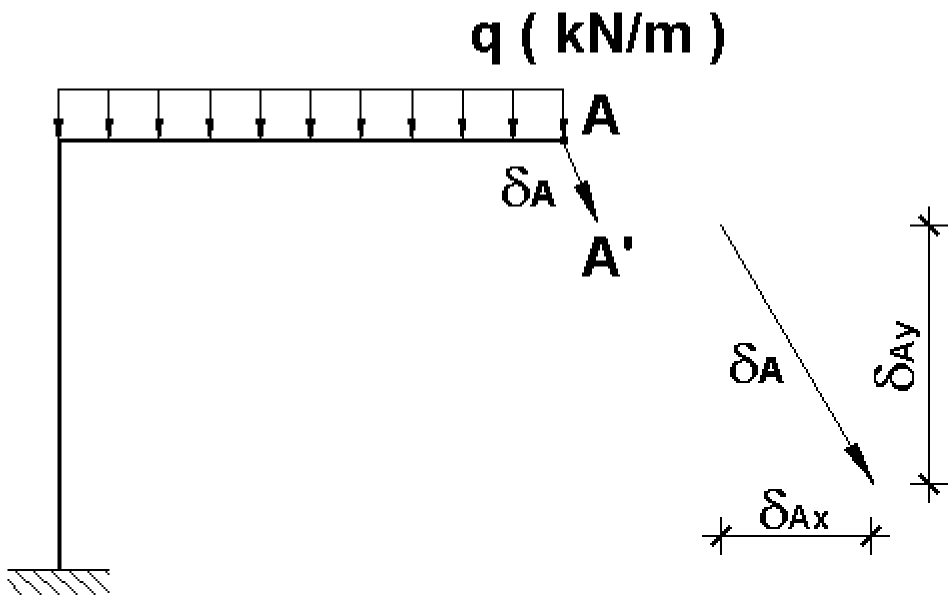


3. Kombinacija dijagrama:

$$\delta_A = \sum \int_0^l \left(\frac{M \cdot m_1}{E \cdot I} + \frac{V \cdot v_1}{G \cdot A} + \frac{N \cdot n_1}{E \cdot A} \right) ds$$

Primjer #1

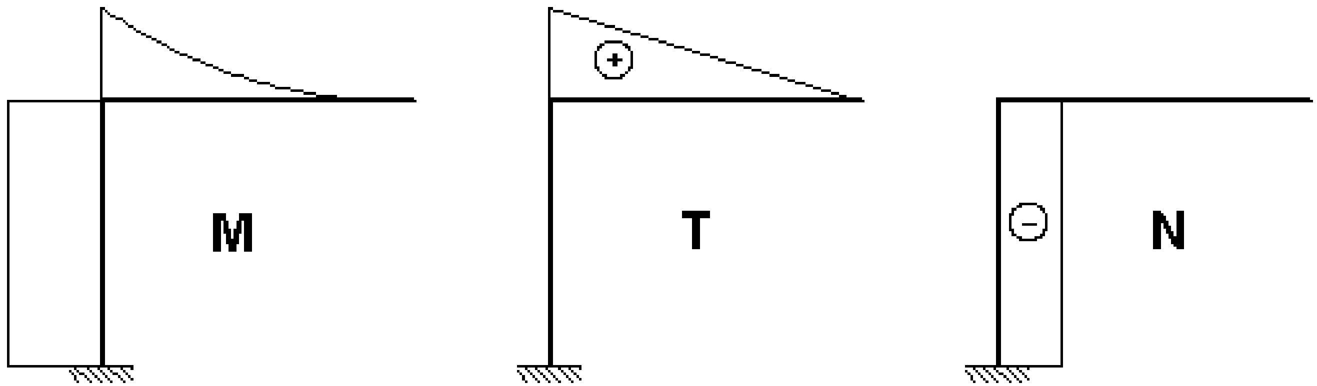
Naći **ukupni pomak i rotaciju (kut zaokreta) točke A** poprečnog presjeka.



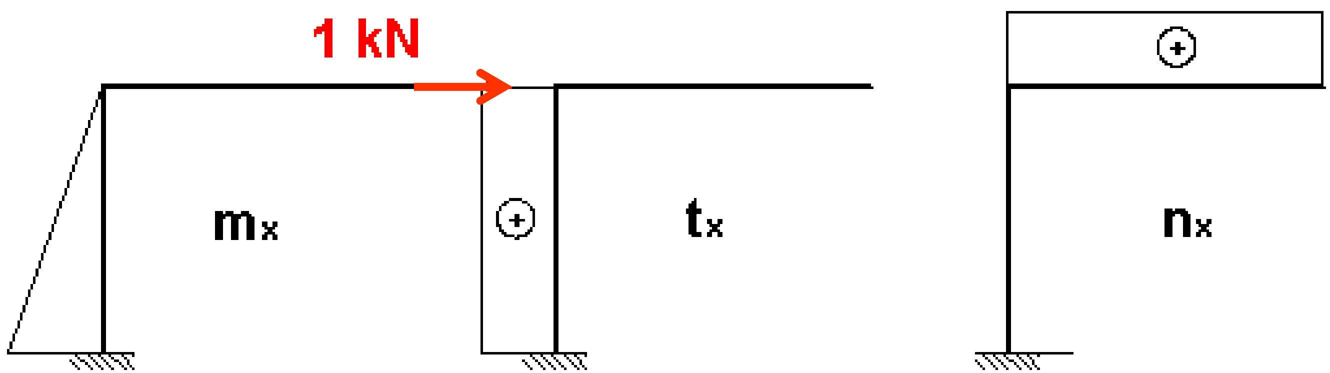
$$\delta_A = \sqrt{{\delta_{Ax}}^2 + {\delta_{Ay}}^2}$$

Primjer #1

1. **M, V, N** od vanjskog opterećenja



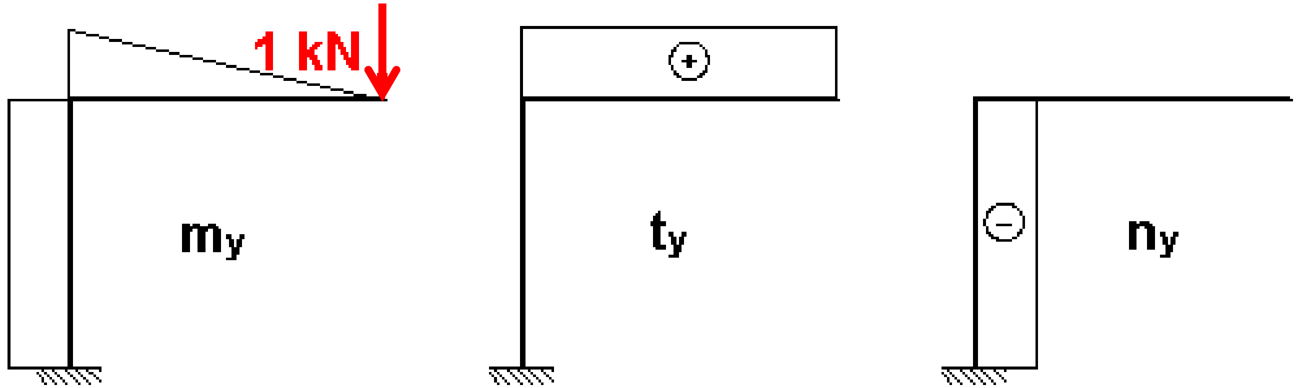
2a. $\mathbf{m_x}$, $\mathbf{v_x}$, $\mathbf{n_x}$ za horizontalni pomak – jedinična sila u smjeru **x**



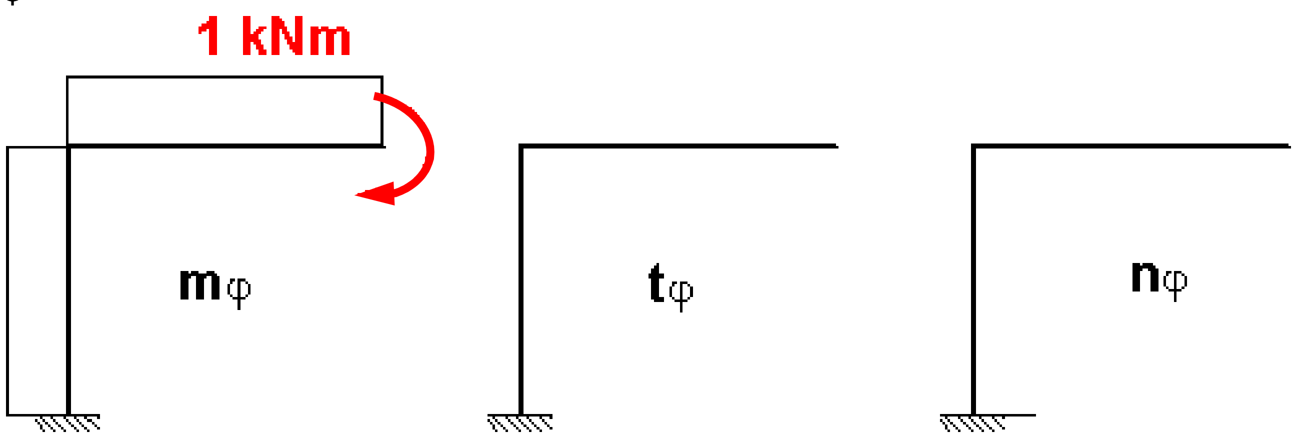
Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Primjer #1

2b. $\mathbf{m_y}$, $\mathbf{v_y}$, $\mathbf{n_v}$ za vertikalni pomak – jedinična sila u smjeru **y**



2c. $\mathbf{m_\varphi}$, $\mathbf{v_\varphi}$, $\mathbf{n_\varphi}$ za rotaciju (kut zaokreta) – jedinični moment



Primjer #1

Kombinacije dijagrama:

Horizontalni pomak (vanjsko opterećenje i horizontalno jedinično opterećenje):

$$\delta_{Ax} = \sum \int \left(\frac{M \cdot m_x}{E \cdot I} + \frac{V \cdot v_x}{G \cdot A} + \frac{N \cdot n_x}{E \cdot A} \right) ds$$

Vertikalni pomak (vanjsko opterećenje i vertikalno jedinično opterećenje):

$$\delta_{Ay} = \sum \int \left(\frac{M \cdot m_y}{E \cdot I} + \frac{V \cdot v_y}{G \cdot A} + \frac{N \cdot n_y}{E \cdot A} \right) ds$$

Kut zaokreta (vanjsko opterećenje i jedinični moment savijanja):

$$\delta_{A\phi} = \sum \int \left(\frac{M \cdot m_\phi}{E \cdot I} + \frac{V \cdot v_\phi}{G \cdot A} + \frac{N \cdot n_\phi}{E \cdot A} \right) ds$$

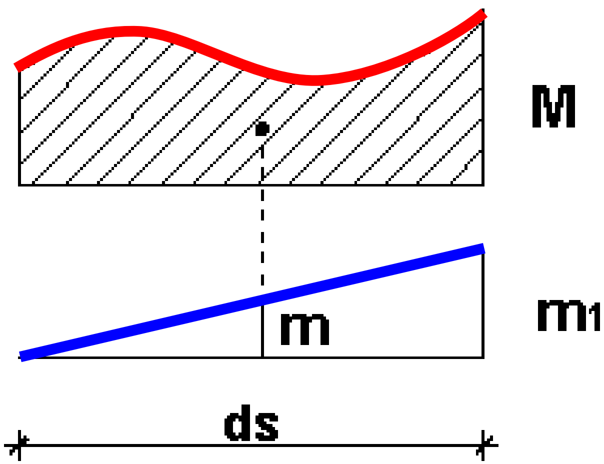
Ukupni pomak: $\delta_A = \sqrt{\delta_{Ax}{}^2 + \delta_{Ay}{}^2}$

Da ne bi rješavali određene integrale radimo **grafičku integraciju po Vereshchaginu:**

Vereshchaginov teorem (1925.):

U slučaju opterećenja jediničnom silom, moment savijanja mijenja se **linearno!**

Nužan uvijet je da funkcija ***m*** bude **linearna!**



$$\int_0^l \frac{M \cdot m_1}{E \cdot I} ds = \frac{1}{EI} \cdot A(M) \cdot m$$

ordinata ispod težišta funkcije za koju smo izračunali površinu

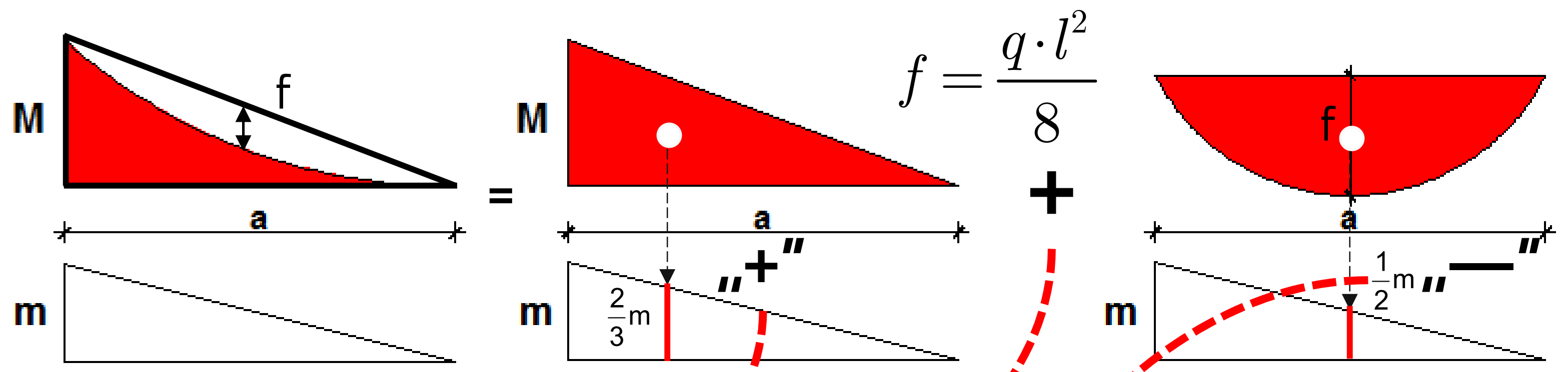
površina dijagrama **(obvezno parabola!)**

Ostali postupci izračunavanja integrala: **Trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, Gaussova kvadratura**

Primjer #2

Iskombinirati sljedeće dijagrame pomoću **Vereshchaginovog pravila!**

a)

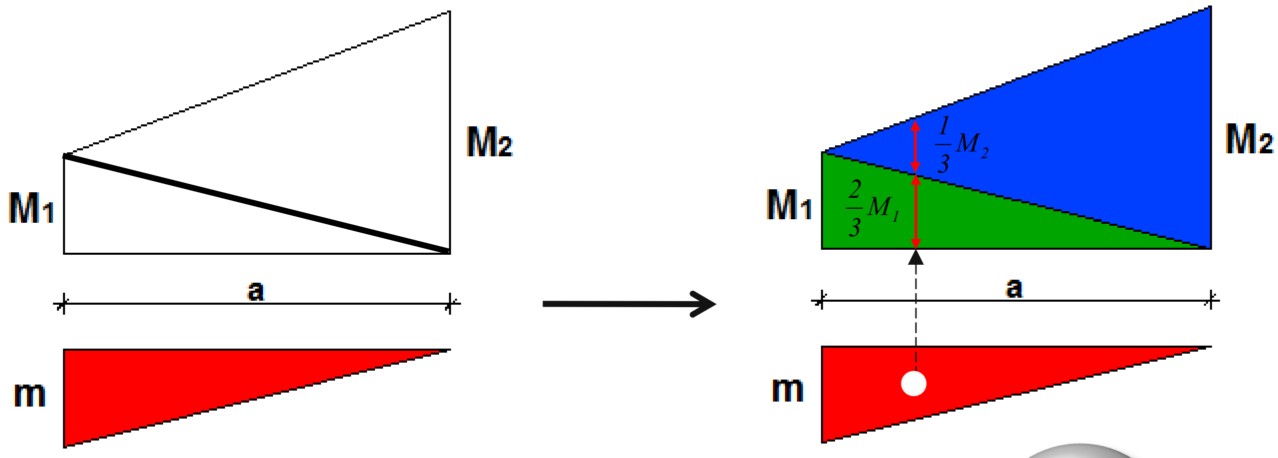


Za slučaj parabole u dijagramu momenata M obvezno se pri kombinaciji uzima **površina parabole**, dok se **ordinata očitava** iz dijagrama **jediničnih opterećenja!**

$$\delta = +\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{M\cdot a}{2}\cdot\left(+\frac{2}{3}\cdot m\right)+\frac{2}{3}\cdot f\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot m\right)\right]=\frac{a\cdot m}{3\cdot EI}\left(M-f\right)$$

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

b)

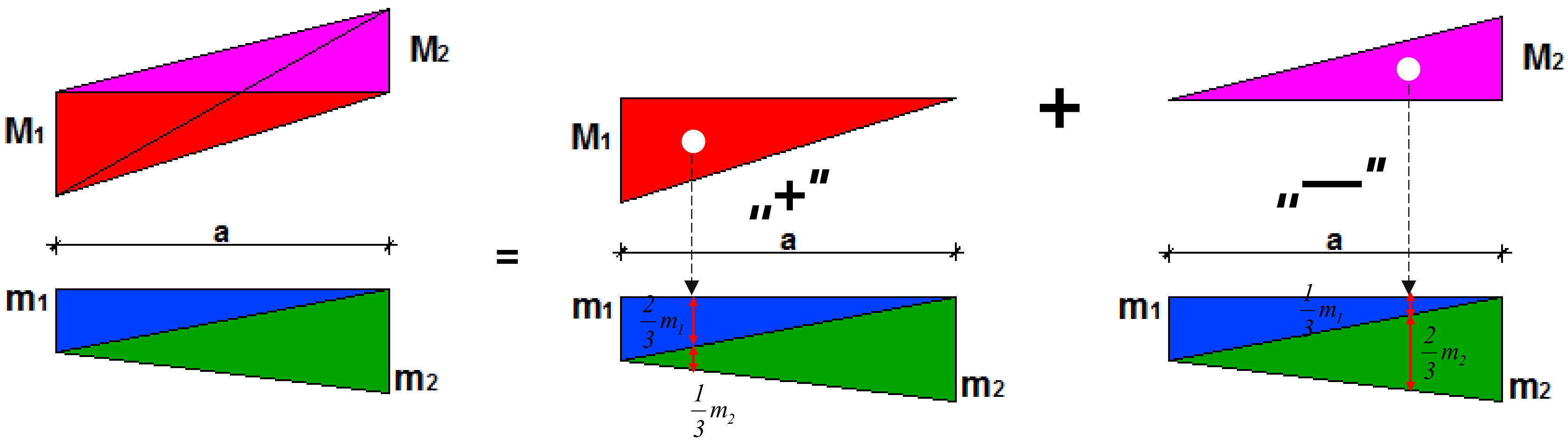


Preporuka: trapez dijelimo na 2 trokuta !

$$\delta = -\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{m\cdot a}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot M_1+\frac{1}{3}\cdot M_2\right)\right]$$

minus jer su **M** i **m** dijagrami suprotnih predznaka !

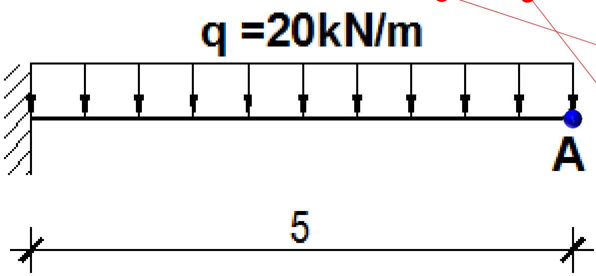
c)



$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_1 \cdot a}{2} \cdot \left(+\frac{2}{3} \cdot m_1 + \frac{1}{3} \cdot m_2 \right) + \frac{M_2 \cdot a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot m_1 - \frac{2}{3} \cdot m_2 \right) \right]$$

Zadatak #1 | Odrediti vrijednost vertikalnog pomaka točke A.

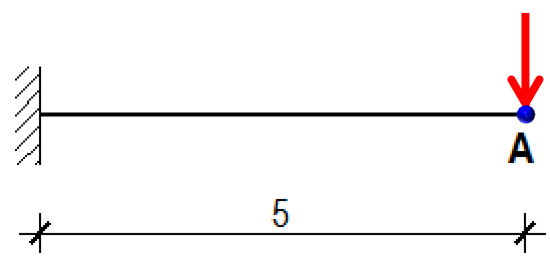
$$b/h = 30/50 \text{ cm; C}\,25/30$$

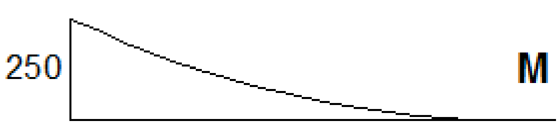


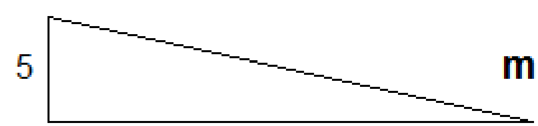
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 3.13 \cdot 10^{-3}\, m^4$$

$$E = 3.05 \cdot 10^7\, kN/m^2$$

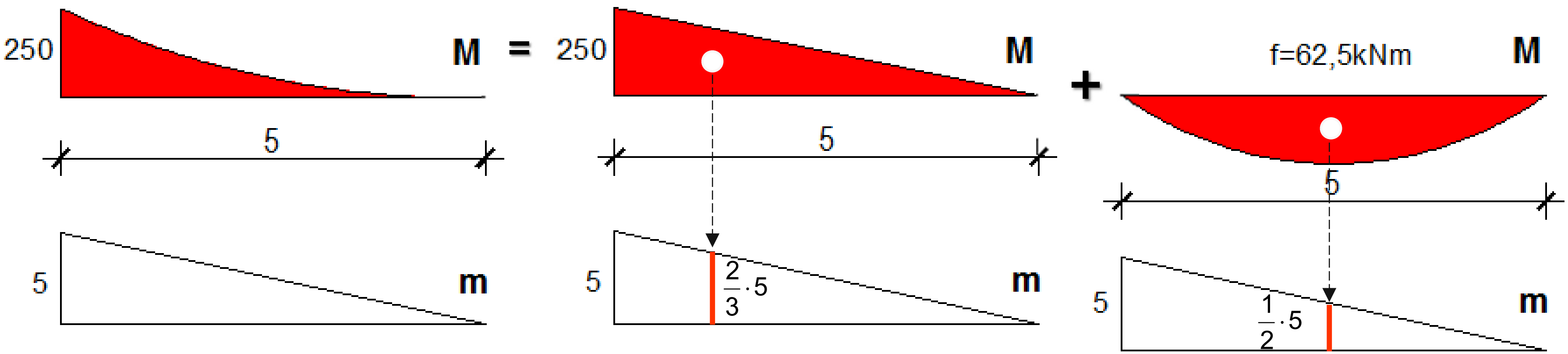
$$EI = 95\,312.5\ kNm^2$$







Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

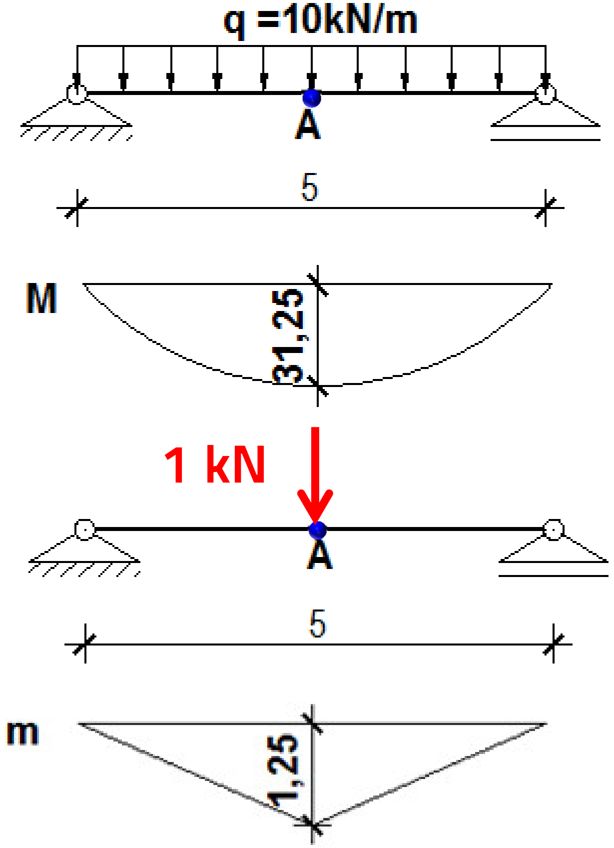


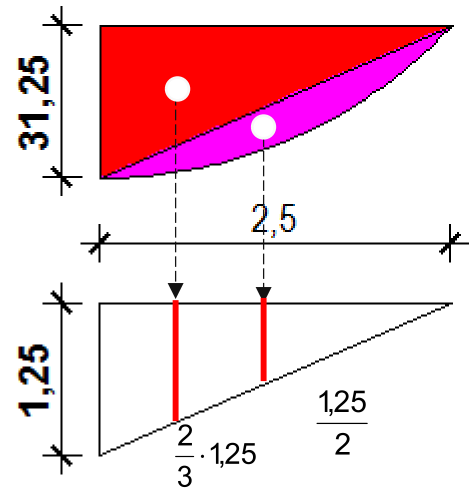
$$\delta_{Ay}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{250\cdot 5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 5\right)\right]-\left[\frac{2}{3}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 5\right)\right]=\frac{1562.5}{EI}$$

$$\delta_{Ay}=0.016\ m=\boxed{16\ mm}$$

Zadatak #2 | Odrediti vrijednost vertikalnog pomaka točke A.

$$b/h = 30/50\ \text{cm};\ C\,25/30;\ EI = 95\,312.5\ \text{kNm}^2$$





Simetričan dijagram!

$$\delta_{Ay} = \frac{1}{EI}\cdot 2\times\left[\frac{31.25\cdot 2.5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1.25\right) + \frac{2}{3}\cdot 7.81\cdot 2.5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1.25\right)\right] = \frac{81.39}{EI} = \boxed{0.85\ mm}$$

Statički neodređeni sustavi

Definicija sa statičkog gledišta:

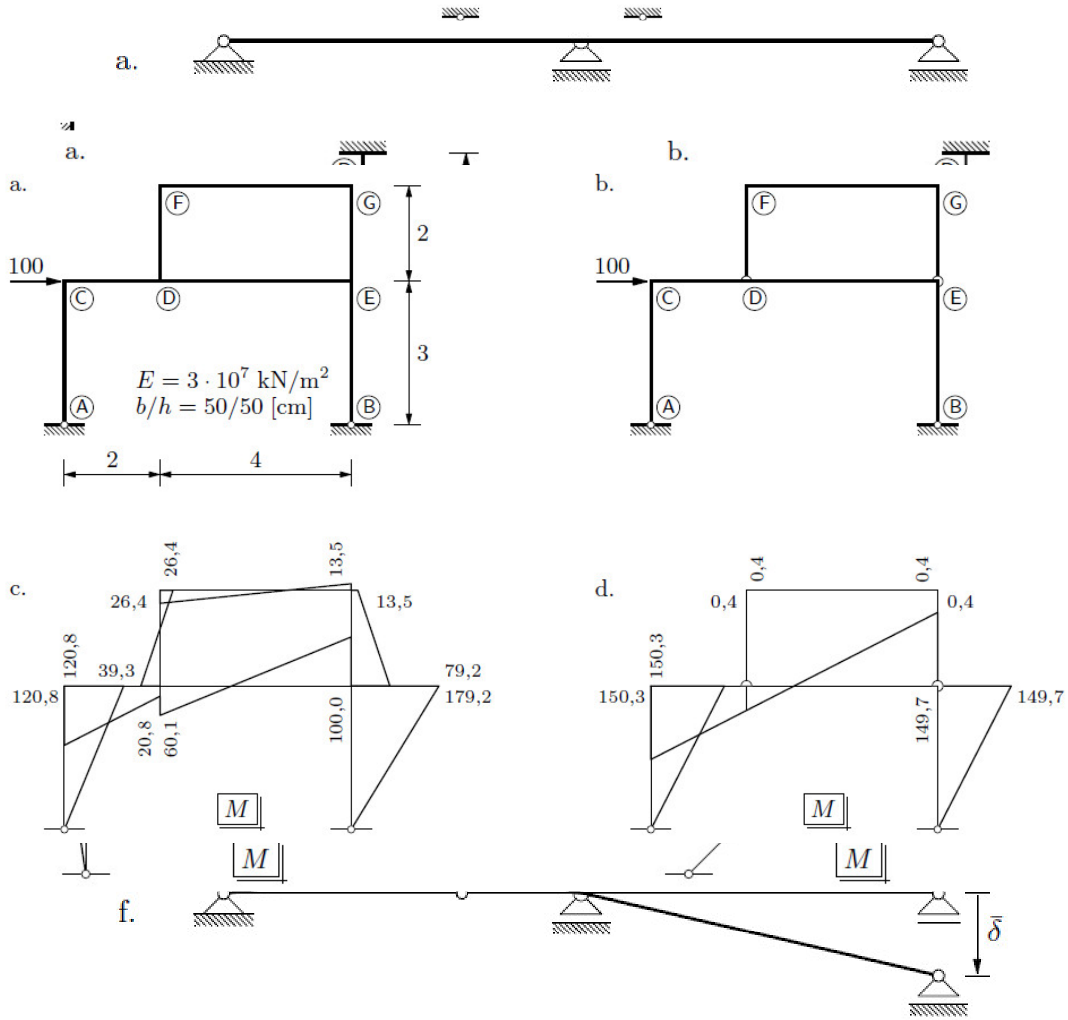
Statički neodređeni sustav je onaj koji može ostati u stanju ravnoteže **za bilo koje opterećenje**, a broj nepoznatih sila u vanjskim i/ili unutarnjim vezama je **veći** od broja neovisnih jednadžbi kojima se opisuju uvjeti ravnoteže (pa te uvjete zadovoljava beskonačno mnogo vrijednosti sila).

Definicija sa kinematskog gledišta:

Statički neodređeni sustav je **geometrijski nepromjenjiv** sustav u kojem je broj veza, vanjskih ili unutarnjih ili jednih i drugih, **veći od najmanjeg broja** nužnog za njegovu geometrijsku nepromjenjivost.

- U kinematskoj se klasifikaciji geometrijski nepromjenjivi sustavi s viškom veza nazivaju i **kinematski preodređenima**.

Statički neodređeni sustavi



1. Prema definiciji statički neodređenih konstrukcija, postoje **beskonačni skupovi vrijednosti sila** u vanjskim i u unutarnjim vezama koji zadovoljavaju sustav neovisnih jednadžbi ravnoteže cijele konstrukcije i njezinih dijelova. Za izdvajanje stvarnih vrijednosti potrebne su stoga dodatne jednadžbe (izraz **kinematskih** uvjeta).
2. Sile u statički neodređenom sustavu ovise **o broju i o vrsti veza** te o **omjeru krutosti** njegovih dijelova.
3. U statički neodređenom sustavu se pri **promjenama temperature** uglavnom pojavljuju reakcije i unutarnje sile. Nadalje, sile u vezama i u presjecima mogu se pojaviti zbog **prisilnih pomaka** poput popuštanja ležajeva i ugradnje netočno izvedenih dijelova.
4. **Promjena oblika osi dijela** statički neodređenoga nosača izazvat će promjenu sila i u drugim njegovim dijelovima.
5. Zamjena zadanoga **opterećenja statički ekvivalentnim** dovodi do promjene sila na cijelom nosaču, a ne samo na području djelovanja opterećenja.
6. Opterećenja koja u složenom sustavu djeluju na dio koji možemo smatrati "nosačem za sebe" **uzrokuju unutarnje sile** i u statički neodređenim dijelovima koji se oslanjaju na njega.

Karakteristike statički neodređenih sustava

1. Proračun se vrši pomoću uvjeta ravnoteže sa **dodatnim uvjetima deformacija** metodama:
    - **Metoda sila** (mala statička neodređenost)
    - **Metoda pomaka** (mala kinematička neodređenost)
    - **Iterativne metode** (velika kinematička neodređenost)

2. Promjene temperatura, slijeganje ležaja i netočnosti izvedbe **imaju utjecaja na sustav** (dijagrami unutarnjih sila mogu imati znatne promjene veličina).

3. Za proračun je potrebno poznavati **karakteristike materijala i poprečnih presjeka elemenata** konstrukcije zbog uvjeta deformacije sustava.

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Karakteristike statički neodređenih sustava

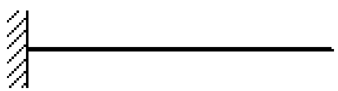
4. Statički neodređene konstrukcije imaju **suvišan broj veza** koje određujemo kroz stupanj statičke neodređenosti sustava.

   Razaranjem jedne veze kod statički određenih sustava dobivamo **labilan sustav**, dok gubitak jedne veze kod statički neodređenih sustava dovodi do **spuštanja stupnja statičke neodređenosti za jedan**, ali sustav može ostati geometrijski nepromjenjiv i ne mora doći do sloma.

   U takvom sustavu dolazi do **preraspodjele unutarnjih sila**, te može ostati u stanju ravnoteže ako se u presjecima **ne dosegnu granična naprezanja materijala**.

Karakteristike statički neodređenih sustava

Statički određen sustav



1 veza

Labilan sustav

Statički neodređen sustav

2 × statički neodređen sustav

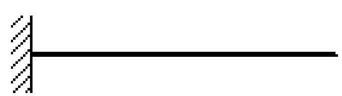
1 veza

otpuštanje veza

1 × statički neodređen sustav

1 veza

otpuštanje veza



statički određen sustav

Statički **neodređeni** sustavi su **sigurniji** od statički određenih !

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Karakteristike statički neodređenih sustava

Sustavi mogu biti:

- statički **određeni**
- statički **neodređeni**

Izrazi za određivanje stupnja redundancije odnosno statičke neodređenosti:

$$a)\quad S=3\cdot D-2\cdot Z_2-4\cdot Z_3-6\cdot Z_4-\ldots-L$$

$$b)\quad S=2\cdot \check{C}-\left(\check{S}+K+L\right)$$

Rezultat:

S = 0 nužan, ali ne i dovoljan uvjet za statički određeni sustav

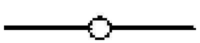
S < 0 statički neodređeni sustav (višak vanjskih i/ili unutarnjih veza)

S > 0 mehanizam

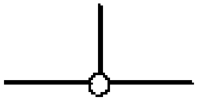
$$S = 3 \cdot D - 2 \cdot Z_2 - 4 \cdot Z_3 - 6 \cdot Z_4 - \ldots - L$$

broj **diskova** (jedan ili više štapova koji su međusobno povezani krutim vezama)

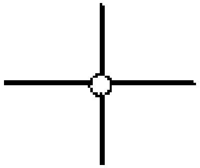
broj **zglobova** koji povezuju **2 diska**



broj **zglobova** koji povezuju **3 diska**



broj **zglobova** koji povezuju **4 diska**



broj **mogućih ležajnih reakcija**

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

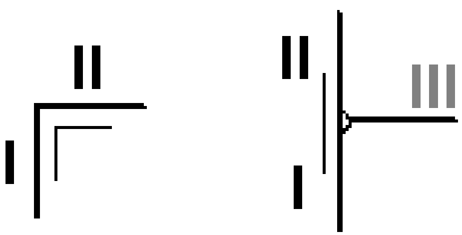
$$S = 2 \cdot \check{C} - \left(\check{S} + K + L \right)$$

broj **čvorova**

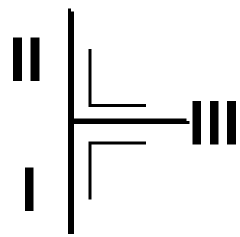
broj **štapova**

broj **krutih veza**

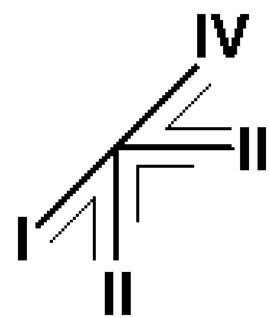
broj **mogućih ležajnih reakcija**



jedna kruta veza



dvije krute veze

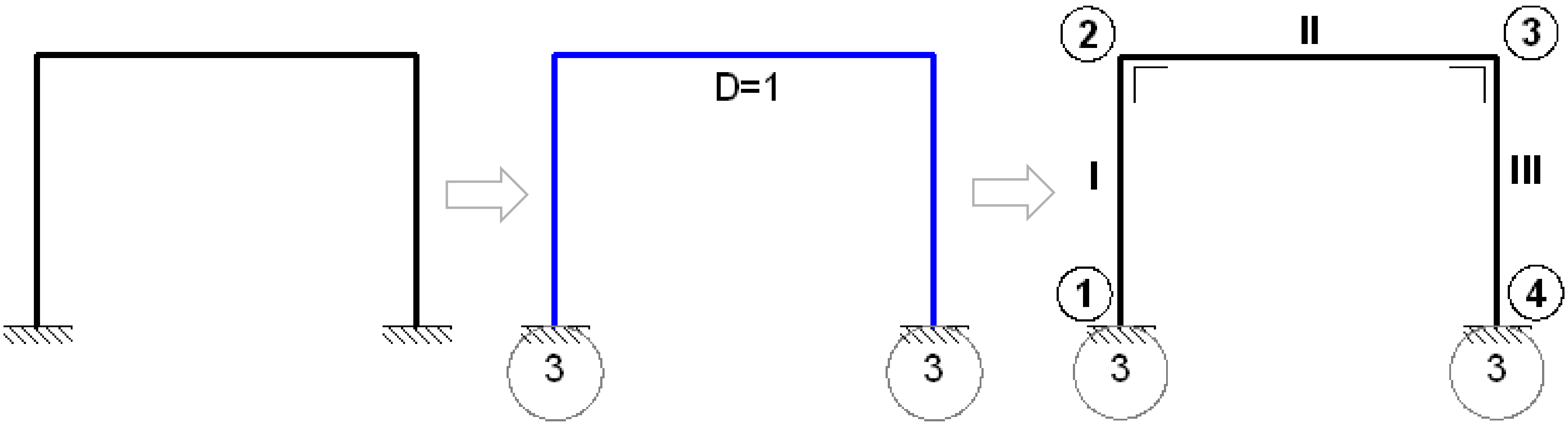


tri krute veze

Broj krutih veza = broj štapova (spojenih krutom vezom) **– 1**

Primjer #3

Odrediti stupanj statičke neodređenosti sustava.



$$a)\quad S = 3 \cdot 1 - 6 = -3$$

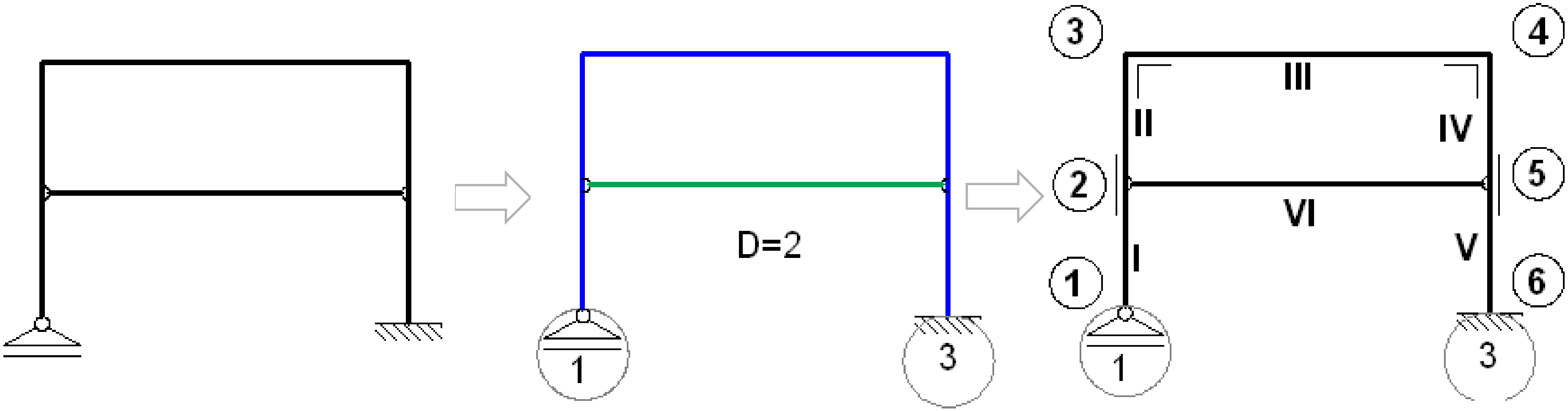
D L

$$b)\quad S = 2 \cdot 4 - (3 + 2 + 6) = -3$$

Č Š K L

Primjer #4

Odrediti stupanj statičke neodređenosti sustava.

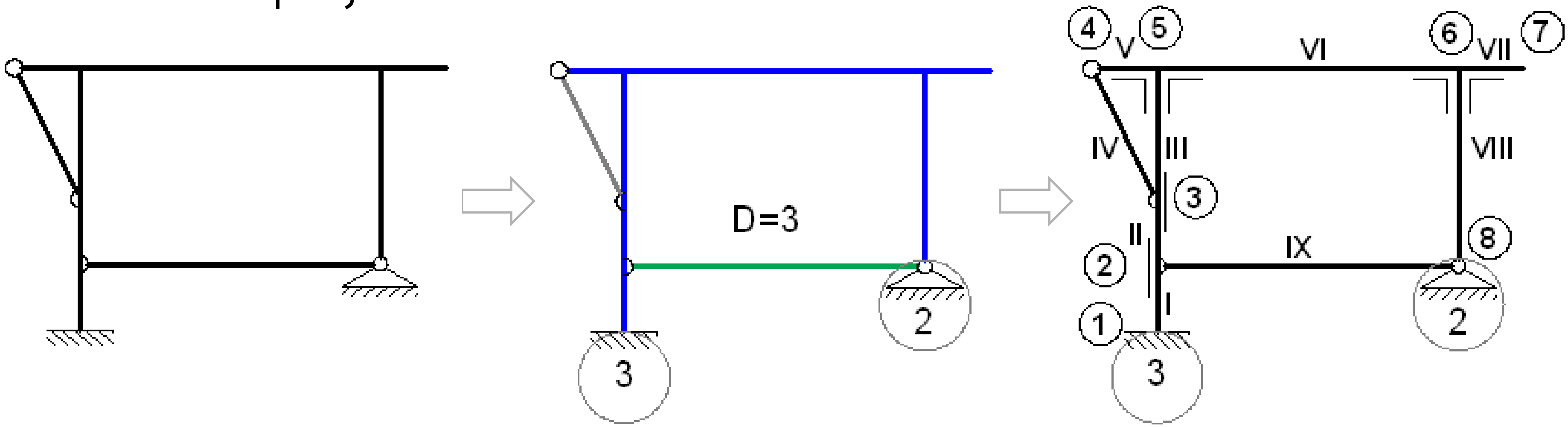


$$a)\quad S = 3\cdot\underbrace{2}_{D} - 2\cdot\underbrace{2}_{Z_2} - \underbrace{4}_{L} = -2$$

$$b)\quad S = 2\cdot\underbrace{6}_{Č} - (\underbrace{6}_{Š} + \underbrace{4}_{K} + \underbrace{4}_{L}) = -2$$

Primjer #5

Odrediti stupanj statičke neodređenosti sustava.



$$a)\quad S = 3\cdot\underbrace{3}_{D} - 2\cdot\underbrace{4}_{Z_2} - \underbrace{5}_{L} = -4$$

$$b)\quad S = 2\cdot\underbrace{8}_{\text{Č}} - (\underbrace{9}_{\text{Š}} + \underbrace{6}_{K} + \underbrace{5}_{L}) = -4$$

Metoda sila

Metoda sila je metoda određivanja dijagrama unutarnjih sila kod statički neodređenih sustava kod koje **otpuštanjem unutarnjih i/ili vanjskih veza** iz statički neodređenog sustava dobivamo statički određeni sustav koji nazivamo **osnovni sustav!**

Osnovni sustav nastaje tako da se u zadanom sustavu raskine određeni broj vanjskih ili unutarnjih veza (broj raskinutih veza ne smije biti veći od stupnja statičke neodređenosti).

Osnovni sustav opterećujemo **jediničnim opterećenjima, X_i** (sile i momenti te parovi sila i momenata) **na mjestu i u smjeru otpuštenih veza** i dobivamo **jedinične dijagrame unutarnjih sila (m_i, v_i, n_i).**

Od **vanjskog opterećenja** koje se prenosi **na osnovni sustav** dobivamo dijagrame unutarnjih sila uslijed vanjskog opterećenja **(M_V, V_V, N_V).**

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

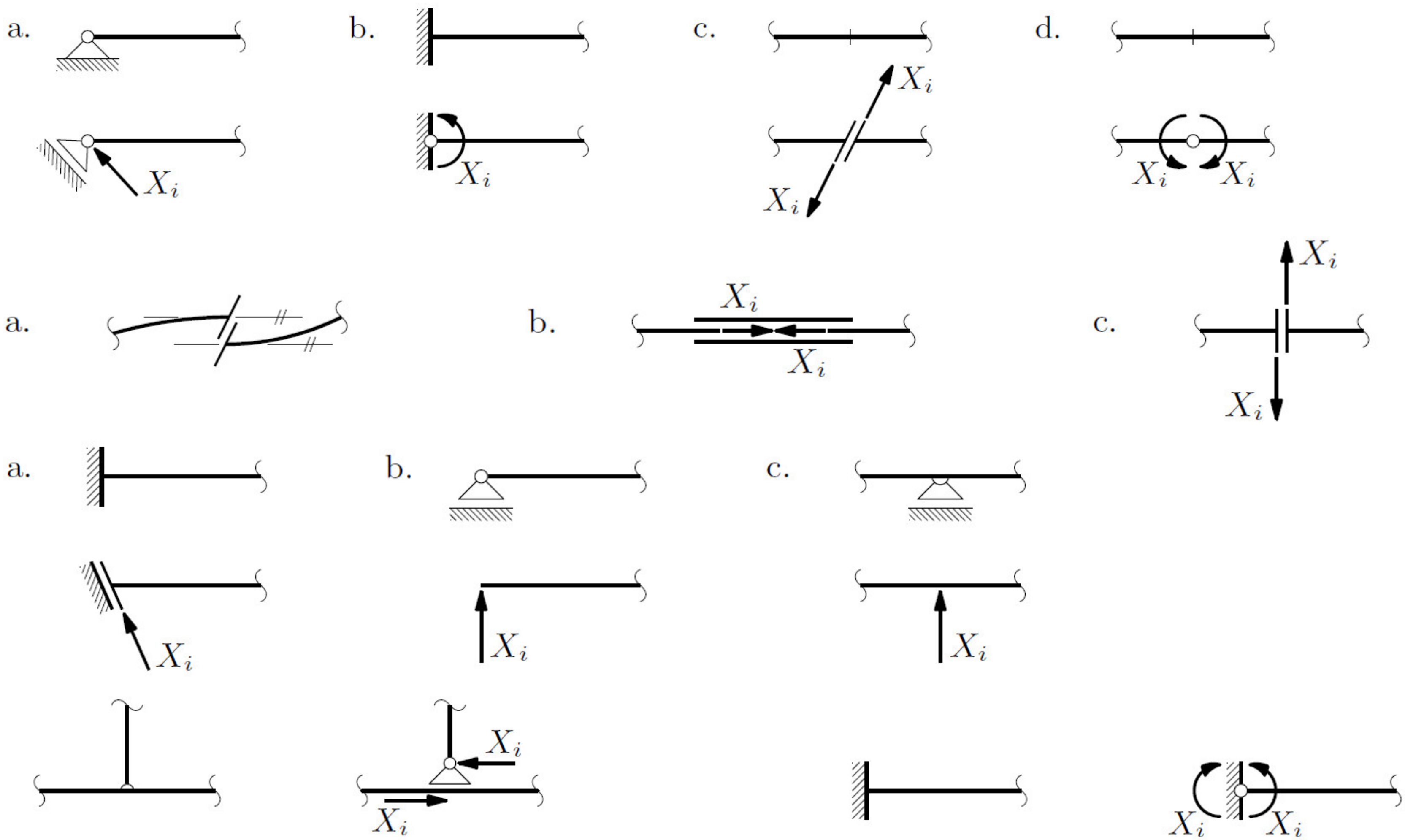
Metoda sila

Određujemo **koeficijente fleksibilnosti (δ_{ij})** kombinirajući jedinične dijagrame sa samima sobom i sa dijagramima od vanjskog opterećenja pomoću **Vereshchaginovog** pravila.

Pomoću **jednadžbi kontinuiteta** koje sadrže koeficijente fleksibilnosti određujemo vrijednosti otpuštenih veza X_i, i **superpozicijom dijagrama od jediničnih (m_i, v_i, n_i) i vanjskih opterećenja (M_V, V_V, N_V)** na osnovnom sustavu dobivamo konačne dijagrame unutarnjih sila na statički neodređenom sustavu.

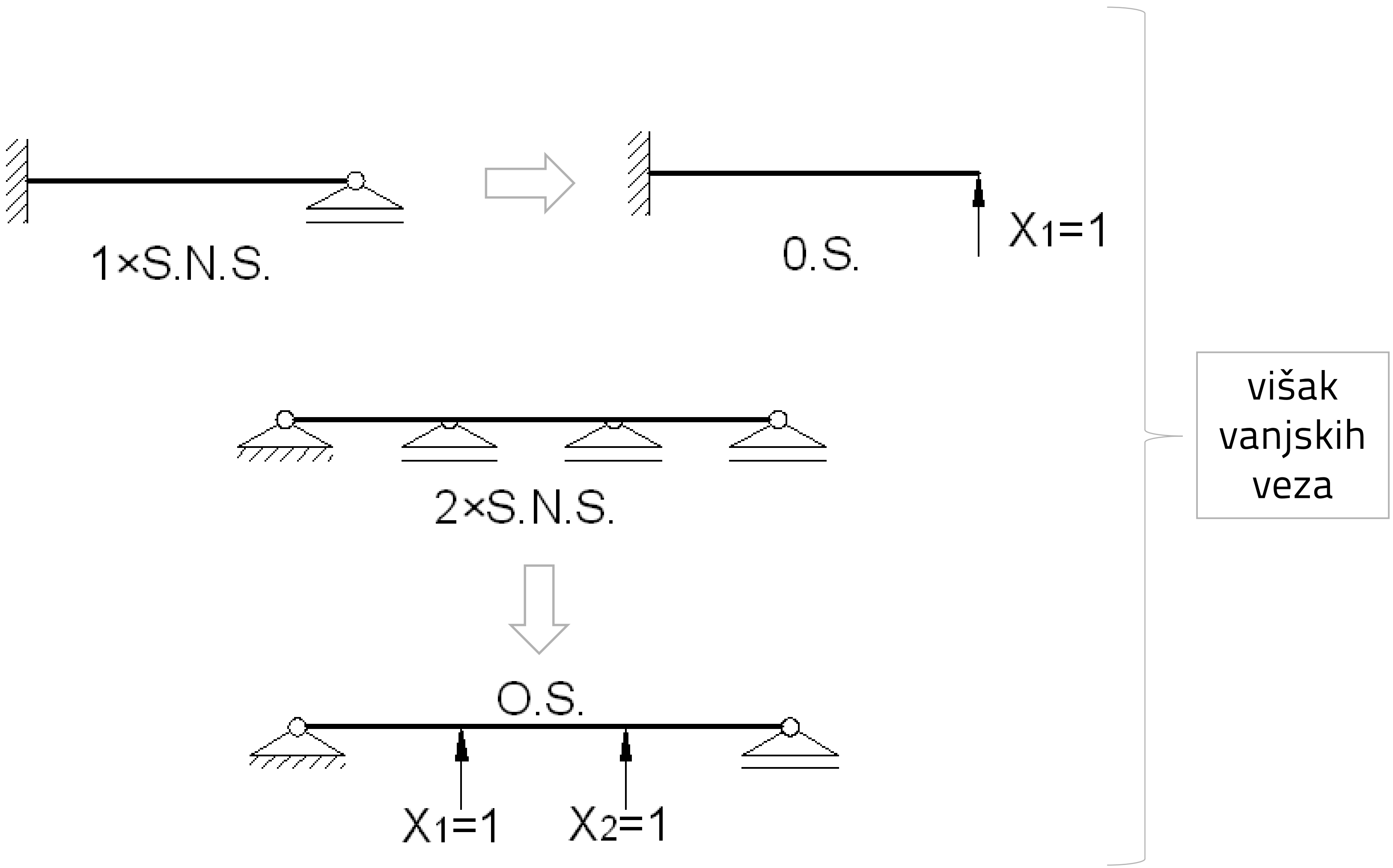
Osnovni sustav treba biti što jednostavniji i **što bliskiji po deformacijama zadanom sustavu** i uvijek mora biti statički određen sustav!

Oslobađanje (raskidanje) veza

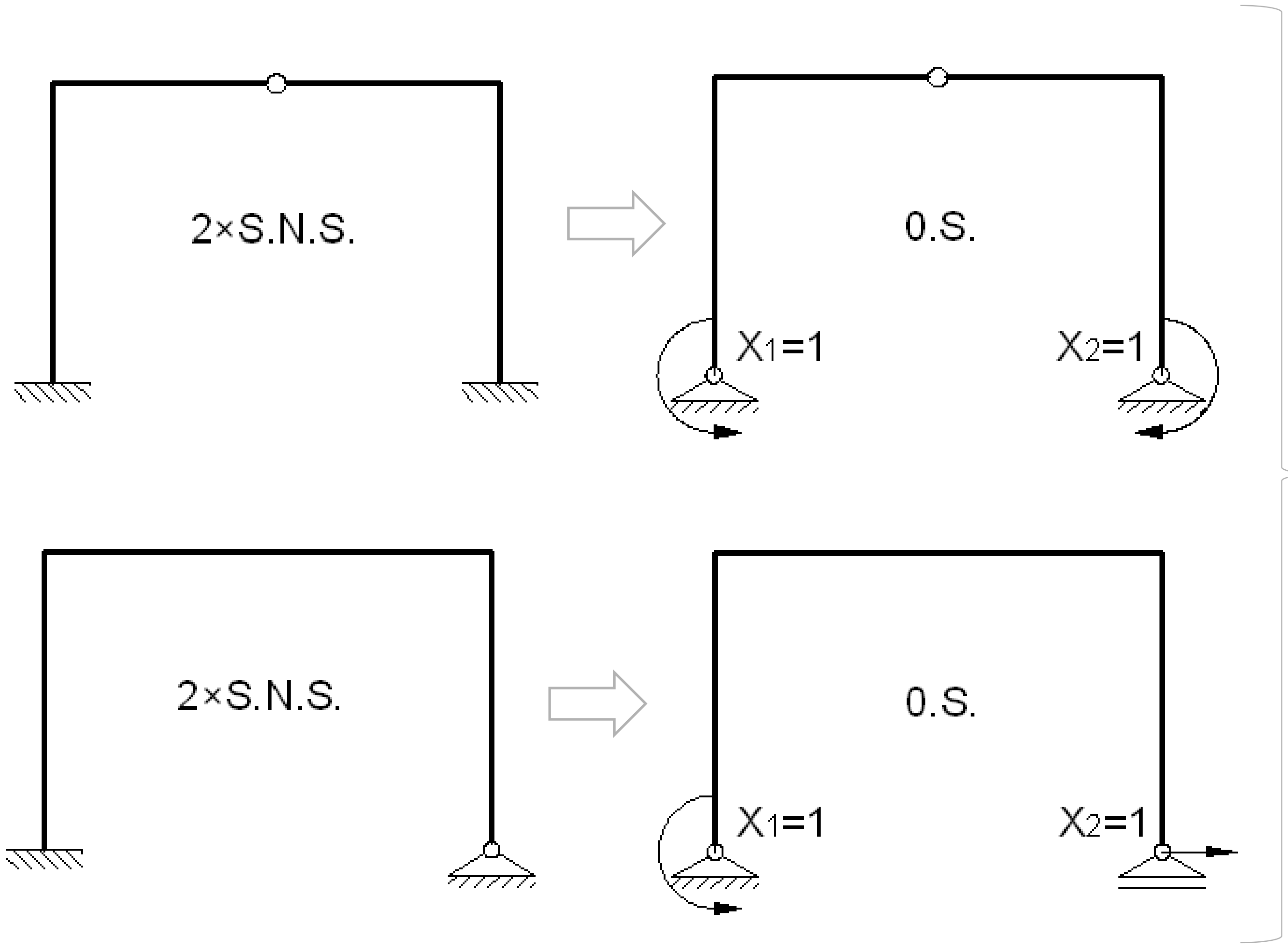


Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Određivanje osnovnih sustava

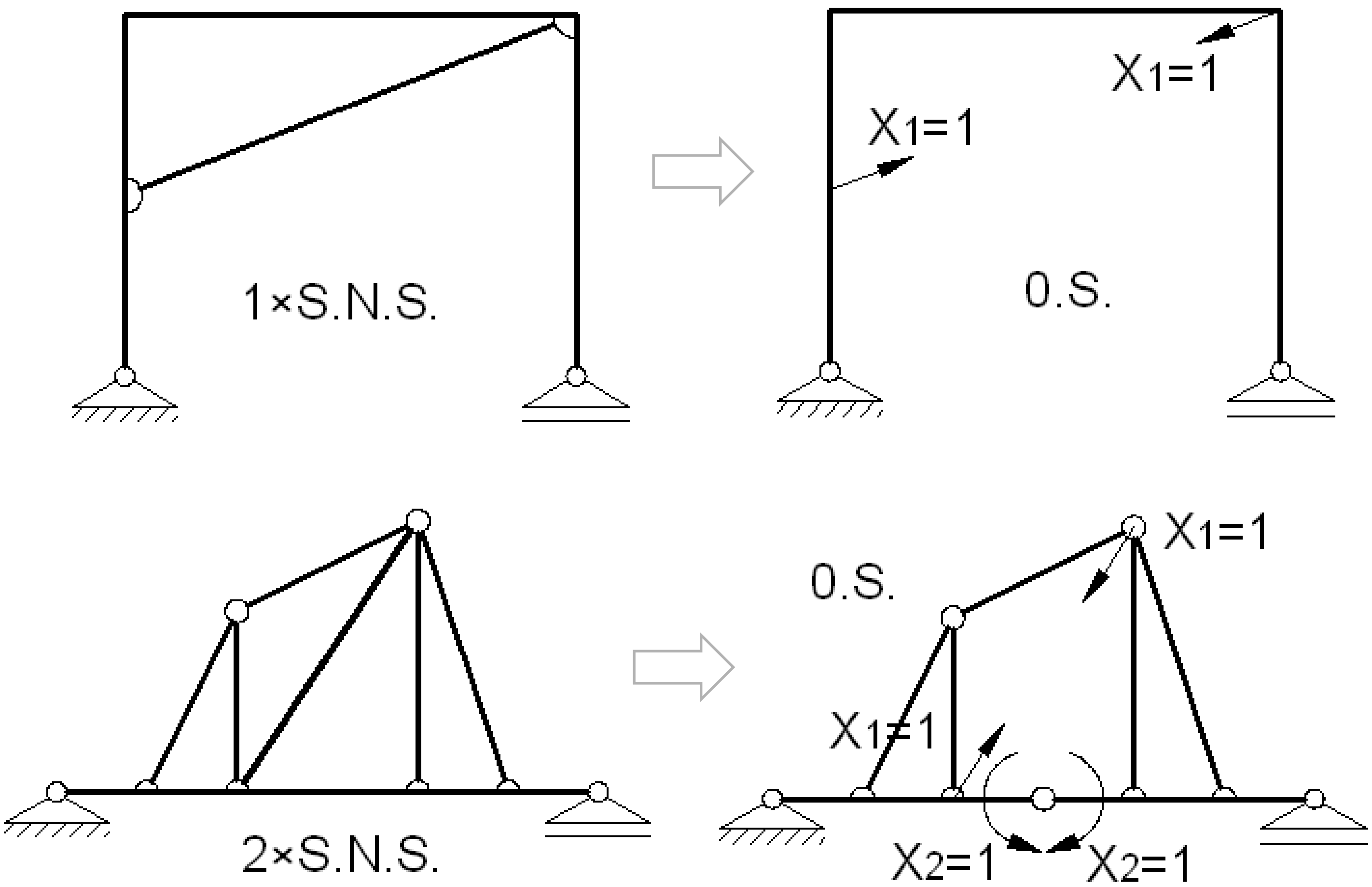


Određivanje osnovnih sustava



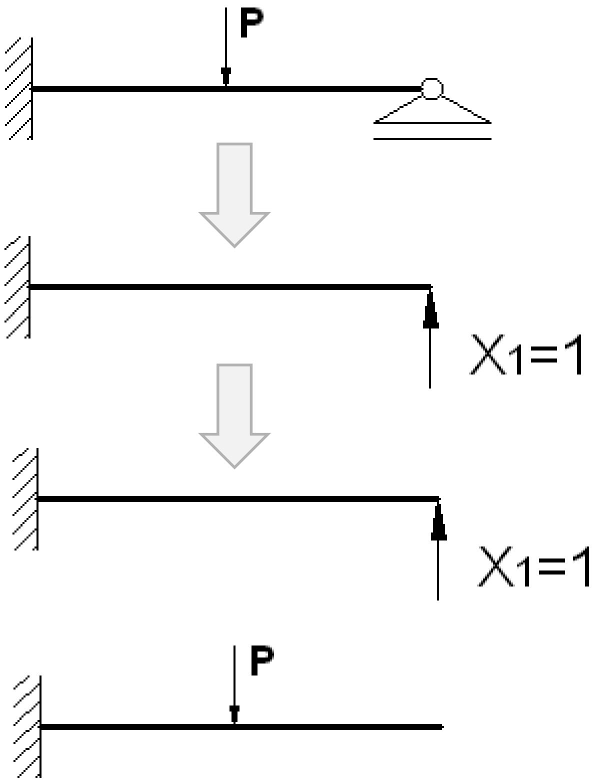
višak **vanjskih** veza

Određivanje osnovnih sustava



višak
unutarnjih
veza

Ideja metode sila



$1 \times$ statički neodređeni sustav

osnovni sustav = statički određen sustav

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{m_1\,,\,v_1\,,\,n_1} \Rightarrow \delta_{11} \\ \qquad \delta_{1V} \\ \mathbf{M_v\,,\,V_v\,,\,N_v} \end{array}\right\}$$

δ_{ij} – koeficijenti fleksibilnosti $\delta_{ij} = \sum \int \left(\dfrac{m_i \cdot m_j}{E \cdot I} + \dfrac{t_i \cdot t_j}{G \cdot A} + \dfrac{n_i \cdot n_j}{E \cdot A} \right) ds$

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

Ideja metode sila

1 × statički neodređen sustav	2 × statički neodređen sustav	
δ_{11} ; δ_{1V}	δ_{11} ; δ_{22} ; δ_{12} ; δ_{1V} ; δ_{2V} $\delta_{12} = \delta_{21}$	potrebni koeficijenti fleksibilnosti
$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} = 0$	$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1V} = 0$ $\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2V} = 0$	jednadžbe kontinuiteta
X_1	X_1 ; X_2	vrijednosti otpuštenih veza

Broj jednadžbi kontinuiteta jednak je broju **statičke neodređenosti sustava.**

Ideja metode sila

Unutarnje sile na statički neodređenom sustavu dobivamo principom **superpozicije dijagrama** na osnovnom sustavu:

$$M_k = M_V + \sum m_i \cdot X_i$$

$$V_k = V_V + \sum v_i \cdot X_i$$

$$N_k = N_V + \sum n_i \cdot X_i$$

$$\boxed{R_k = R_V + \sum r_i \cdot X_i}$$

Superpozicija vrijedi i za izračun **reakcija**

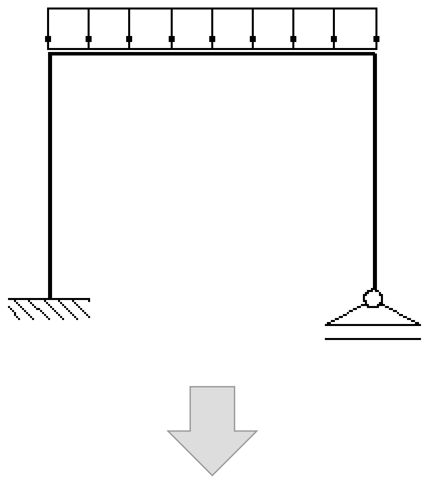
Prethodno izračunate vrijednosti oslobođenih veza

Unutarnje sile na osnovnom sustavu <u>od jediničnog opterećenja</u>

Unutarnje sile na osnovnom sustavu <u>od vanjskog opterećenja</u> u karakterističnom presjeku

<u>Unutarnje sile u karakterističnom presjeku</u> na statički neodređenom sustavu

Metoda sila — Princip rješavanja



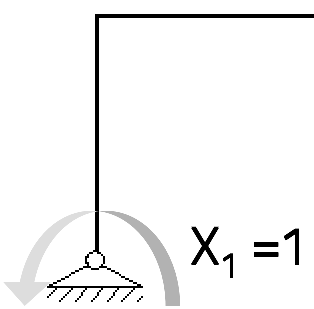
1. Stupanj statičke neodređenosti

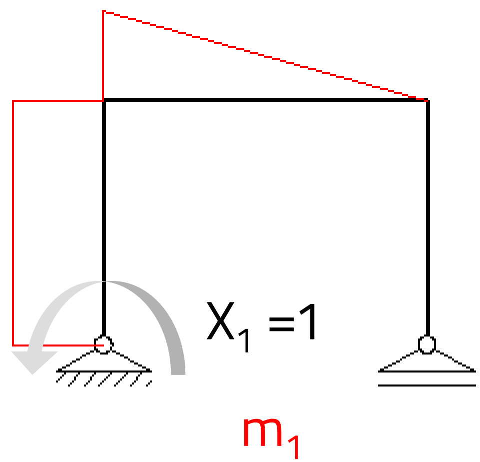
2. Geometrijske i materijalne karakteristike,
EI, EA

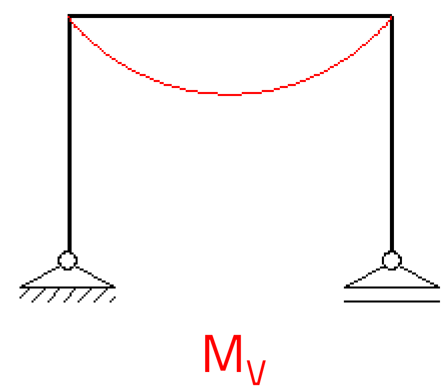
3. Definiranje osnovnog sustava

4. Stanje $\mathbf{X_1=1}$

5. Stanje za vanjsko opterećenje

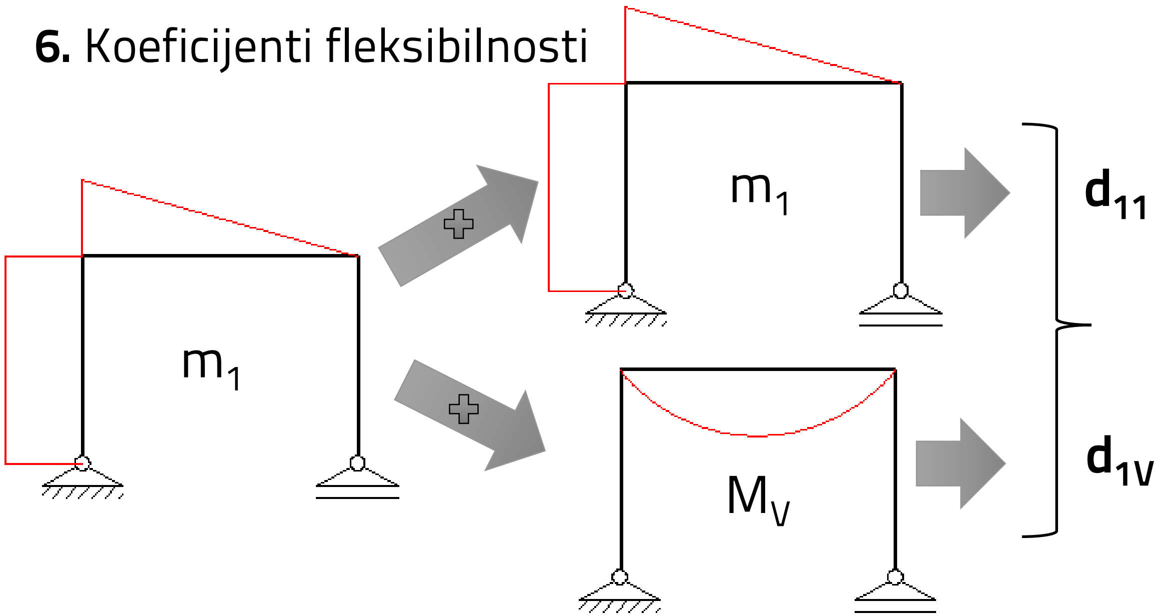






Metoda sila — Princip rješavanja

6. Koeficijenti fleksibilnosti

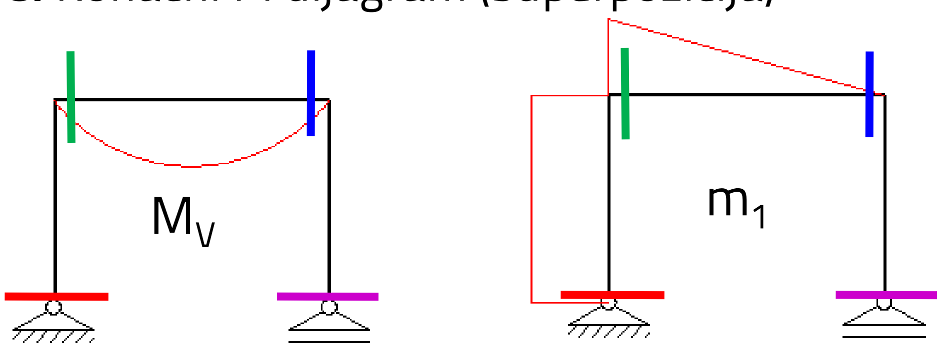


7. Jednadžba kontinuiteta

$$\boxed{\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} = 0}$$

X_1= ... (kN ili kNm)

8. Konačni M dijagram (superpozicija)



$$M = M_V + m_1 \cdot X_1$$

$$M_1 = M_V + m_1 \cdot X_1$$

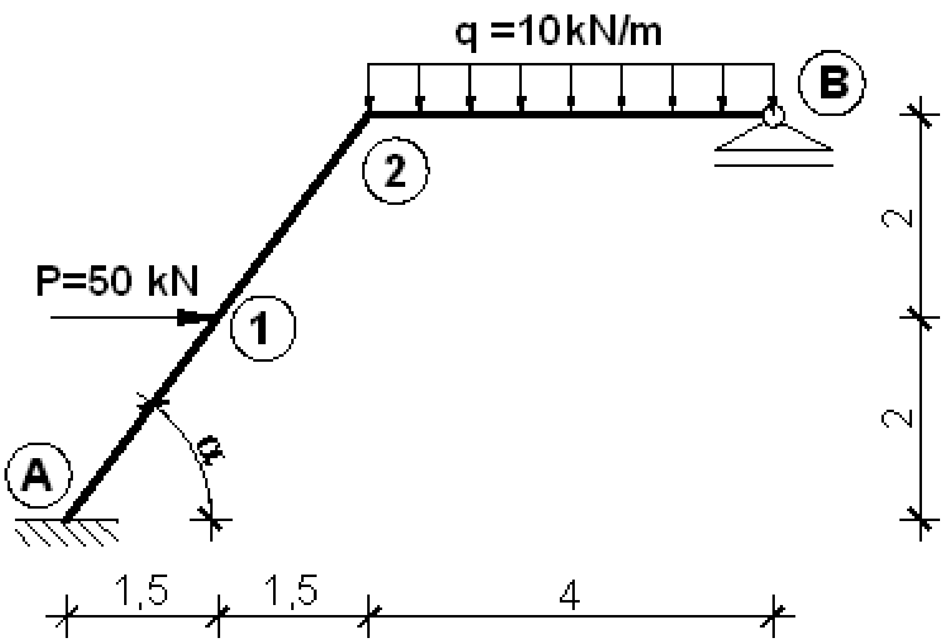
$$M_2 = M_V + m_1 \cdot X_1$$

$$M_3 = M_V + m_1 \cdot X_1$$

$$M_4 = M_V + m_1 \cdot X_1$$

Zadatak #3

Za prikazani sustav odrediti **M, V i N dijagrame** unutarnjih sila. Pri proračunu koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir **utjecaj momenta savijanja i uzdužnih sila.**



b/h = 30/30 cm

$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m²

$\alpha = 53{,}13°$

$\sin\alpha = 0.80$

$\cos\alpha = 0.60$

1. Statička neodređenost

$$a)\quad S = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

$$b)\quad S = 2 \cdot 3 - (2 + 1 + 4) = -1$$

Sustav je **jedan put** statički neodređen !

2. Geometrijske i materijalne karakteristike

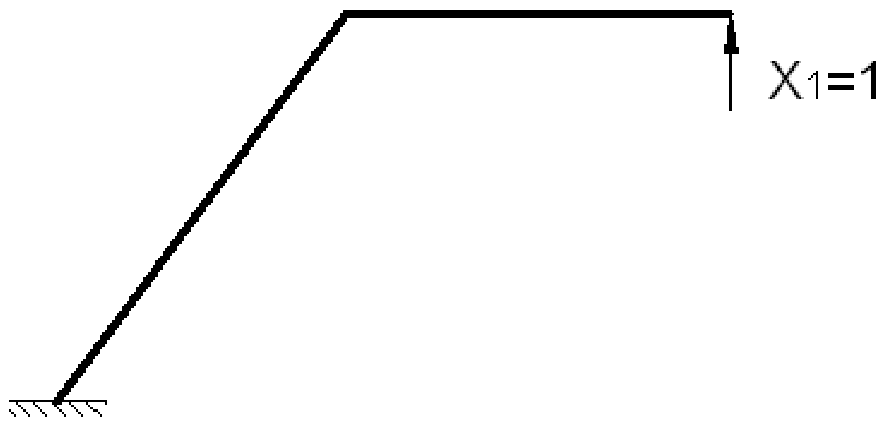
$$E = 3 \cdot 10^7 \ kN/m^2$$

$$b/h = 30/30 \ \ cm$$

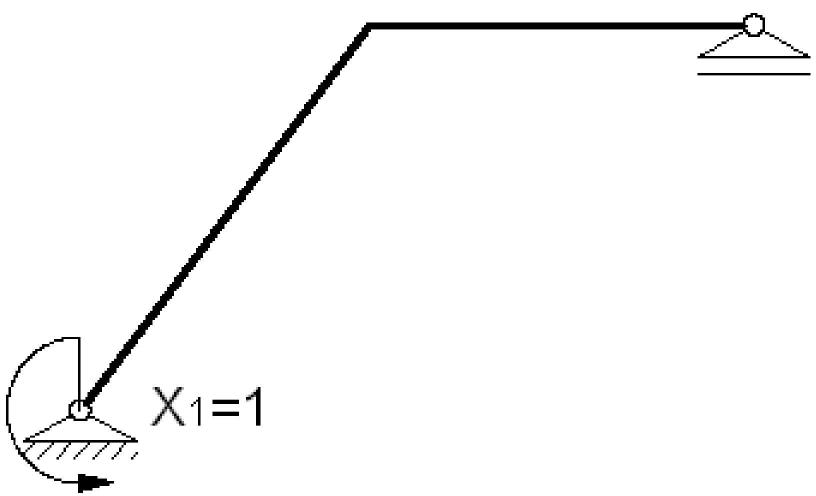
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 0.000\,675 \ \ m^4 \qquad EI = 20\,250 \ \ kNm^2$$

$$A = b \cdot h = 0.09 \ \ m^2 \qquad EA = 2\,700\,000 \ \ kN$$

4. Osnovni sustav

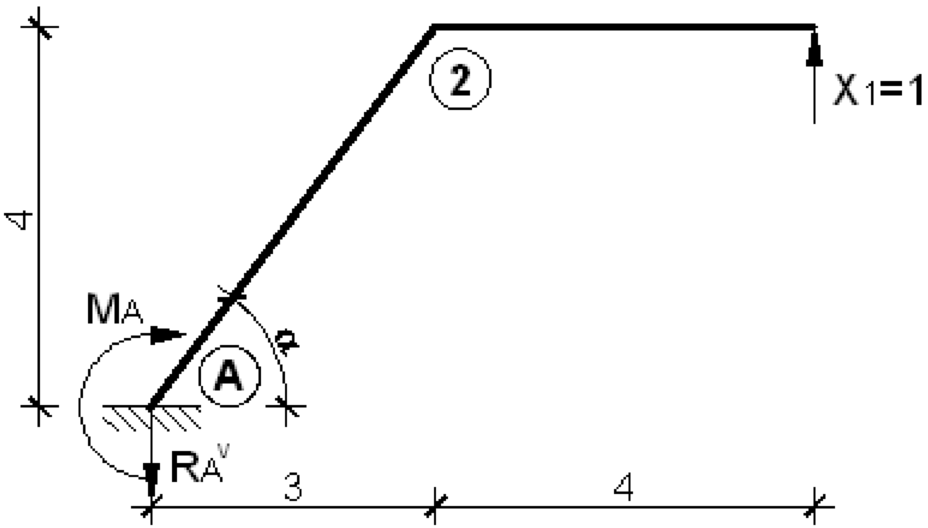


osnovni sustav
konzola ✓



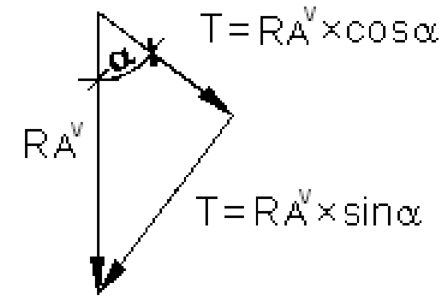
osnovni sustav
prosta greda

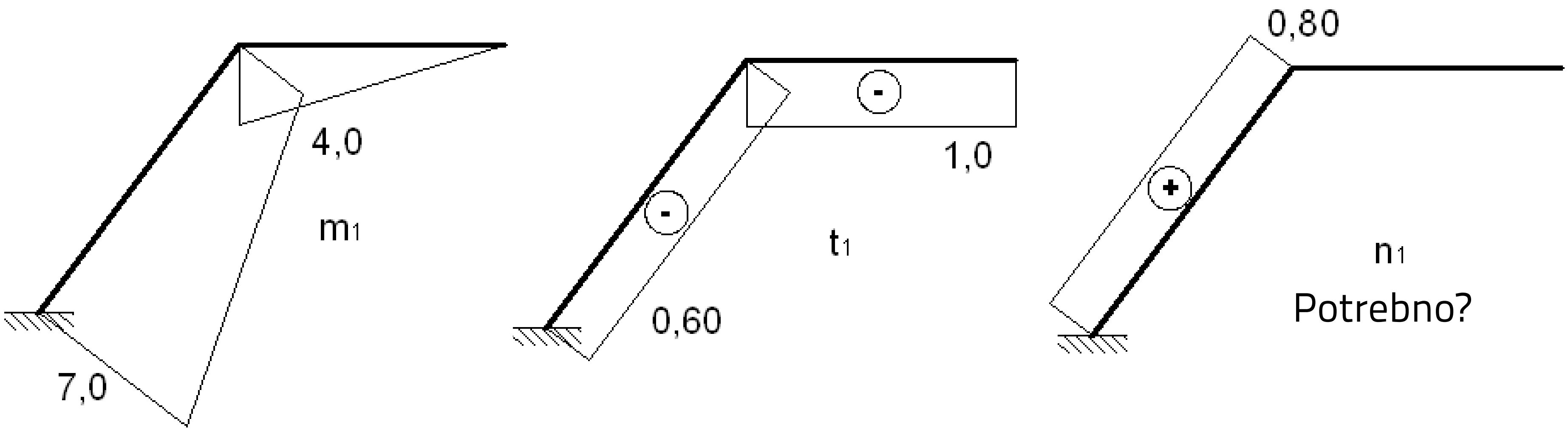
5. Stanje $X_1 = 1$



$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 7.0\ kNm$$

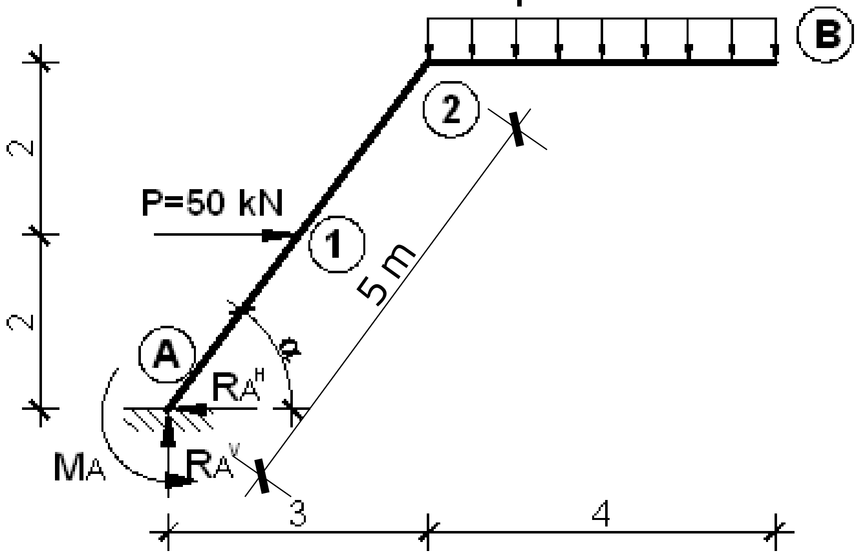
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 1.0\ kN$$



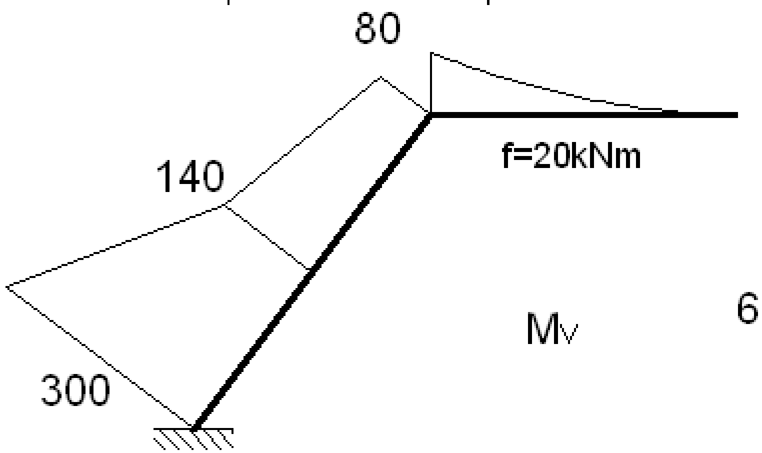


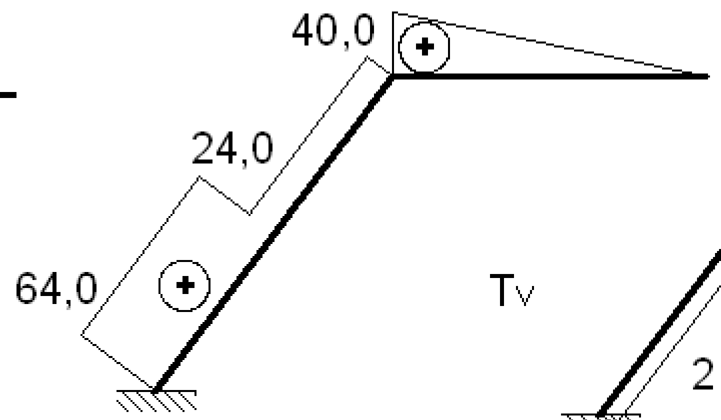
Potrebno?

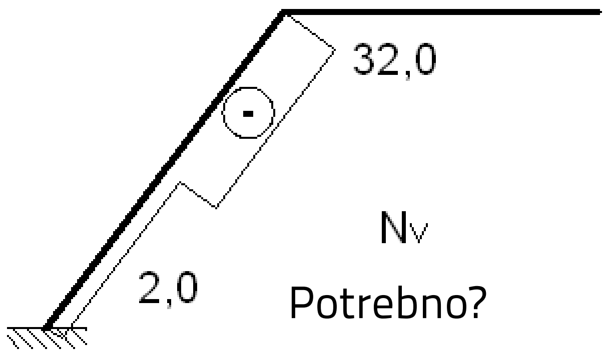
6. Stanje za vanjsko opterećenje



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 300\ kNm$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^V = 40\ kN$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A^H = 50\ kN$$



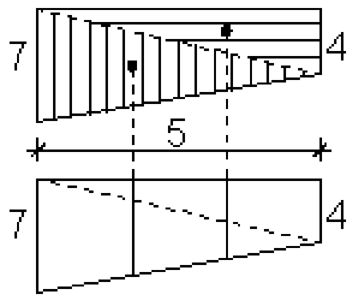




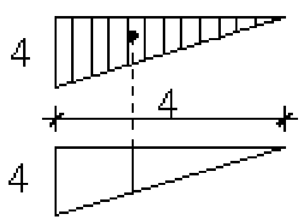
Potrebno?

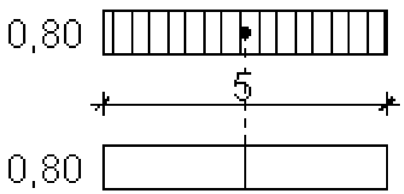
7. Koeficijenti fleksibilnosti

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 7 \right) + \frac{7 \cdot 5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \right] +$$



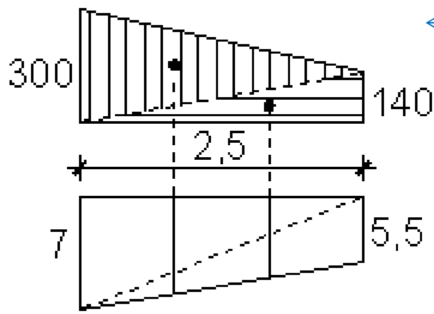
$$+ \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[0.80 \cdot 5 \cdot 0.80 \right] = 0.008\,709 \ m$$

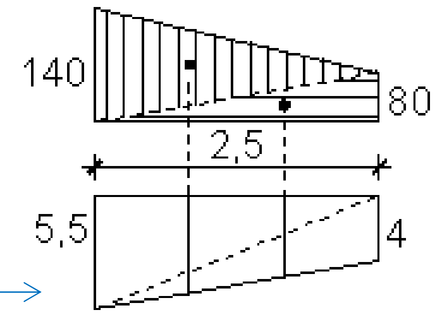




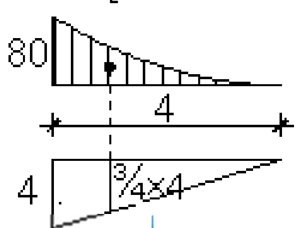
Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

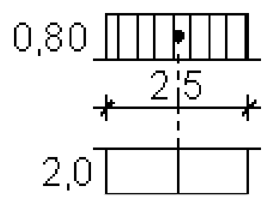
$$\delta_{1V}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{300\cdot 2.5}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot 7-\frac{1}{3}\cdot 5.5\right)+\frac{140\cdot 2.5}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot 5.5-\frac{1}{3}\cdot 7\right)\right]+$$

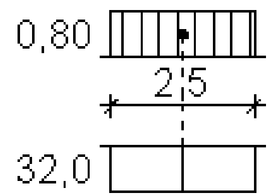




$$+\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{140\cdot 2.5}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot 5.5-\frac{1}{3}\cdot 4\right)+\frac{80\cdot 2.5}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot 5.5\right)\right]+$$







$$+\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 80\cdot 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot 4\right)\right]+\frac{1}{EA}\cdot\left[0.80\cdot 2.5\cdot(-2)+0.80\cdot 2.5\cdot(-32)\right]=-0.253\,482\ m$$

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

8. Jednadžba kontinuiteta

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} = 0$$

$$0.008\,709 \cdot X_1 - 0.253\,482 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = +29.11\ kN \uparrow \left(R_B\right)$$

Vrijednost reakcije u **ležaju B! Dobro pretpostavljen smjer reakcije X_1!**

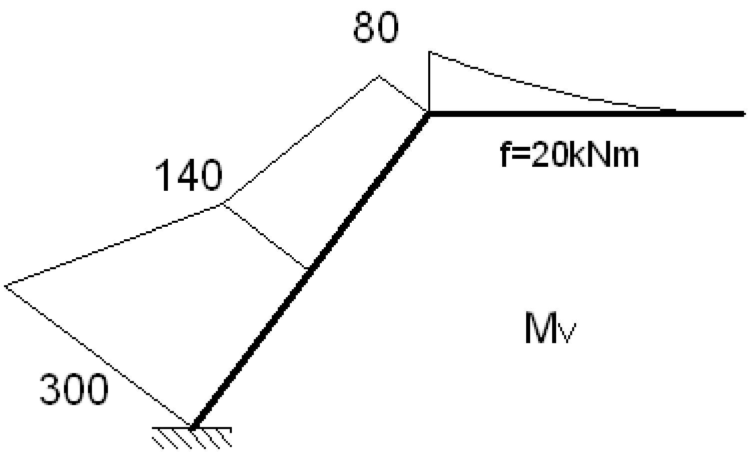
9. Konačni dijagram unutarnjih sila (superpozicija)

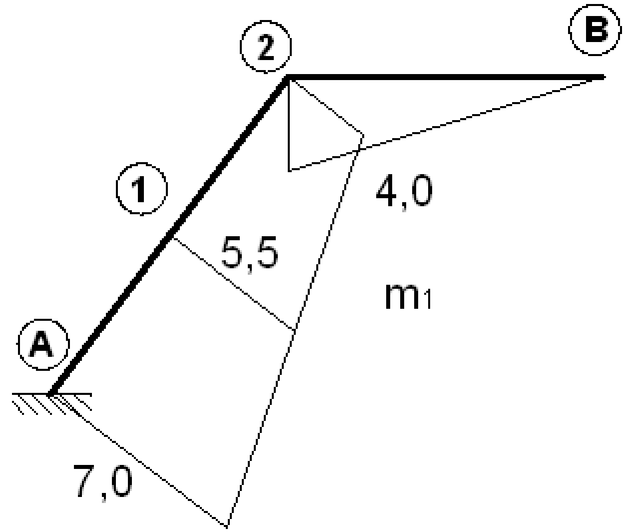
$$M_k = M_V + \sum m_i \cdot X_i$$

$$V_k = V_V + \sum v_i \cdot X_i$$

$$N_k = N_V + \sum n_i \cdot X_i$$

a) Vrijednosti momenata savijanja za $X_1 = +\ 29.11$ kN





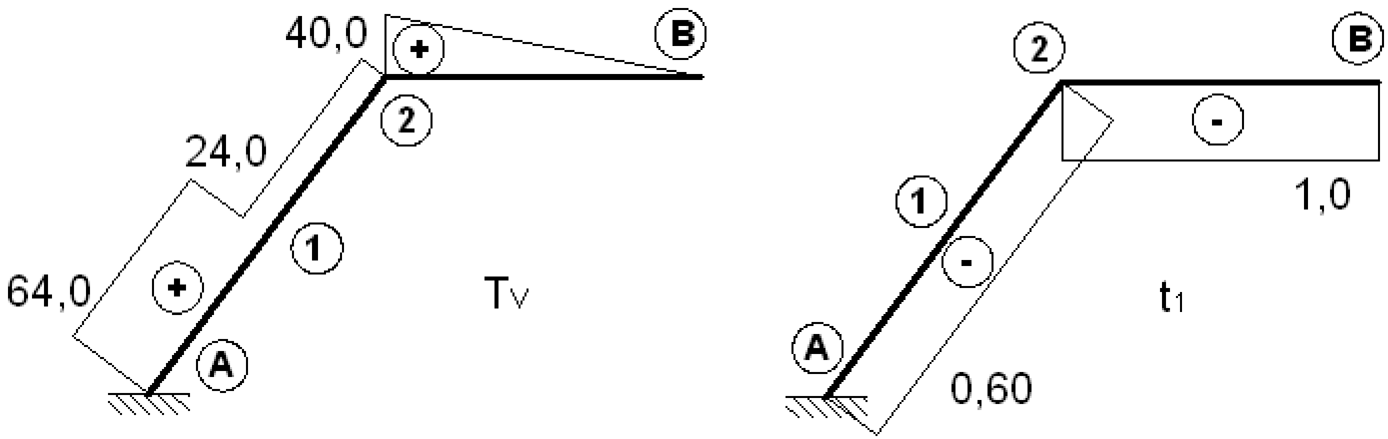
$$M_A = -300 + 7 \cdot (+29.11) = -96.23\ kNm$$

$$M_1 = -140 + 5.5 \cdot (+29.11) = 20.11\ kNm$$

$$M_2 = -80 + 4 \cdot (+29.11) = 36.44\ kNm$$

$$M_B = 0\ kNm$$

b) Vrijednosti poprečnih sila za $X_1 = + 29.11$ kN



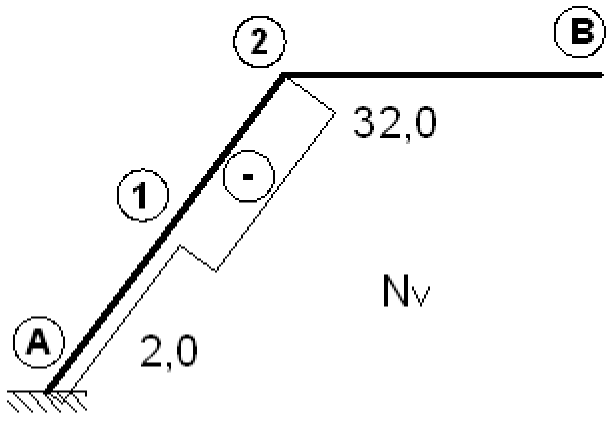
$$V_A = 64 - 0.60 \cdot (+29.11) = 46.53\ kN = V_1^L$$

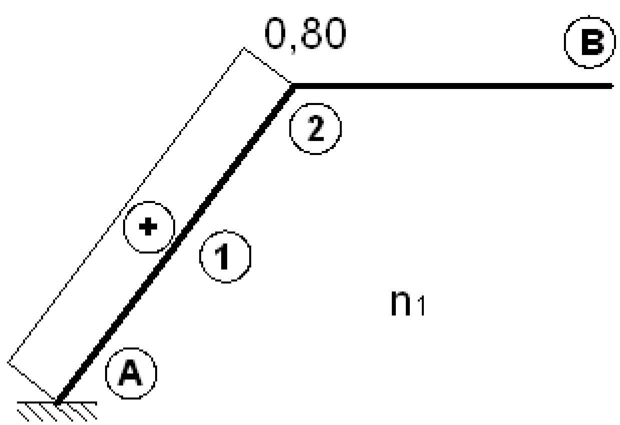
$$V_1^D = 24 - 0.60 \cdot (+29.11) = 6.53\ kN = V_2^L$$

$$V_2^D = 40 - 1 \cdot (+29.11) = 10.89\ kN$$

$$V_B = 0 - 1 \cdot (+29.11) = -29.11\ kN$$

c) Vrijednosti uzdužnih sila za $X_1 = + 29.11$ kN

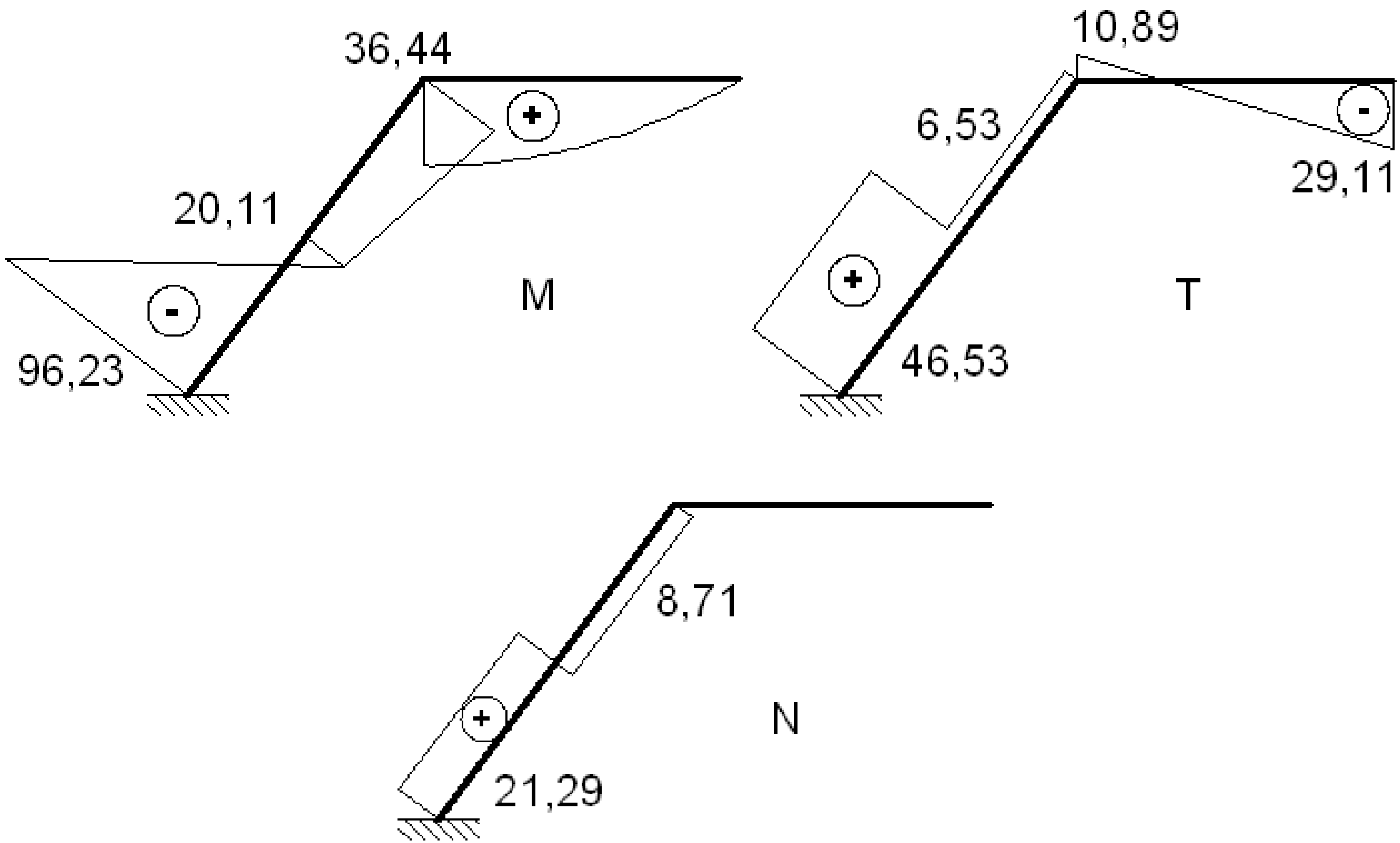




$$N_A = -2 + 0.80 \cdot (+29.11) = 21.29\ kN = N_1^L$$

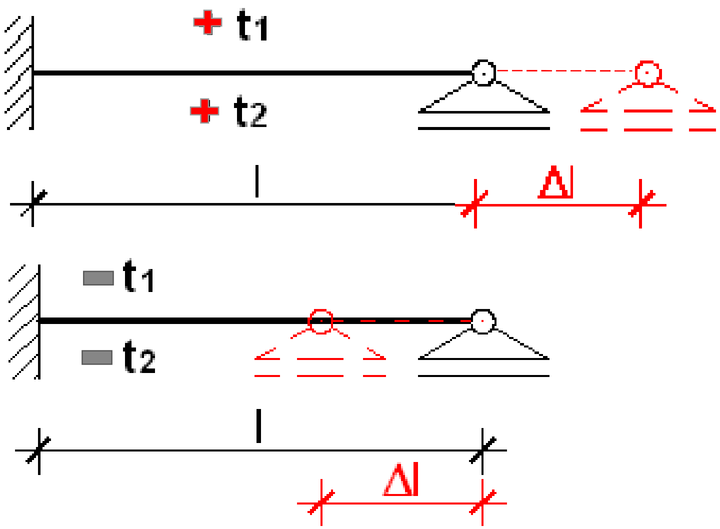
$$N_1^D = -32 + 0.80 \cdot (+29.11) = -8.71\ kN = N_2^L$$

9. Konačni dijagram unutarnjih sila (superpozicija)



1. Temperaturni utjecaji

Jednolika temperatura — uzrokuje promjenu duljine štapa za **Δl,** uzima se kod uzdužne sile **N**

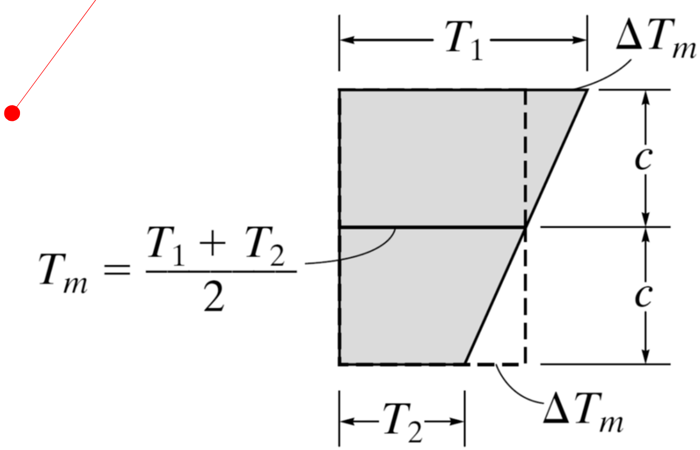


Srednja (jednolika) temperatura

$$t_s = T_M = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Produljenje!

Skraćenje!



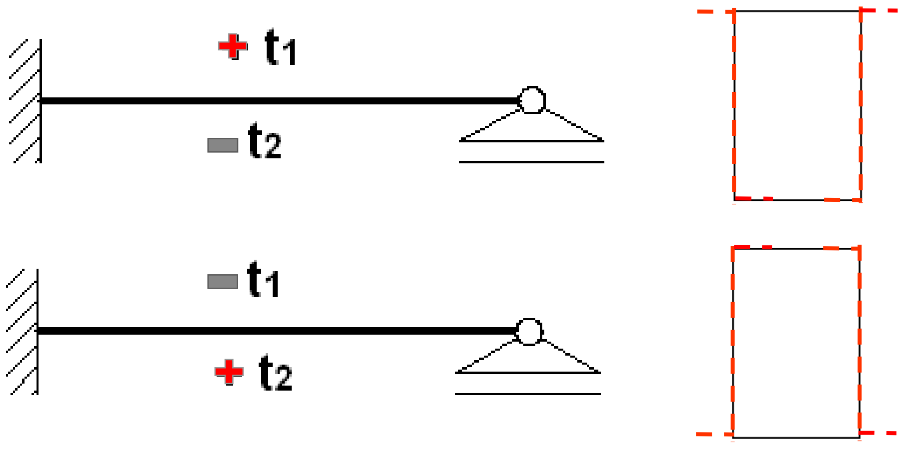
Deformacija uslijed djelovanja jednolike temperature:

$$\varepsilon = \alpha_t \cdot t_s$$

α_T – temperaturni koeficijent $\alpha_T \approx \frac{1 \cdot 10^5}{1^\circ C}$

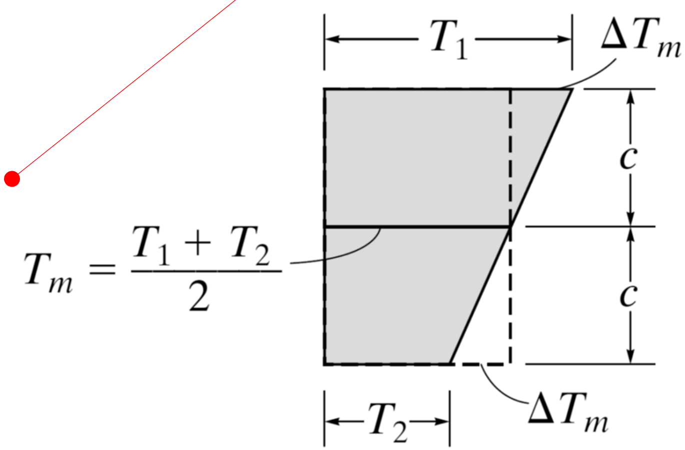
1. Temperaturni utjecaji

Nejednolika temperatura — uzrokuje promjenu zakrivljenosti štapa ***χ***, uzima se kod momenata savijanja **M**



Razlika (nejednolika) temperatura

$$\boxed{\Delta t = t_1 - t_2}$$



Deformacija uslijed djelovanja nejednolike temperature:

$$\boxed{\chi = \alpha_T \cdot \frac{\Delta t}{h}}$$

h – visina poprečnog presjeka

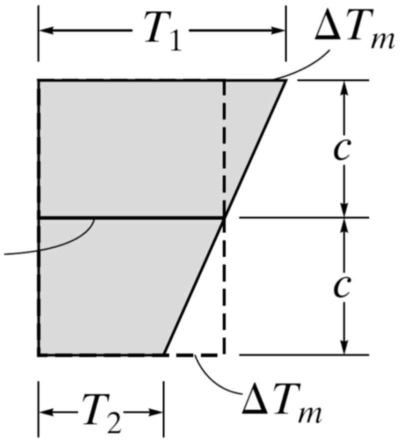
Temperaturni utjecaji

Temperatura se u proračunu uzima pomoću **konstantnih dijagrama** ε **(jednolika) i** χ **(nejednolika)**, koji se nalaze **na mjestima** na kojima djeluje temperatura **i predznaka** koji odgovaraju predznacima srednje, odnosno razlike temperatura.

Kako temperatura djeluje kao **vanjsko opterećenje** uzima se obzir samo pri proračunima **koeficijenata fleksibilnosti** δ_{iv}.

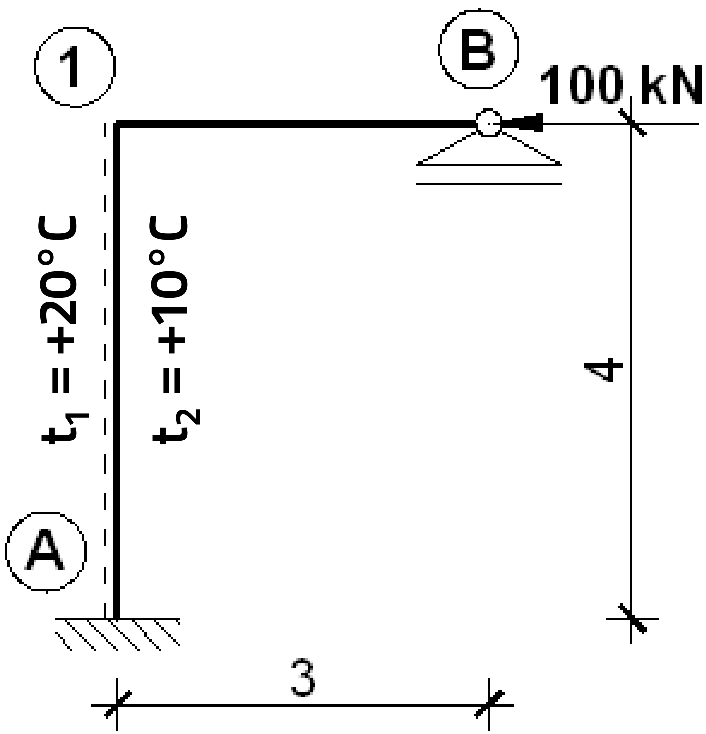
$$\delta_{iv} = \sum\int \frac{m_i \cdot M_v}{E \cdot I}\, ds + \sum\int \frac{n_i \cdot N_v}{E \cdot A}\, ds + \sum\int m_i \cdot \boxed{\underbrace{\frac{\alpha_T \cdot \Delta t}{h}}_{\chi}}\, ds + \sum\int n_i \cdot \boxed{\underbrace{\alpha_T \cdot t_s}_{\varepsilon}}\, ds$$

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$



Zadatak #4

Za prikazani sustav odrediti **M, V i N dijagrame** unutarnjih sila. Pri proračunu koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir **utjecaj momenata savijanja i uzdužnih sila.**



b/h = 30/40 cm

$E = 3 \cdot 10^7 \ kN/m^2$

$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} C^{-1}$

$$\frac{+t_1}{+t_2} \Rightarrow \boxed{t_s = \frac{t_1 + t_2}{2}}$$

1. Statička neodređenost

$S = -1$ Sustav je jedan put statički neodređen.

2. Geometrijske i materijalne karakteristike

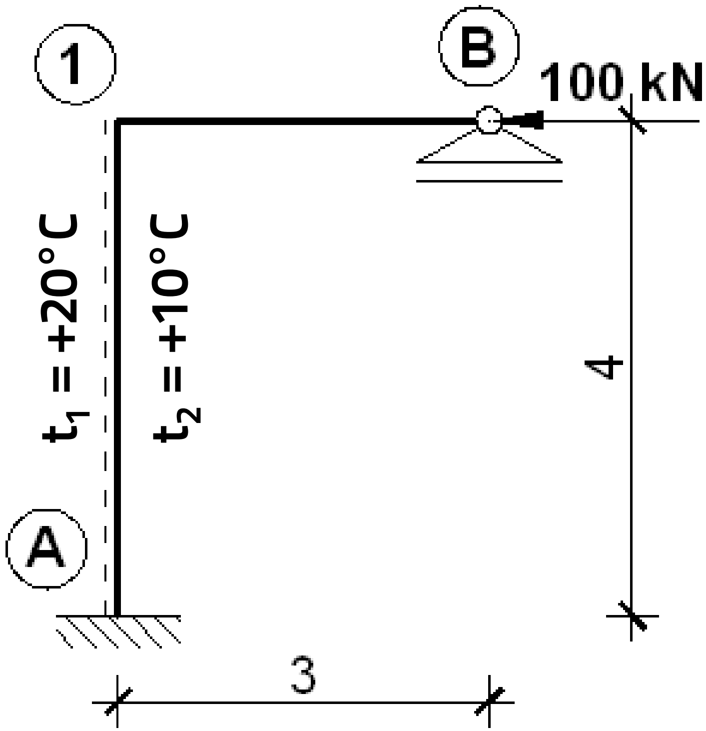
$$E = 3 \cdot 10^7 \;\; kN/m^2$$

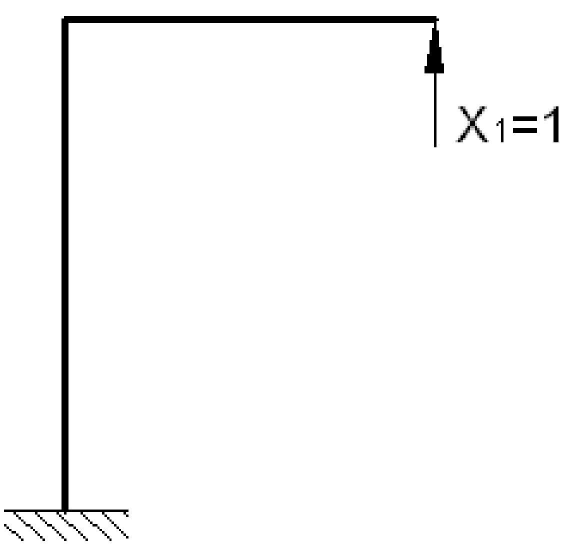
$$b/h = 30/40 cm$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 0.0016 \;\; m^4 \qquad EI = 48\,000 \;\; kNm^2$$

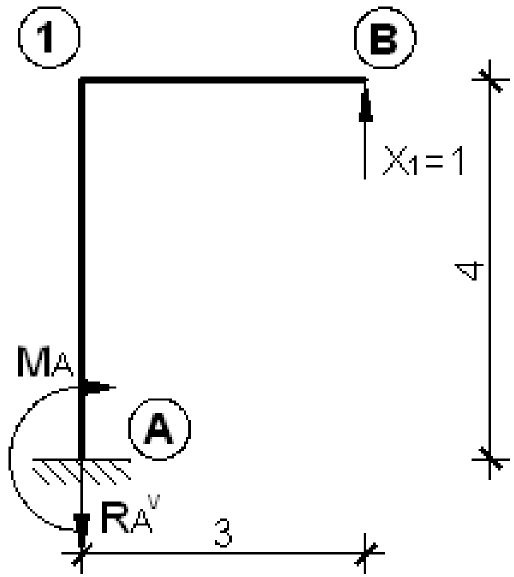
$$A = b \cdot h = 0.12 \;\; m^2 \qquad EA = 3\,600\,000 \;\; kN$$

3. Osnovni sustav



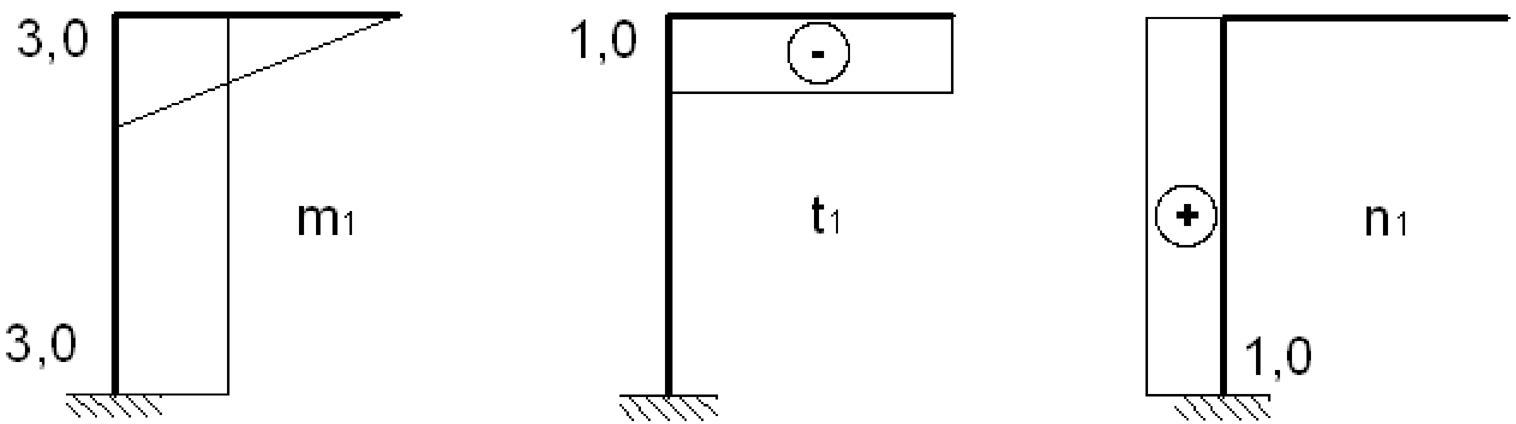


4. Stanje X_1 = 1 kN

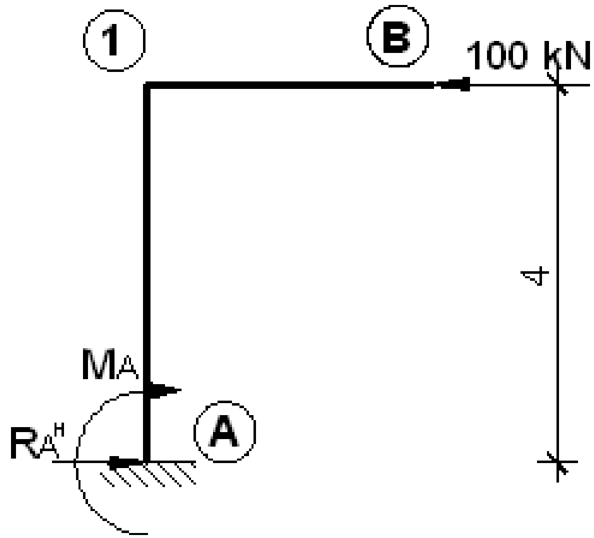


$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 3.0\ kNm$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 1.0\ kN$$



5. Stanje za stvarno vanjsko opterećenje

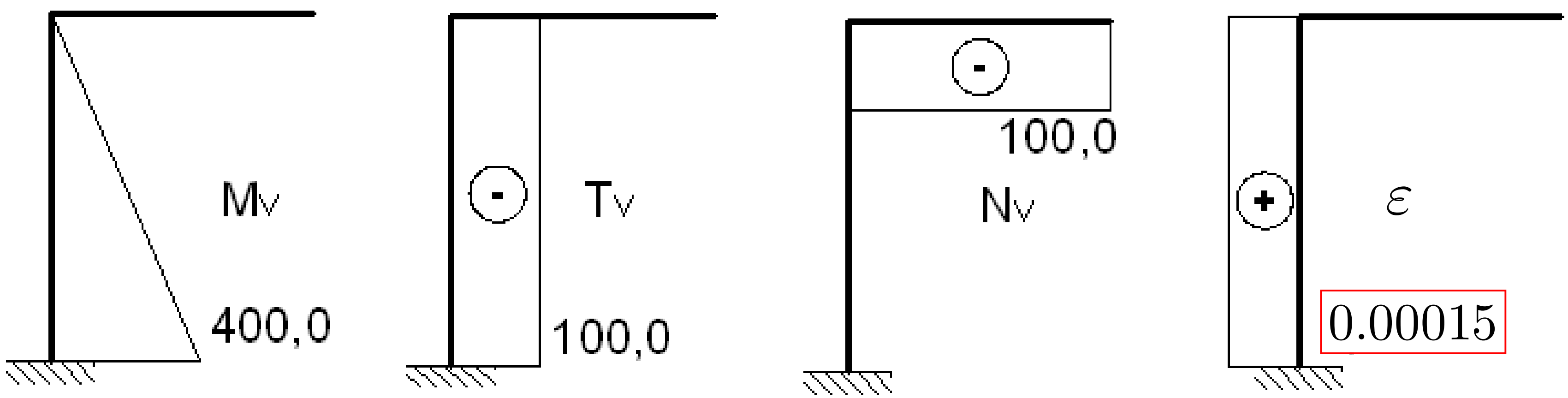


$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 400\ kNm$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_A^H = 100\ kN$$

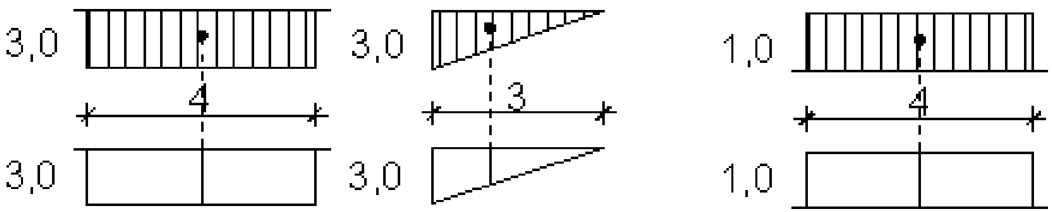
$$t_s = \frac{10+20}{2} = +15\,^{\circ}C$$

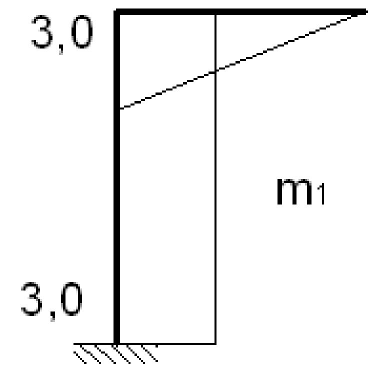
$$\boxed{\varepsilon = \alpha_t \cdot t_s = 0.00015}$$



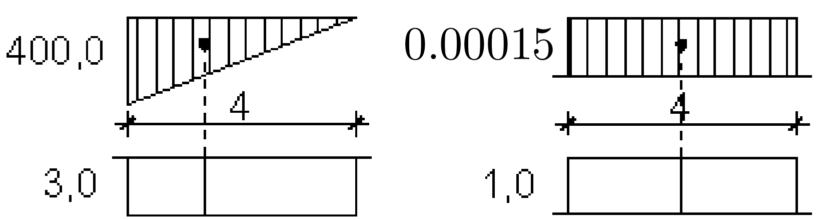
6. Koeficijenti fleksibilnosti

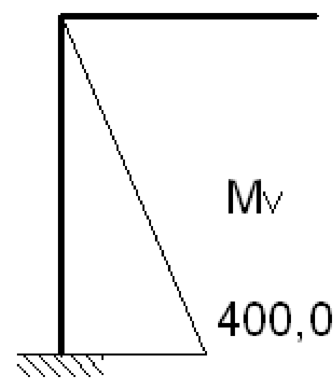
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[3 \cdot 4 \cdot (3) + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[1 \cdot 4 \cdot (1) \right] = 0.000\,939 \; m \uparrow$$





$$\delta_{1V} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{400 \cdot 4}{2} \cdot (3) \right] + \underbrace{\left[1 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 4 \cdot 1 \right]}_{\text{utjecaj jednolike temperature}} = 0.05 + 0.0006 = 0.0506 \; m \uparrow$$





7. Jednadžba kontinuiteta

$$\delta_{11} = 0.000\,939\ m = 0.94\ mm \uparrow \left(\Delta_B^V \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje}\right)$$

$$\delta_{1V} = 0.0506\ m = 50.60\ mm \uparrow \left(\Delta_B^V \text{ za } \underline{\text{stvarno}} \text{ opterećenje}\right)$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} = 0$$

$$0.000\,939 \cdot X_1 + 0.0506 = 0 \ \Rightarrow \ X_1 = -53.91\ kN \downarrow (R_B)$$

vrijednost reakcije u **osloncu B**

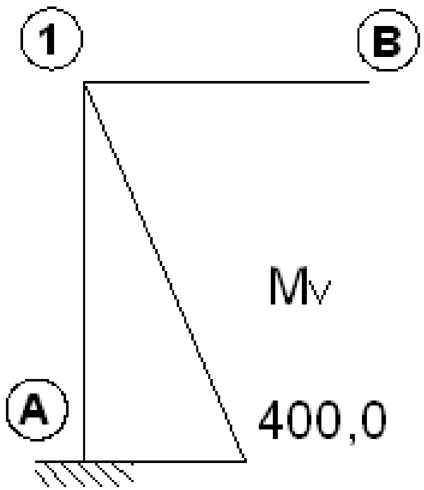
8. Konačni dijagrami unutarnjih sila (superpozicija)

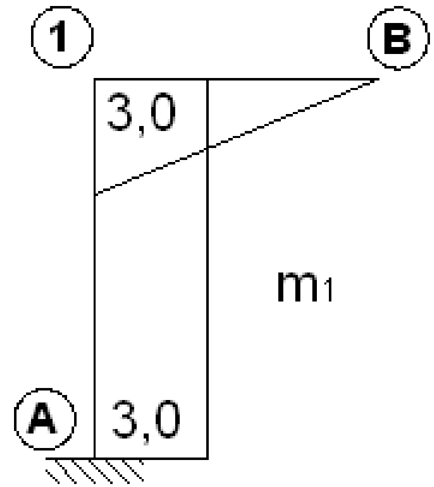
$$M_k = M_V + \sum m_i \cdot X_i$$

$$V_k = V_V + \sum v_i \cdot X_i$$

$$N_k = N_V + \sum n_i \cdot X_i$$

a) Vrijednosti momenata savijanja za $X_1 = -53.91$ kN



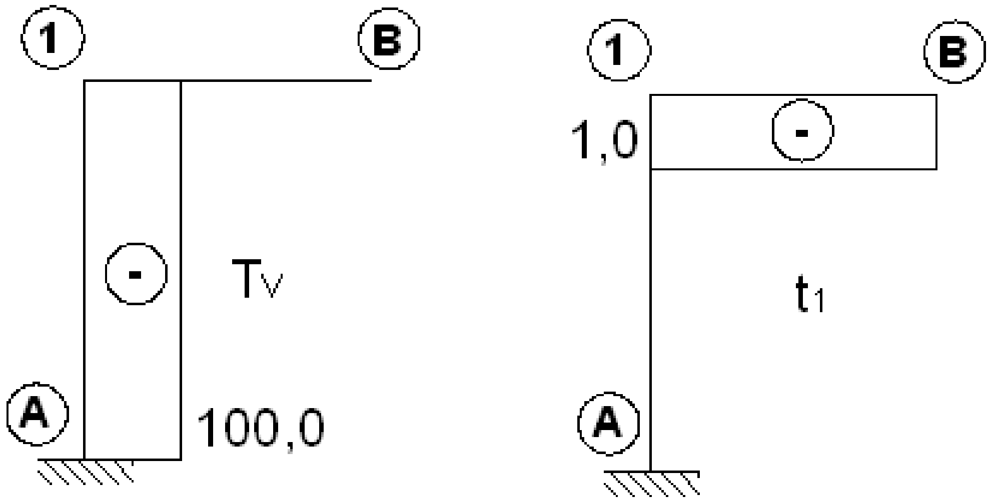


$$M_A = 400 + 3 \cdot (-53.91) = 238.27\ kNm$$

$$M_1 = 0 + 3 \cdot (-53.91) = -161.73\ kNm$$

$$M_B = 0\ kNm$$

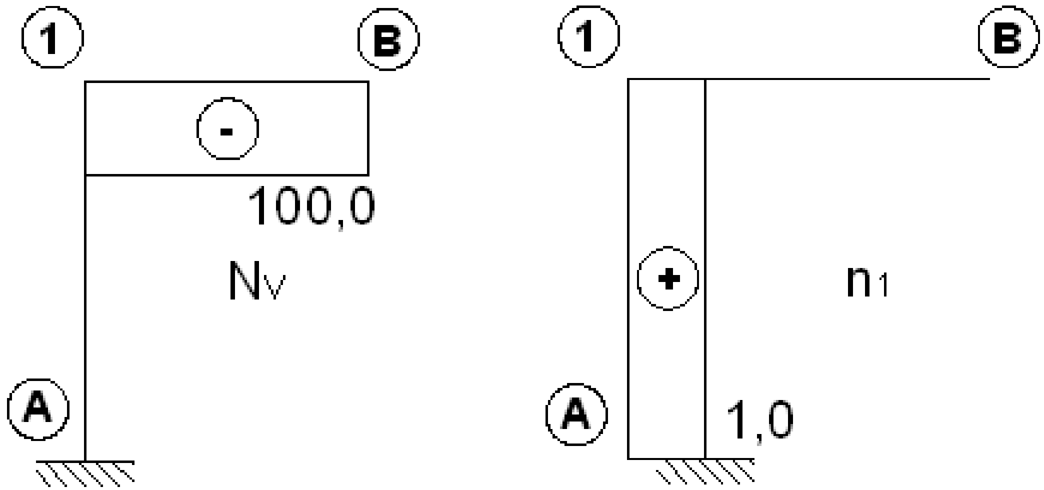
b) Vrijednosti poprečnih sila za $X_1 = -53.91$ kN



$$V_A = -100 + 0 \cdot (-53.91) = -100 \ kN = V_1^{DOLJE}$$

$$V_1^{DESNO} = 0 - 1.0 \cdot (-53.91) = 53.91 \ kN = V_B$$

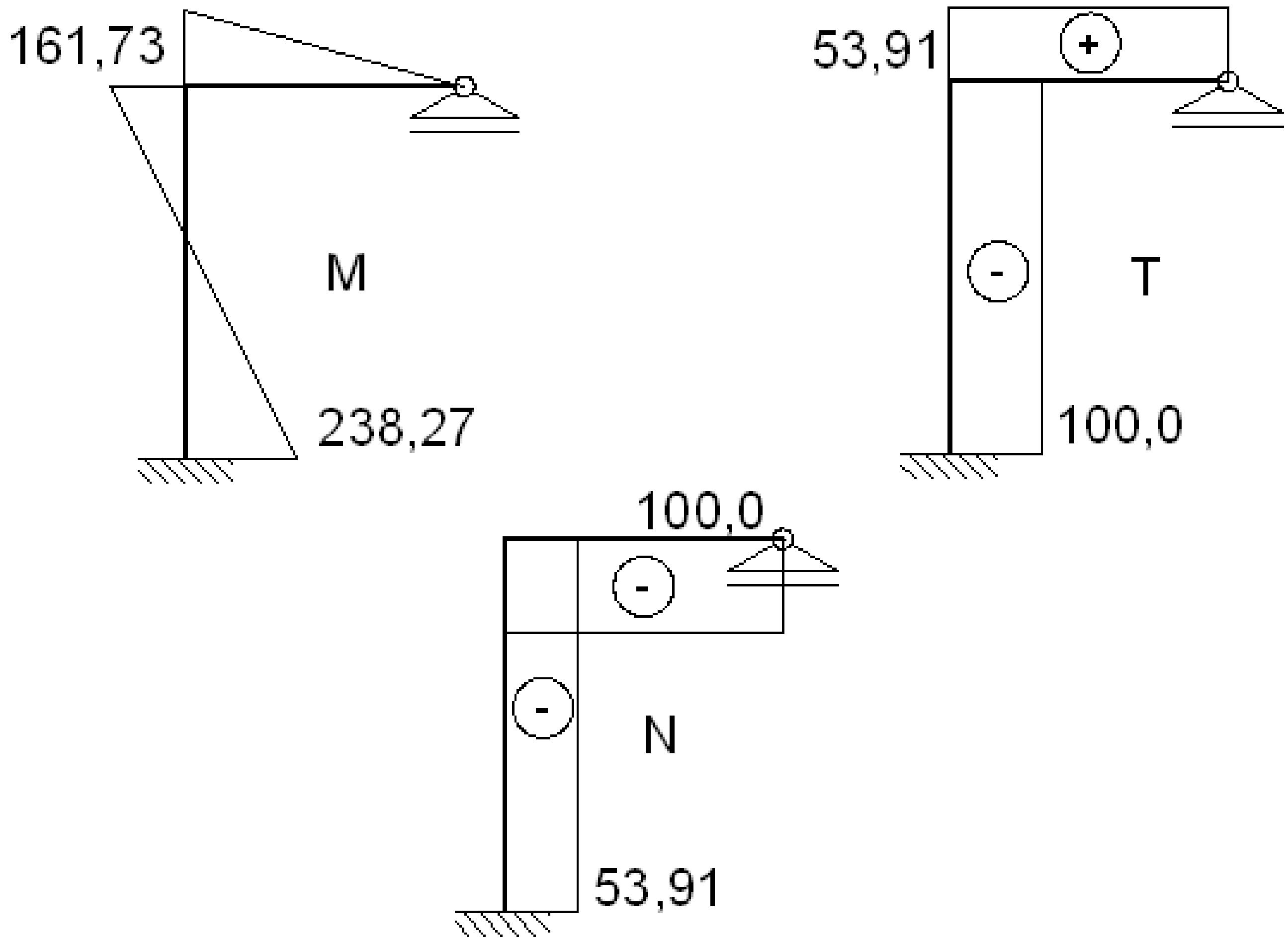
c) Vrijednosti uzdužnih sila za $X_1 = -53.91$ kN



$$N_A = 0 + 1 \cdot (-53.91) = -53.91 \ kN = N_1^{DOLJE}$$

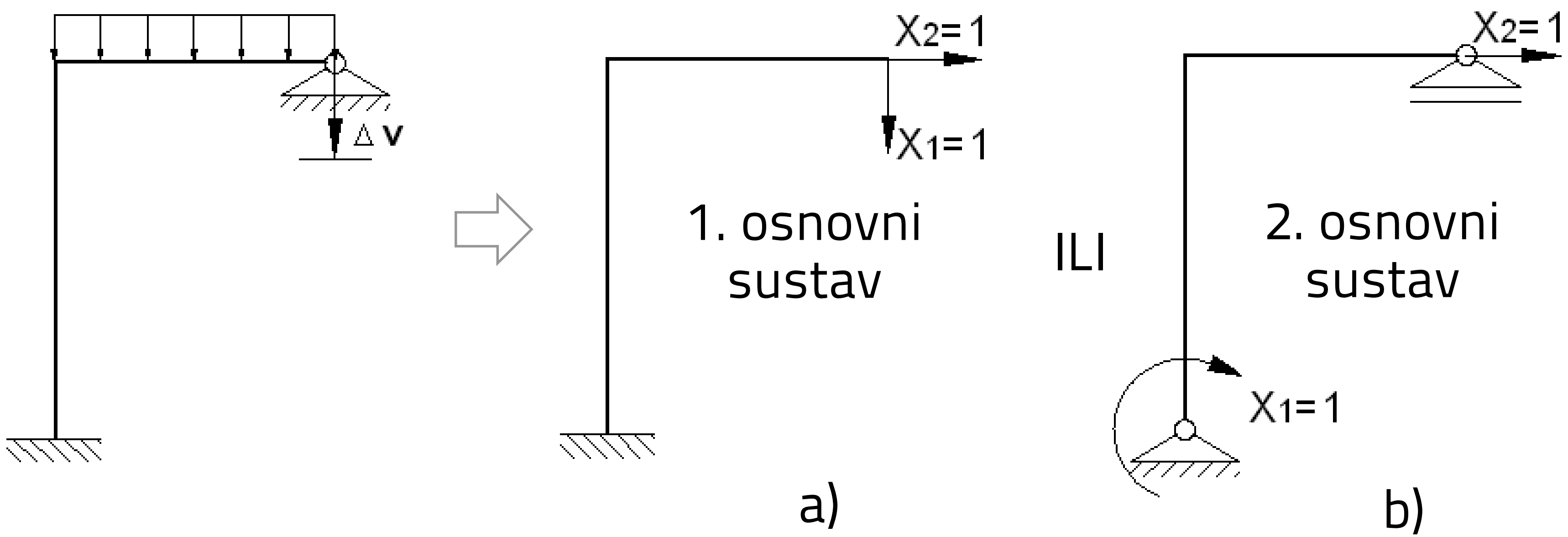
$$N_1^{DESNO} = -100.0 + 0 \cdot (-53.91) = -100 \ kN = N_B$$

8. Konačni dijagrami unutarnjih sila (superpozicija)



2. Utjecaji prisilnih pomaka (rotacije i translacije čvorova)

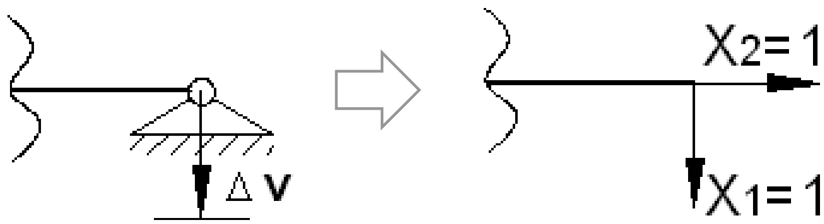
Problem ćemo promatrati na primjeru **dva puta statički neodređenog sustava** koji ima zadani prisilni pomak **Δv.**



a) Oslobođena veza X_1 **JE na mjestu i u pravcu prisilnog pomaka** i tada jednadžbe kontinuiteta (**diskontinuiteta**) glase:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1V} = \boxed{\Delta_V \text{ ili } \Delta_H \text{ ili } \Delta_\theta}$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2V} = 0$$

Ukoliko je $\mathbf{X_1}$ oslobođena veza onda je 1. jednadžba — **jednadžba <u>diskontinuiteta!</u>**



$$\ldots = +\Delta_V$$

Δv i X_1 imaju isti smjer

b) Oslobođena veza X_1 **NIJE na mjestu i u pravcu prisilnog pomaka** i tada jednadžbe **kontinuiteta (!)** glase:

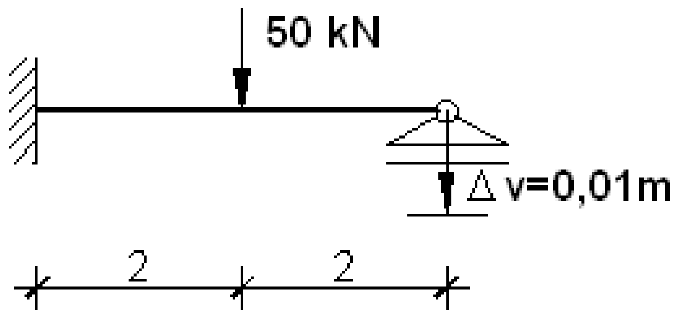
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1V} + \delta_{1V}(\Delta) = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2V} + \delta_{2V}(\Delta) = 0$$

pomak na mjestu i pravcu veze X_i uzrokovan pomakom Δ na **mehanizmu** (određuje se iz **plana pomaka**)

Zadatak #5

Za prikazani sustav odrediti **M dijagram** za jednostrano upetu gredu koja je opterećena **prisilnim pomakom Δ_V**.



b/h = 30/40 cm

$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2

1. Statička neodređenost

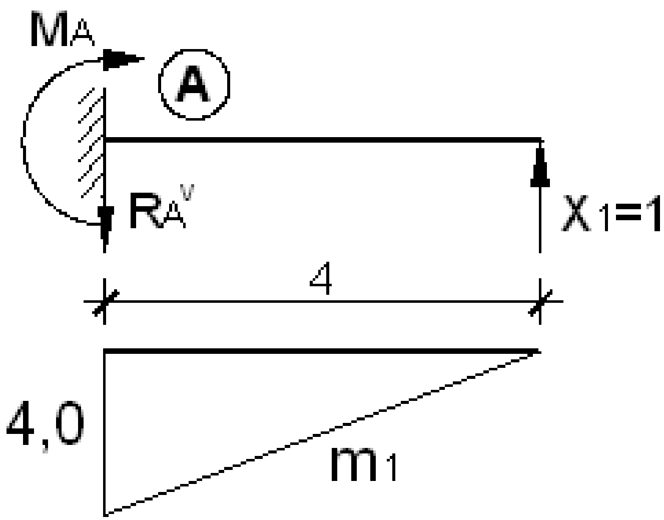
$$S = -1$$ Sustav je jedan put statički neodređen.

2. Geometrijske i materijalne karakteristike

$$EI = 48\,000\ kNm^2$$

3. a) Osnovni sustav se odabire tako da je oslobođena veza X_1 je na mjestu i u pravcu prisilnog pomaka!

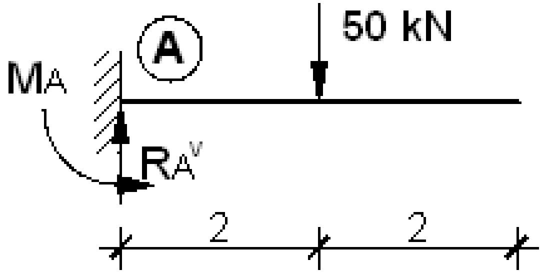
4. a) Stanje $X_1 = 1$



$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 4.0\ kNm$$

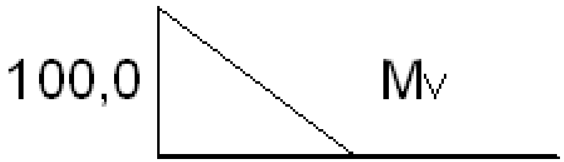
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 1.0\ kN$$

5. a) Stanje za vanjsko opterećenje

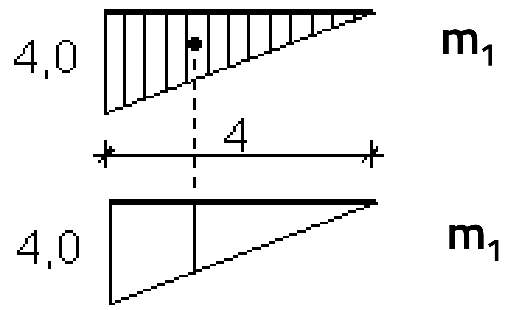


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 100\ kNm$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^V = 50\ kN$$



6. a) Koeficijenti fleksibilnosti

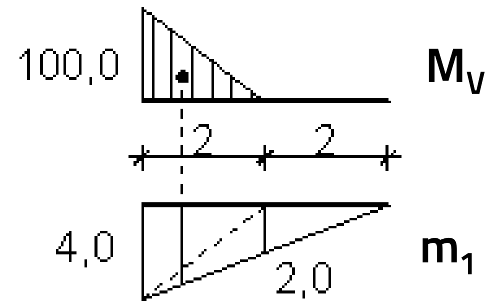


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = 0.000\,444\ m$$

$$\delta_{11} = 0.44\ mm \uparrow \left(\Delta_B^V \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje} \right)$$

$$\delta_{1V} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{100 \cdot 2}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = -0.006944 \;\; m$$

$$\delta_{1V} = -6.94 \;\; mm \downarrow \left(\Delta_B^V \text{ za } \underline{\text{stvarno}} \text{ opterećenje} \right)$$

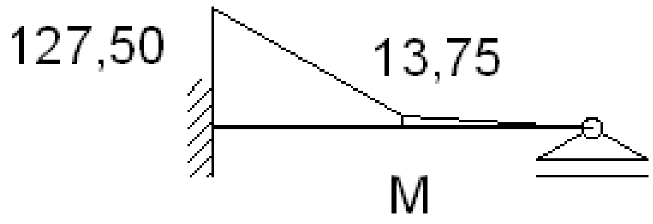


7. a) Jednadžba diskontinuiteta

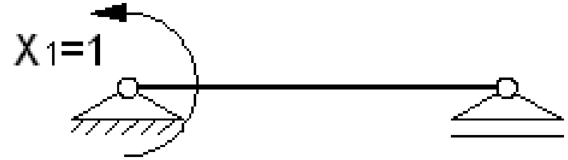
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} = -\Delta v$$

$$21.33 \cdot X_1 - 333.33 = -0.01 \Rightarrow X_1 = -6.875 \;\; kN \downarrow \left(R_B \right)$$

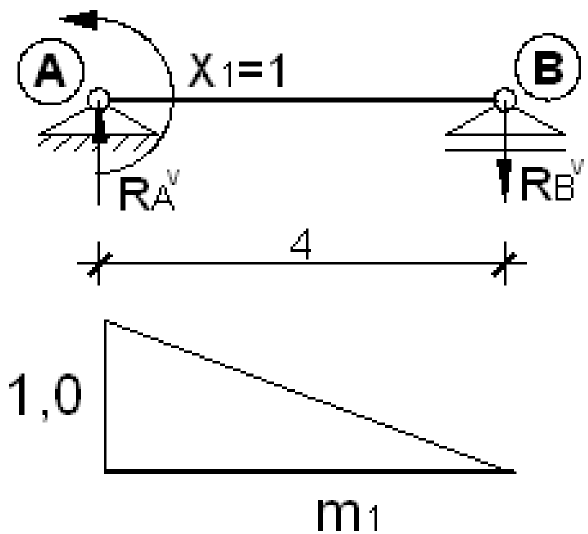
8. a) Konačni M dijagram



3. b) Osnovni sustav se odabire tako da je oslobođena veza X_1 NIJE na mjestu i u pravcu prisilnog pomaka!



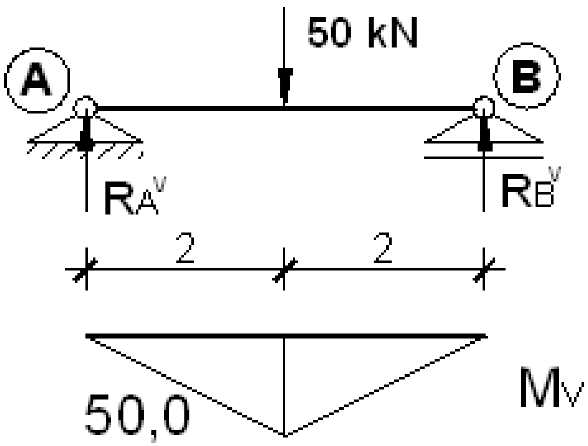
4. b) Stanje $X_1 = 1$



$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 0.25\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_B^V = 0.25\ kN$$

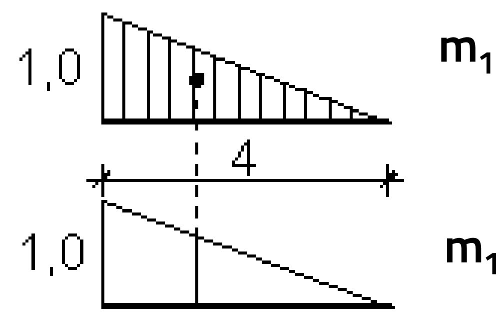
5. b) Stanje za vanjsko opterećenje



$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 25\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_B^V = 25\ kN$$

6. b) Koeficijenti fleksibilnosti

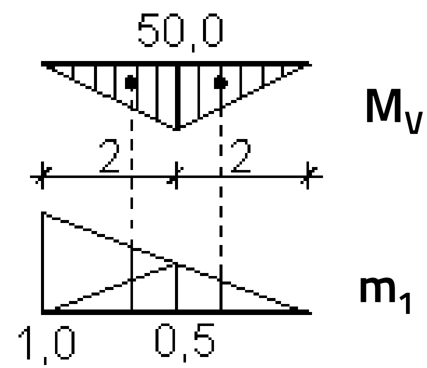


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = 0.000\,028\ rad$$

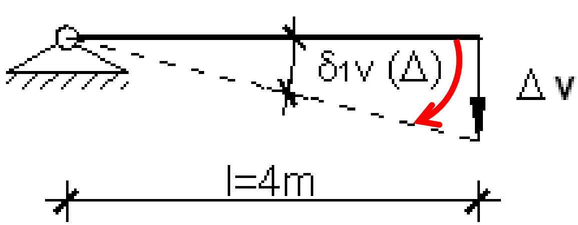
$$\delta_{11} = 0.000\,028\ rad \quad \left(\theta_A \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje} \right)$$

$$\delta_{1V} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{50 \cdot 2}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.5 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{50 \cdot 2}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.5 \right) \right] = -0.001042 \ rad$$

$$\delta_{1V} = -0.001042 \ rad \quad \left(\theta_A \text{ za } \underline{\text{stvarno}} \text{ opterećenje} \right)$$



$\delta_{1V}(\Delta)$ – određujemo pomoću **plana pomaka na mehanizmu** koji nastaje tako da na osnovnom sustavu na mjestu na kojem je zadani prisilni pomak **raskinemo vezu!**



$$\Delta_B^V = 10 \ mm \downarrow$$

$$\delta_{1V}(\Delta) = -\frac{\Delta_V}{l} = -\frac{0.01 \ m}{4 \ m} = -0.0025 \ rad$$

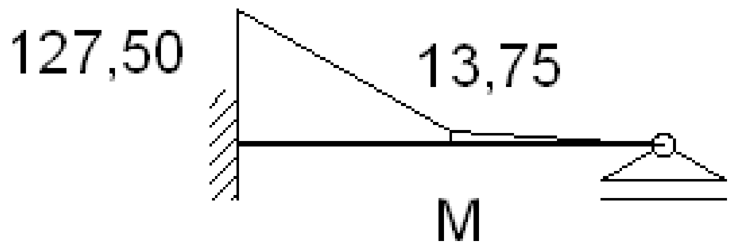
7. b) Jednadžba kontinuiteta

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1V} + \delta_{1V}(\Delta) = 0$$

$$0.000\,028 \cdot X_1 - 0.001\,042 - 0.0025 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = 127.50 \;kNm$$

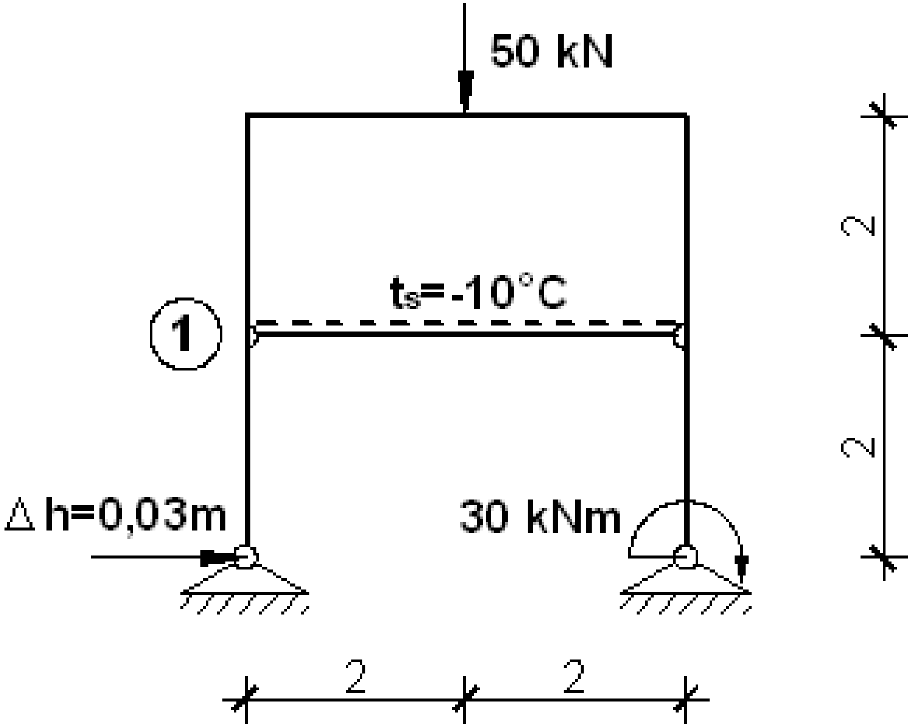
vrijednost momenta u **osloncu A**

8. b) Konačni dijagram (superpozicija)



Zadatak #6

Za prikazani sustav odrediti **M dijagram**. Pri proračunu koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir utjecaj **momenata savijanja i uzdužne sile u zatezi**.



Stup/greda: b/h = 30/30 cm

$E = 3\cdot10^7$ kN/m²

Zatega: b/h = 10/10 cm

$E_Z = 2.1\cdot10^8$ kN/m²

$\alpha_t = 1\cdot10^{-5} C^{-1}$

1. Statička neodređenost

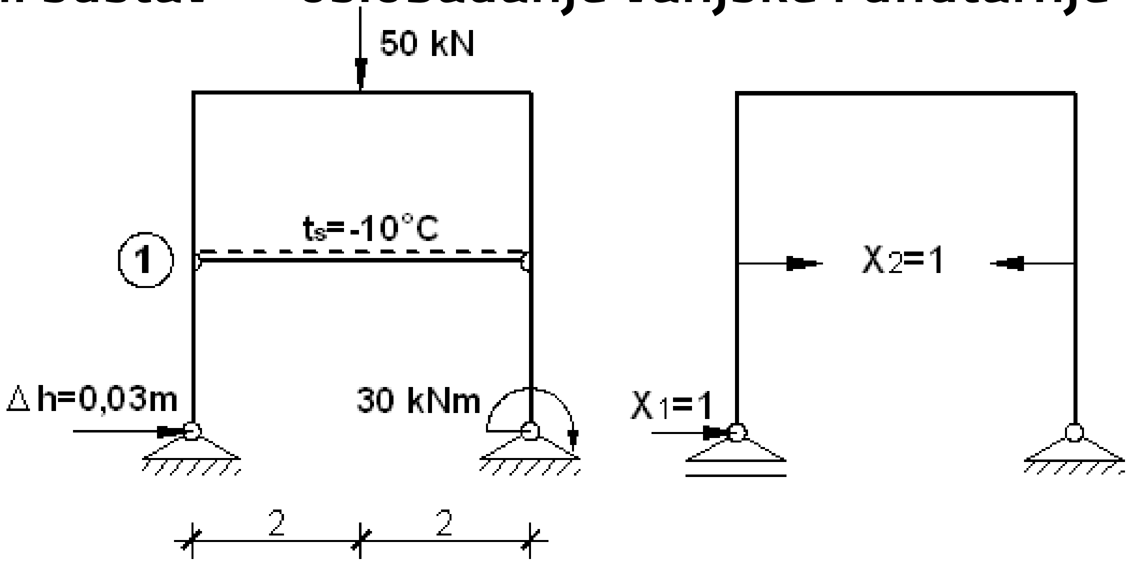
$S = -2$ Sustav je dva puta statički neodređen.

2. Geometrijske i materijalne karakteristike

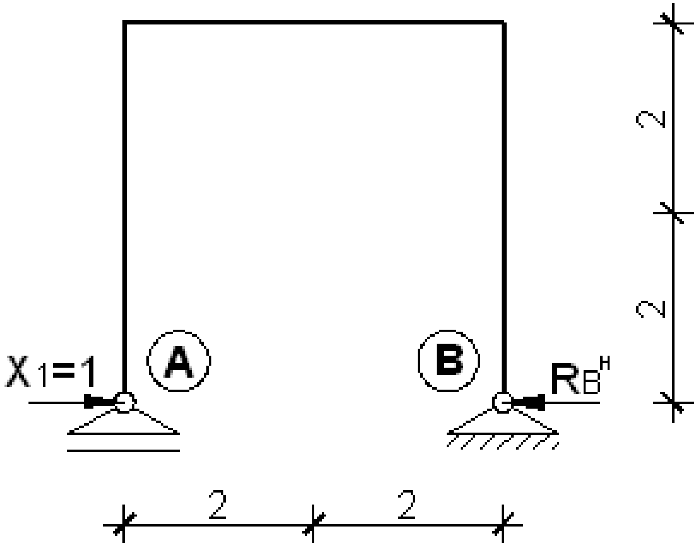
$$\text{Stup/Greda}: \quad EI = 20\,250 \ kNm^2$$

$$\text{Zatega}: \quad E_Z A = 2\,100\,000 \ kN$$

3. Osnovni sustav — oslobađanje vanjske i unutarnje veze

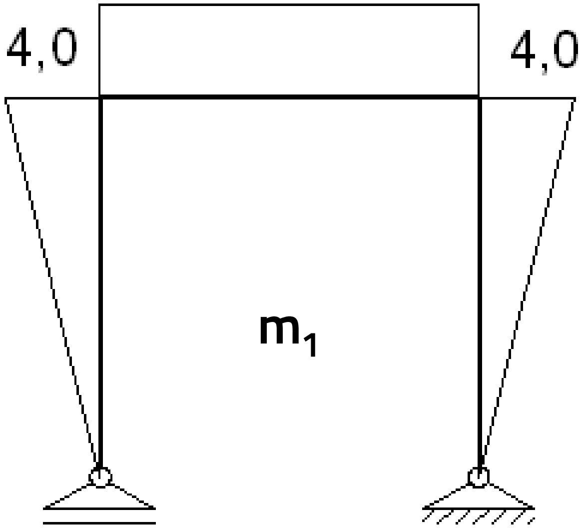


4. Stanje $X_1 = 1$ kN

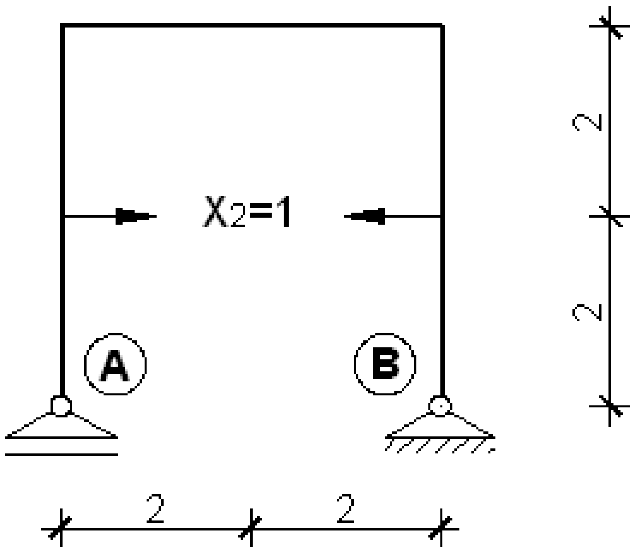


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B^V = 0 \ kN$$

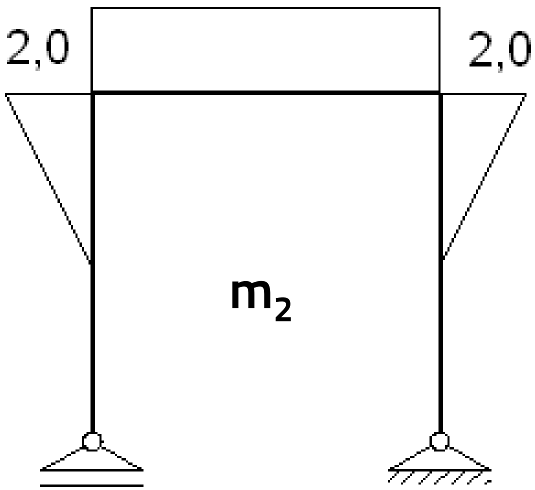
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_B^H = 1.0 \ kN$$

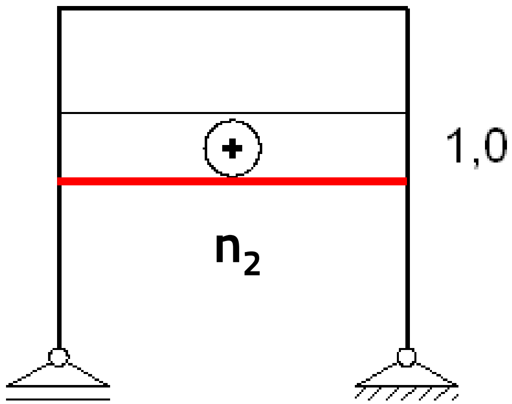


5. Stanje $X_2 = 1$ kN



Reakcije su **jednake nuli !**





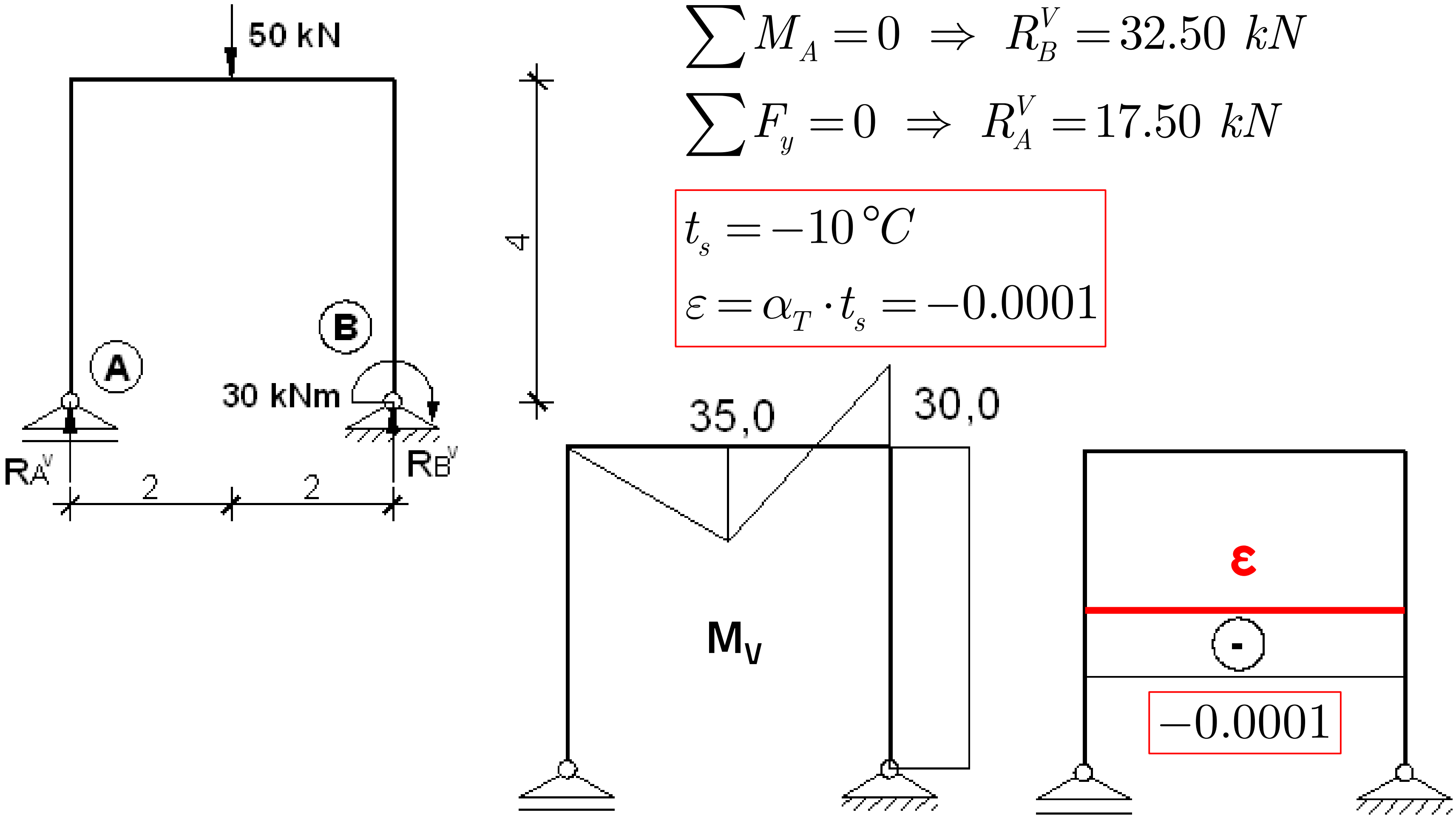
6. Stanje za stvarno vanjsko opterećenje

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; R_B^V = 32.50\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A^V = 17.50\ kN$$

$$t_s = -10\,^\circ C$$

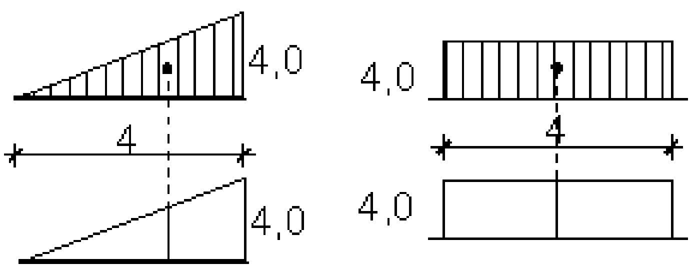
$$\varepsilon = \alpha_T \cdot t_s = -0.0001$$

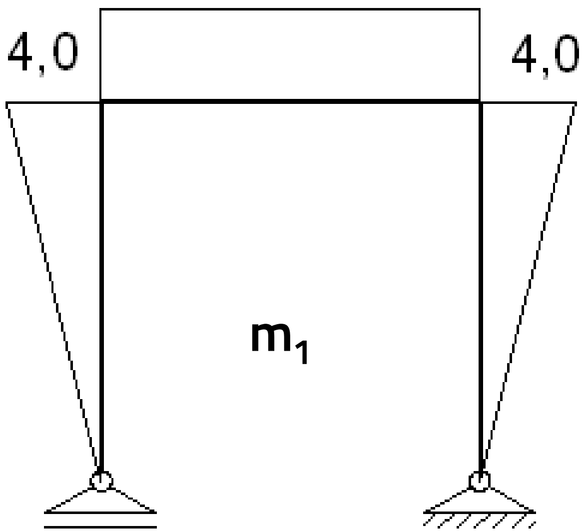


7. Koeficijenti fleksibilnosti

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \times \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot (4) \right] = 0.005\,267 \;\; m$$

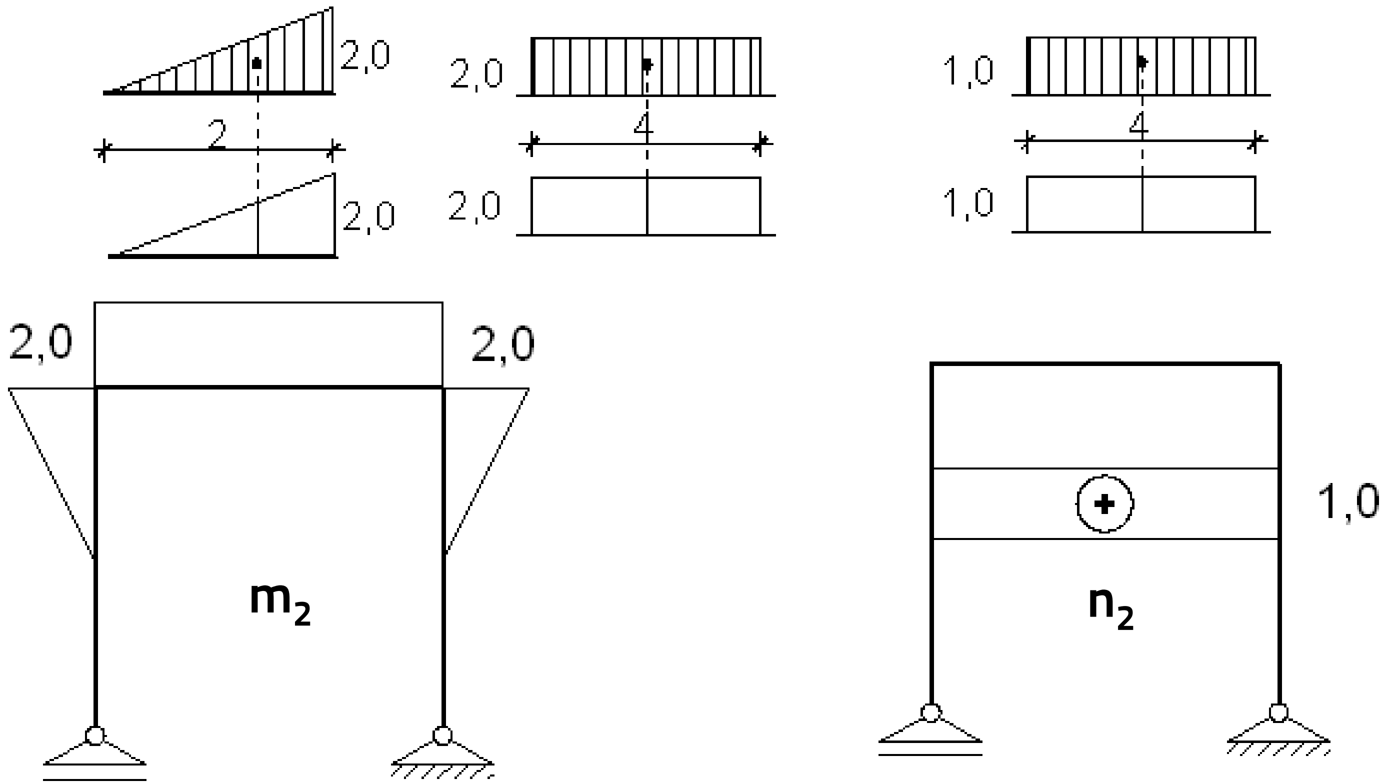
$$\delta_{11} = 5.27 \;\; mm \rightarrow \left(\Delta_A^H \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje } X_1 \right)$$





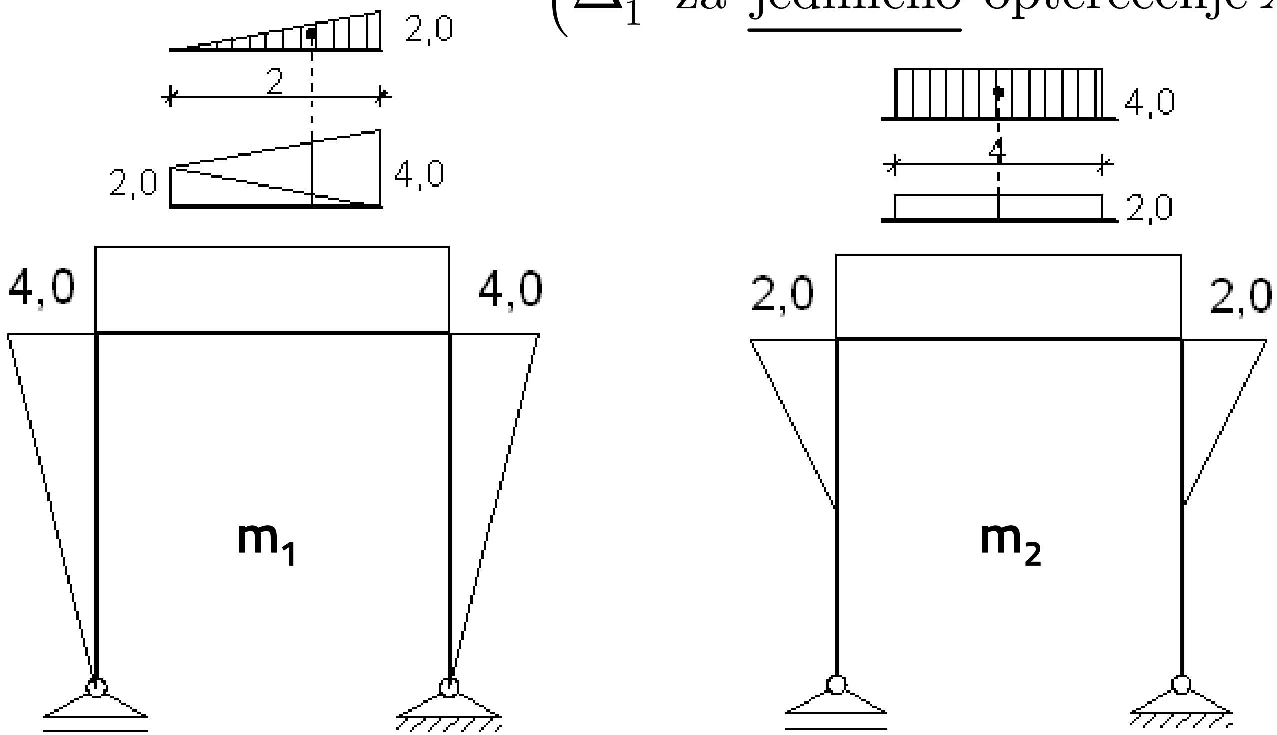
$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\times\left[\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right)\right]\cdot 2\cdot 4\cdot(2)\right]+\frac{1}{EA}\cdot\left[1\cdot 4\cdot(1)\right]=0.001055\ m$$

$$\delta_{22}=1.06\ mm \rightarrow \left(\Delta_1^H \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje } X_2\right)$$



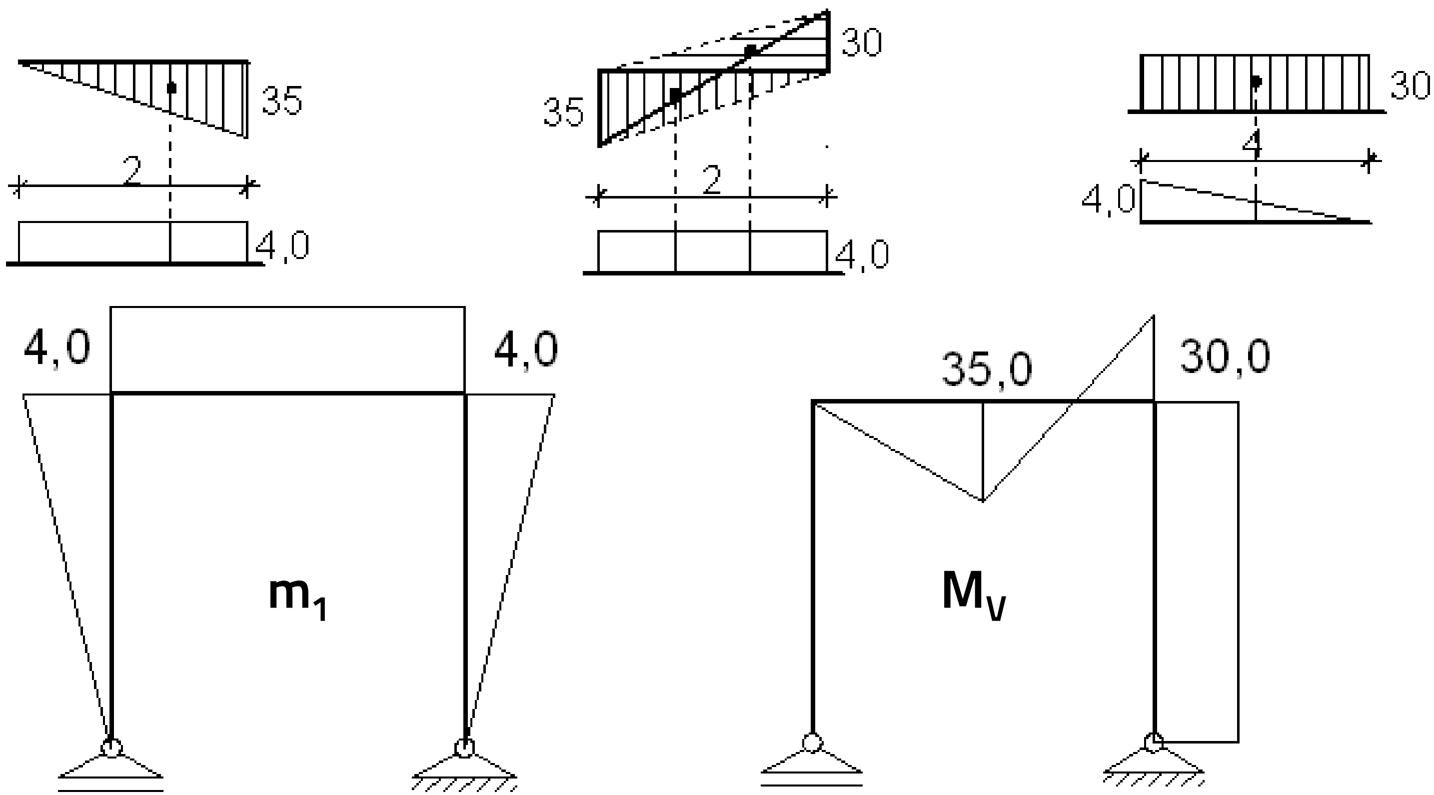
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot 2\times\left[\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 2\right)\cdot 4\cdot 4\cdot(2)\right]=0.002\,239\ m$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=2.24\ mm\rightarrow\begin{pmatrix}\Delta_A^H \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje } X_2\\ \Delta_1^H \text{ za } \underline{\text{jedinično}} \text{ opterećenje } X_1\end{pmatrix}$$



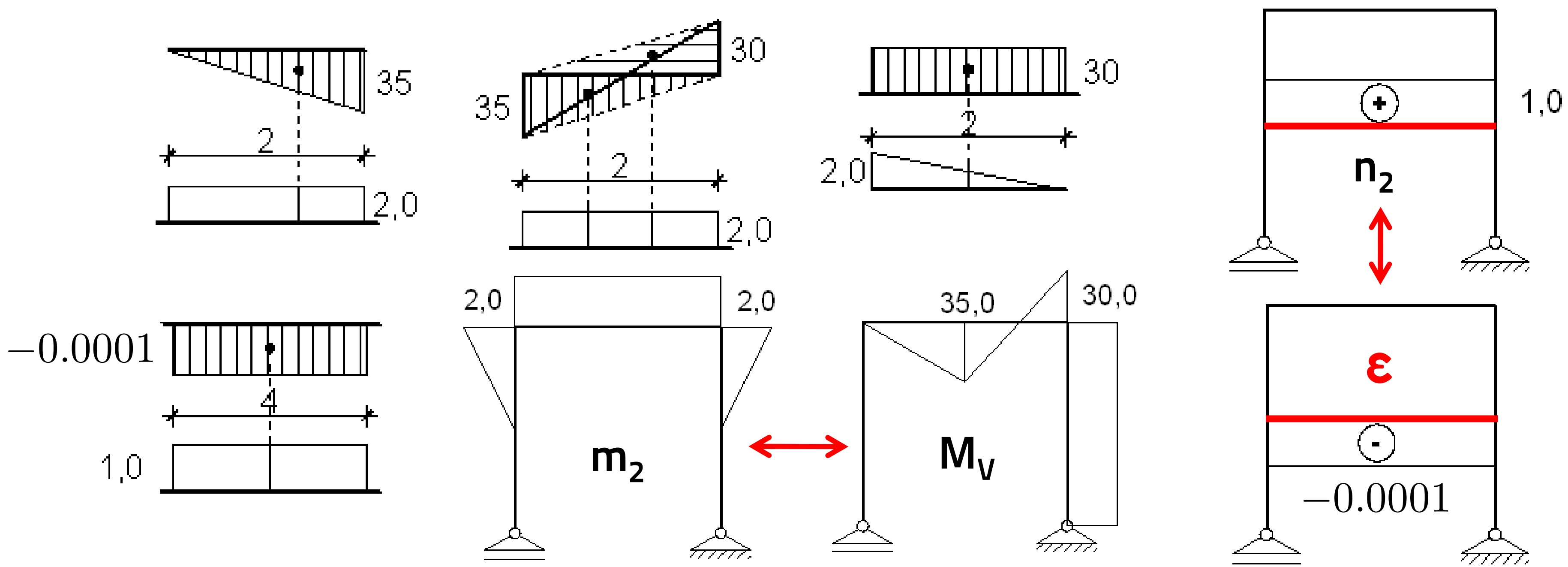
$$\delta_{1V} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{35 \cdot 2}{2} \cdot (-4) \cdot \frac{35 \cdot 2}{2} \cdot (-4) \cdot \frac{30 \cdot 2}{2} \cdot (4) \cdot 30 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] = 0.003951 \ m$$

$$\delta_{1V} = 3.95 \ mm \rightarrow \left(\Delta_A^H \text{ za } \underline{\text{stvarno}} \text{ opterećenje} \right)$$



$$\delta_{2V}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{35\cdot 2}{2}\cdot(-2)\cdot\frac{35\cdot 2}{2}\cdot(-2)\cdot\frac{30\cdot 2}{2}\cdot(2)\cdot 30\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\right]+$$
$$+0.0001\cdot 4\cdot(-1)=0.001388\ m$$

$$\delta_{2V}=1.39\ mm\rightarrow\left(\Delta_1^H \text{ za } \underline{\text{stvarno}} \text{ opterećenje}\right)$$



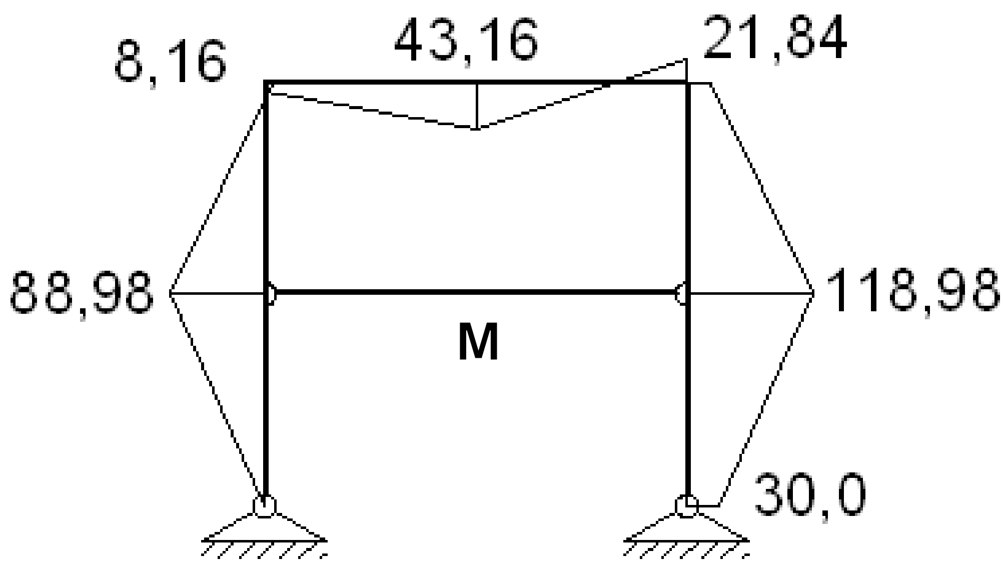
8. Jednadžbe kontinuiteta i diskontinuiteta

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1V} = \boxed{+\Delta h} \qquad X_1 = +44.49\ kN \ \rightarrow \left(R_A^H\right)$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2V} = 0 \qquad X_2 = -93.06\ kN \ \left(\text{Tlak u zatezi}\right)$$

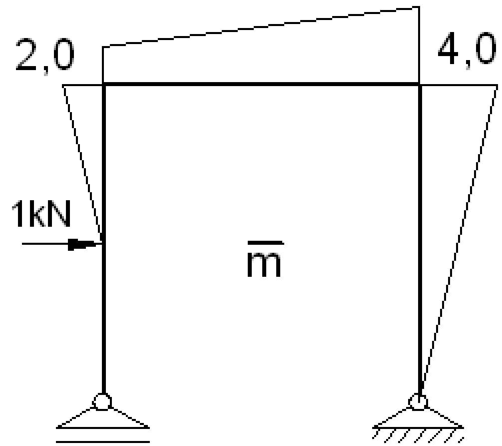
9. Konačni momentni dijagram (superpozicija)

$$M_k = M_V + \sum m_i \cdot X_i$$



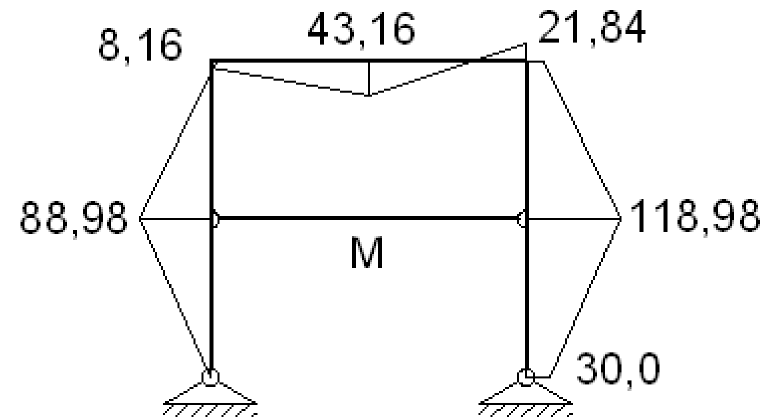
10. Horizontalni pomak točke 1 na statički neodređenom sustavu (redukcijski stavak)!

δ_{1H} =



M dijagram na **statički određenom sustavu** od **jedinične** (horizontalne) sile!

+



M dijagram na **statički neodređenom** sustavu!

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

10. Horizontalni pomak točke 1 na statički neodređenom sustavu (redukcijski stavak)!

$$\delta_{1H}=\boxed{\frac{1}{EI}}\cdot\left[\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 88.98-\frac{2}{3}\cdot 8.16\right)-\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 8.16+\frac{1}{3}\cdot 43.16\right)+\right.$$

$$-\frac{3\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 43.16+\frac{1}{3}\cdot 8.16\right)+\frac{3\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 21.84-\frac{2}{3}\cdot 43.16\right)+$$

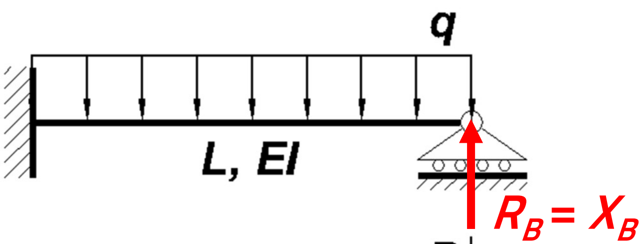
$$+\frac{4\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 21.84-\frac{1}{3}\cdot 43.16\right)+\frac{4\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 21.84+\frac{1}{3}\cdot 118.98\right)+$$

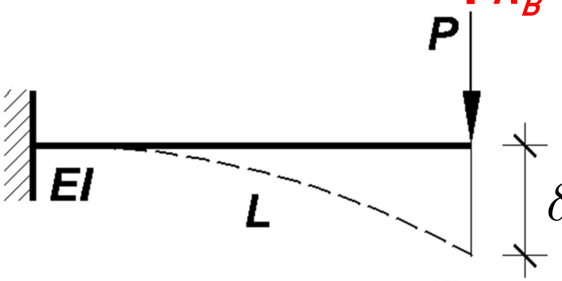
$$+\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 118.98+\frac{1}{3}\cdot 21.84\right)+\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 118.98+\frac{1}{3}\cdot 30\right)$$

$$=\frac{419.24}{EI}=0.020703\ m=20.70\ mm\rightarrow\Delta_1^H$$

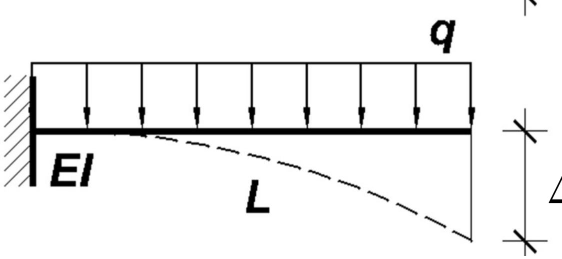
Utjecaji elastičnih oslonaca

Podsjetimo se primjera jednostrane upete grede s poznatim iznosima progiba za **osnovni sustav konzolnog nosača**.





$$\delta_{BB} = \frac{PL^3}{3EI}$$



$$\Delta_{BV} = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\Delta_{BV} = X_B \cdot \delta_{BB}$$

$$[\mathrm{m}] = [\mathrm{kN}] \cdot \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kN}}\right]$$

Pomak za jediničnu silu

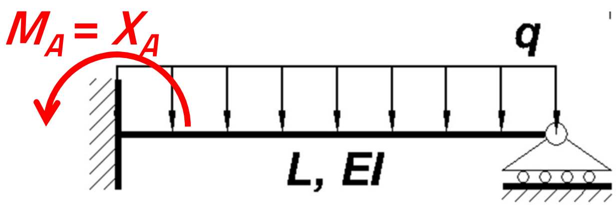
$$\Delta_{BV} + X_B \cdot \delta_{BB} = \underbrace{0}_{\text{uvjet } \Delta_B^V = 0}$$

$$X_B = -\frac{\Delta_{BV}}{\delta_{BB}} = -\frac{-\dfrac{qL^4}{8EI}}{\dfrac{1 \cdot L^3}{3EI}} = +\frac{3qL}{8}\ [\mathrm{kN}]$$

R_B

Utjecaji elastičnih oslonaca

Podsjetimo se primjera jednostrane upete grede s poznatim iznosima rotacija za **osnovni sustav <u>slobodno oslonjenog nosača</u>**.



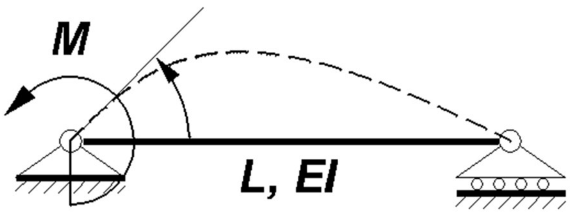
$$\theta_{AV} = X_A \cdot \theta_{AA}$$

$$[\mathrm{rad}] = [\mathrm{kNm}] \cdot \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{kNm}} \right]$$

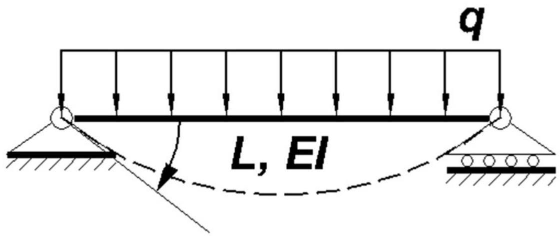
Rotacija za jedinični moment

$$\theta_{AV} + X_A \cdot \theta_{AA} = \underbrace{0}_{\text{uvjet } \theta_A = 0}$$

$$\theta_{AA} = \frac{ML}{3EI}$$

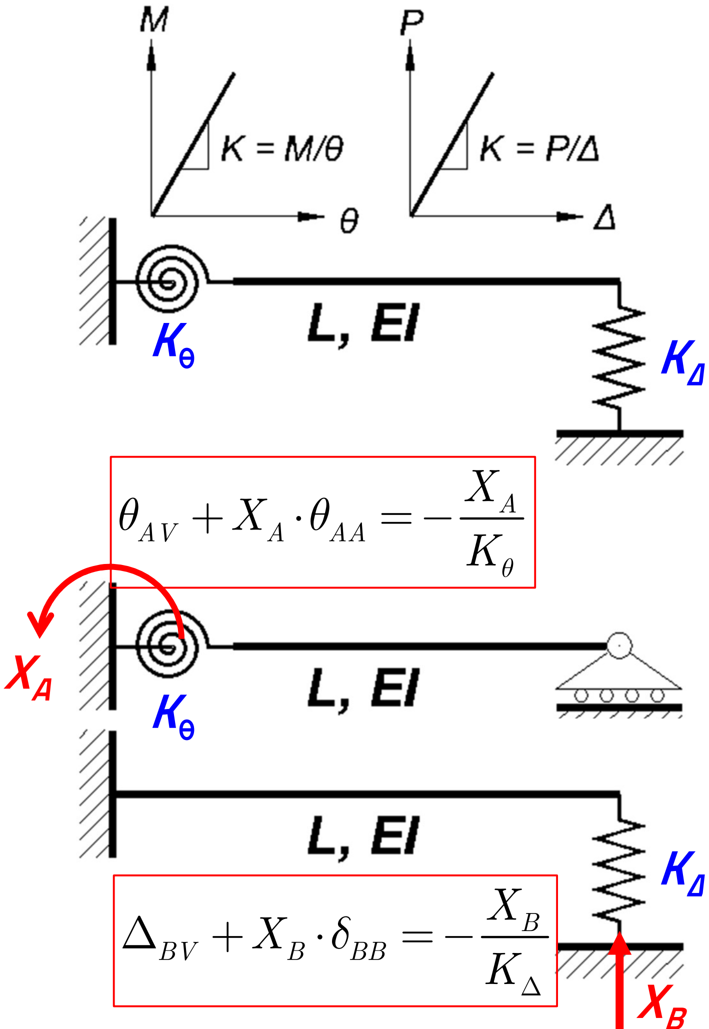


$$\theta_{AV} = \frac{qL^3}{24EI}$$



$$X_A = -\frac{\theta_{AV}}{\theta_{AA}} = -\frac{-\dfrac{qL^3}{24EI}}{\dfrac{1 \cdot L}{3EI}} = +\frac{qL^2}{8} \, [\mathrm{kNm}]$$

Utjecaji elastičnih oslonaca



$$\theta_{AV} + X_A \cdot \theta_{AA} = -\frac{X_A}{K_\theta}$$

$$\Delta_{BV} + X_B \cdot \delta_{BB} = -\frac{X_B}{K_\Delta}$$

U realnosti oslonci nisu apsolutno (beskonačno) kruti odnosno nepopustljivi, već imaju **konačnu krutost *K***.

S konačnom krutosti oslonaca reakcije se umanjuju jer **translacijski pomaci više nisu jednaki nula, Δ≠0**, odnosno za upete oslonce **rotacije više nisu jednake nuli, *θ*≠0**.

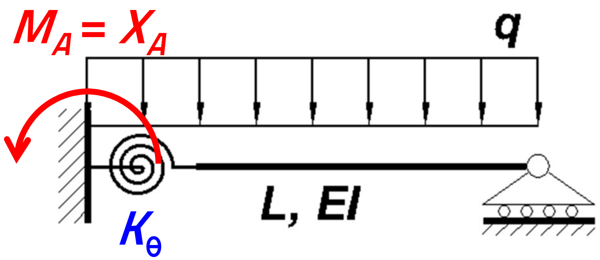
$$P = K_\Delta \cdot \Delta \;\therefore\; K_\Delta = \frac{P}{\Delta} \;\therefore\; \Delta = \frac{P}{K_\Delta}$$

$$M = K_\theta \cdot \theta \;\therefore\; K_\theta = \frac{M}{\theta} \;\therefore\; \theta = \frac{M}{K_\theta}$$

$$K_\theta \left[\frac{\mathrm{kNm}}{\mathrm{rad}}\right] \;\&\; K_\Delta \left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\right]$$

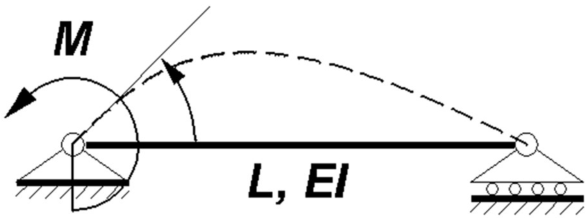
Zadatak #7

Izračunajte moment $\boldsymbol{M_A}$ i rotaciju $\boldsymbol{\theta_A}$ za primjer jednostrano upete grede s poznatim iznosima rotacija za **osnovni sustav slobodno oslonjenog nosača i rotacijskom oprugom krutosti K_θ.**

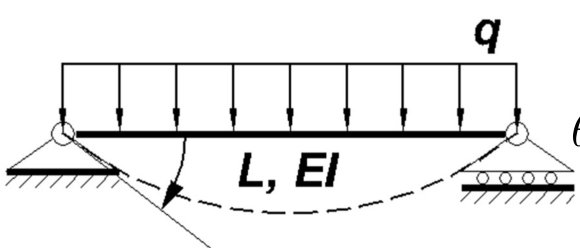


$q = 10$ kN/m[1]
$L = 4$ m
$EI = 48000$ kNm²
$K_\theta = 40000$ kNm/rad

$$\boxed{\theta = \frac{M}{K_\theta}}$$



$$\theta_{AA} = \frac{ML}{3EI}$$



$$\theta_{AV} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\theta_{AV} + X_A \cdot \theta_{AA} = \overbrace{-\frac{X_A}{K_\theta}}^{\text{uvjet } \theta_A = \frac{M}{K_\theta}}$$

$$-\frac{qL^3}{24EI} + X_A \cdot \frac{1 \cdot L}{3EI} = -\frac{X_A}{40000}$$

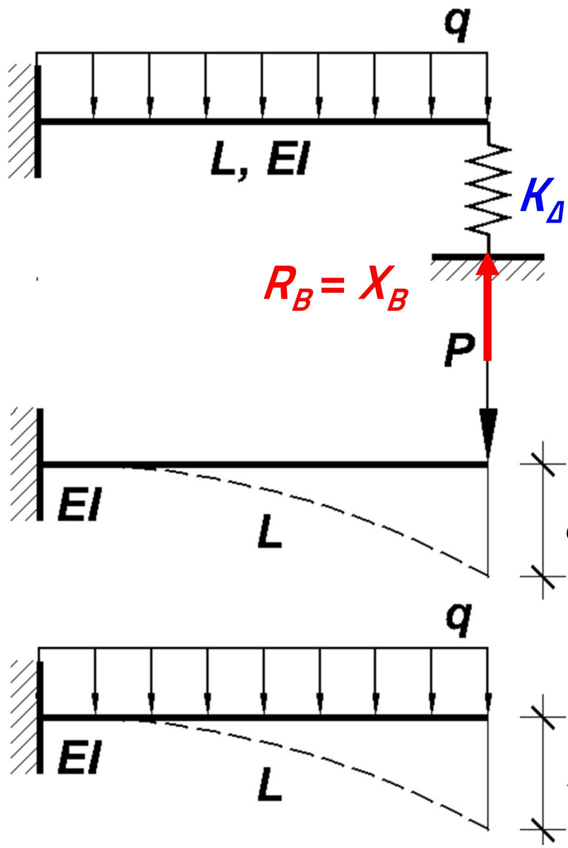
$$\boxed{X_A = +10.53 \text{ kNm}}$$

M_A

$$\boxed{\theta_A = \frac{X_A}{K_\theta} = 0.000263 \text{ rad}}$$

Zadatak #8

Izračunajte reakciju R_B i pomak Δ_B za primjer jednostrano upete grede s poznatim iznosima progiba za **osnovni sustav konzolnog nosača i translacijskom oprugom krutosti K_Δ.**



$q = 10$ kN/m¹
$L = 4$ m
$EI = 48000$ kNm²
$K_\Delta = 2000$ kN/m

$$\boxed{\Delta = \frac{P}{K_\Delta}}$$

$$\delta_{BB} = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\Delta_{BV} = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\Delta_{BV} + X_B \cdot \delta_{BB} = \overbrace{-\frac{X_B}{K_\Delta}}^{\text{uvjet } \Delta_B^V = \frac{P}{K_\Delta}}$$

$$-\frac{qL^4}{8EI} + X_B \cdot \frac{1 \cdot L^3}{3EI} = -\frac{X_B}{2000}$$

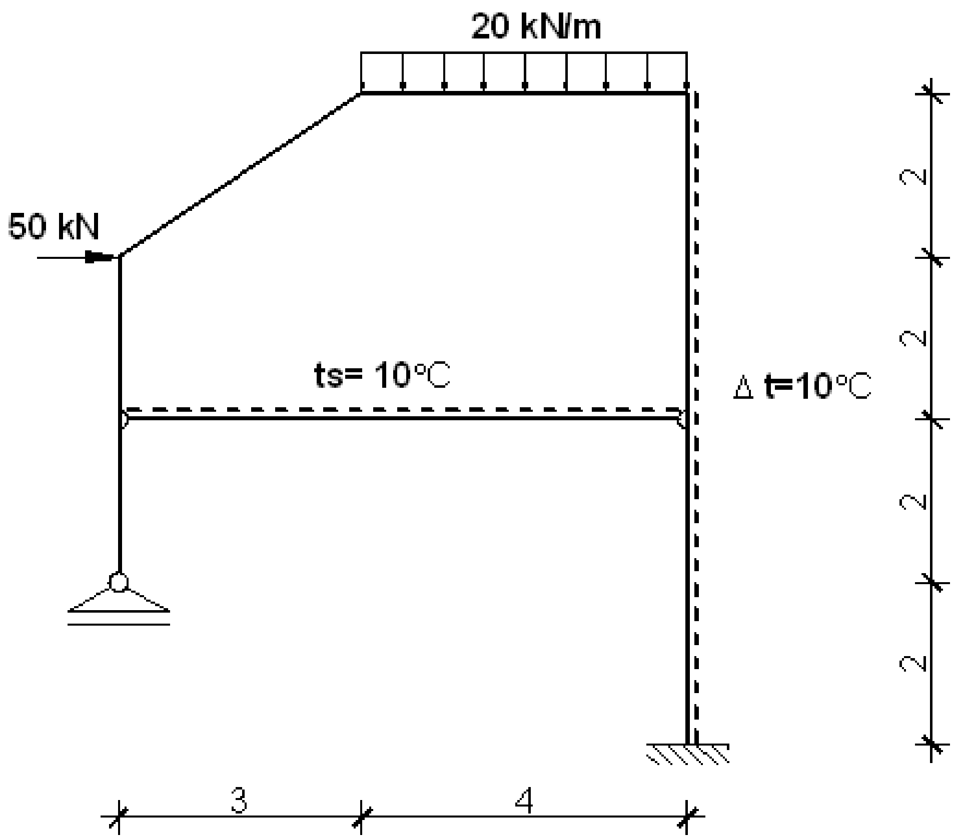
$$\boxed{X_B = +7.06 \text{ kN}}$$

R_B

$$\boxed{\Delta_B^V = \frac{X_B}{K_\Delta} = 3.53 \text{ mm}}$$

Zadaci za vježbu

Za prikazani sustav odrediti **dijagram momenata savijanja**. Za proračun koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir **utjecaj momenata savijanja i uzdužne sile u zatezi.**



Stup: $b/h = 30/30$ cm

Greda: $b/h = 30/40$ cm

$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2

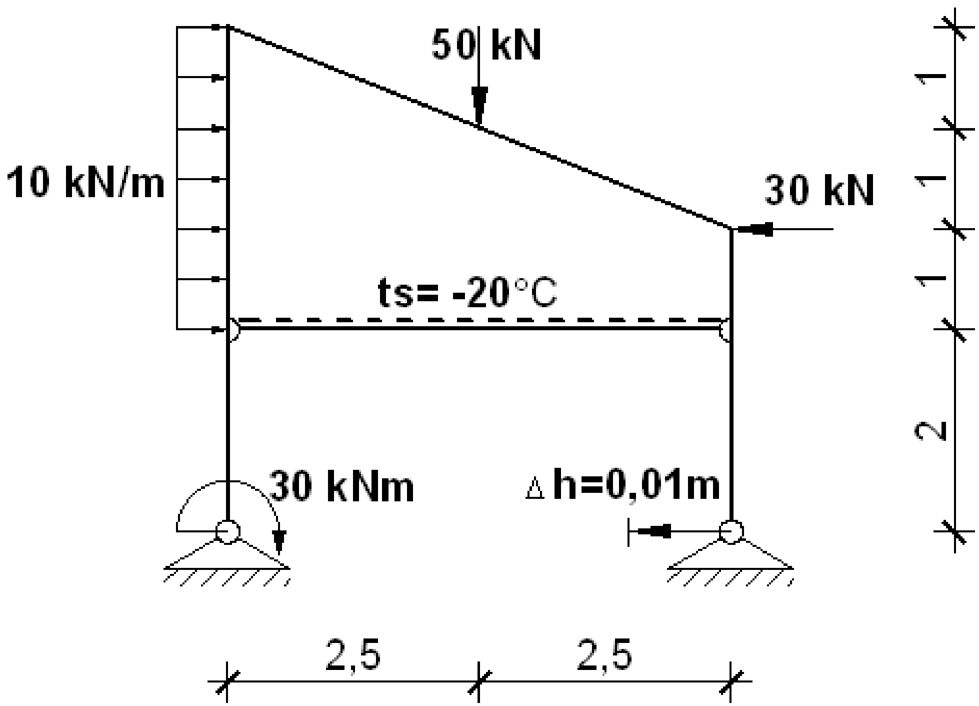
Zatega: $b/h = 10/10$ cm

$E_Z = 2.1 \cdot 10^8$ kN/m^2

$\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5}$ C^{-1}

Zadaci za vježbu

Za prikazani sustav odrediti **dijagram momenata savijanja**. Za proračun koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir **utjecaj momenata savijanja i uzdužne sile u zatezi.**



Stup: b/h = 30/30 cm

Greda: b/h = 30/40 cm

$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m²

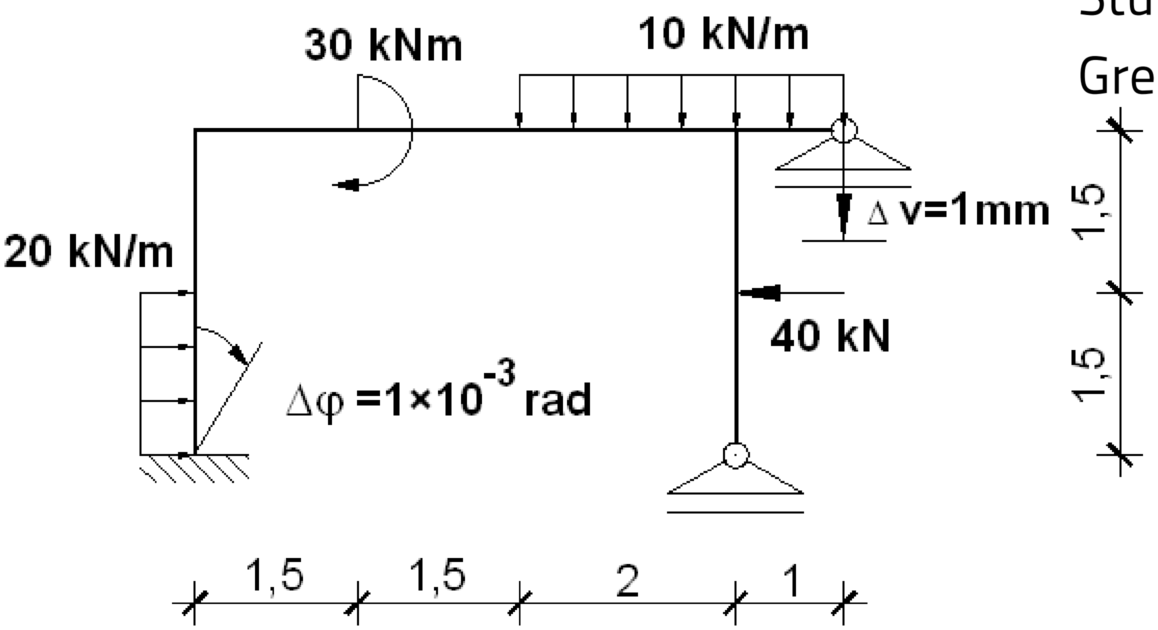
Zatega: b/h = 10/10 cm

$E_Z = 2.1 \cdot 10^8$ kN/m²

$\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5}$ C^{-1}

Zadaci za vježbu

Za prikazani sustav odrediti **dijagram momenata savijanja**. Za proračun koeficijenata fleksibilnosti uzeti u obzir **utjecaj momenata savijanja i uzdužne sile u zatezi.**

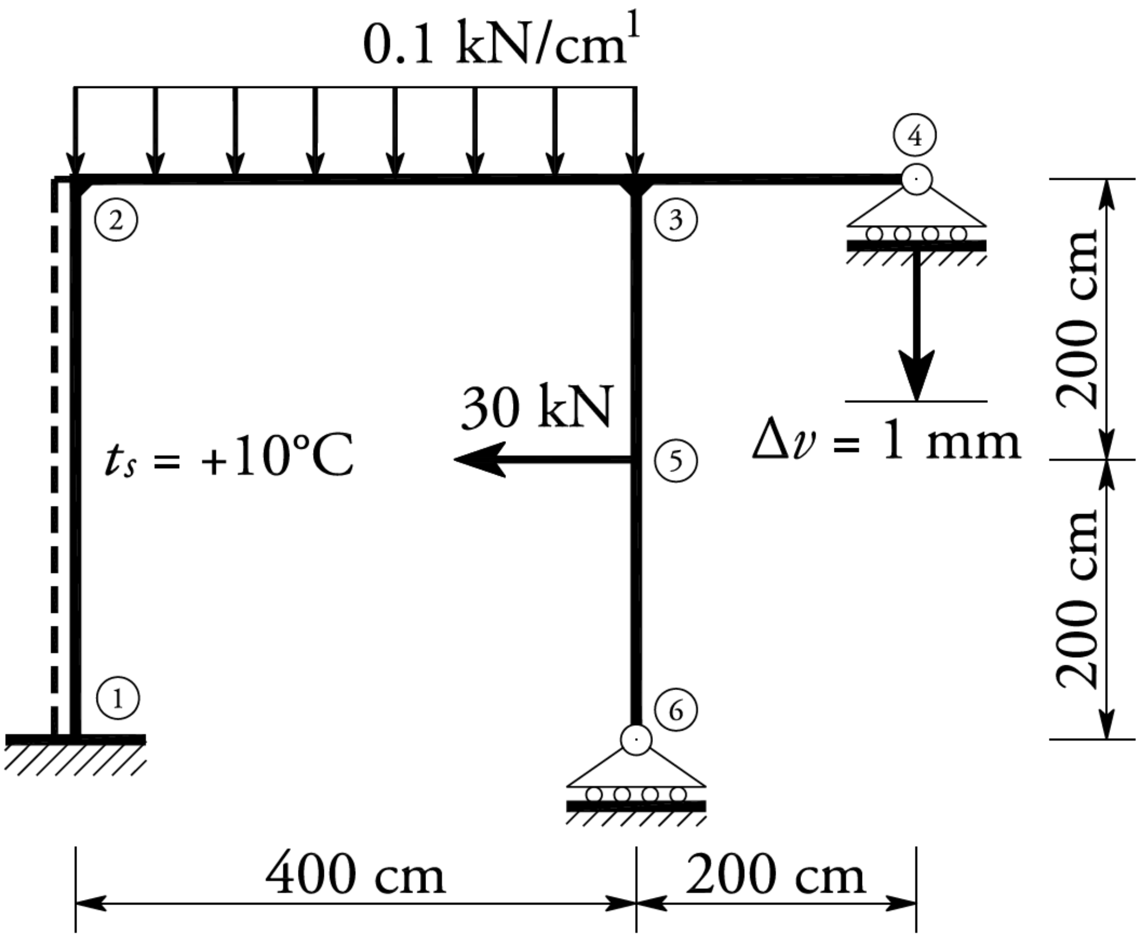


Stup: b/h = 30/30 cm

Greda: b/h = 30/40 cm

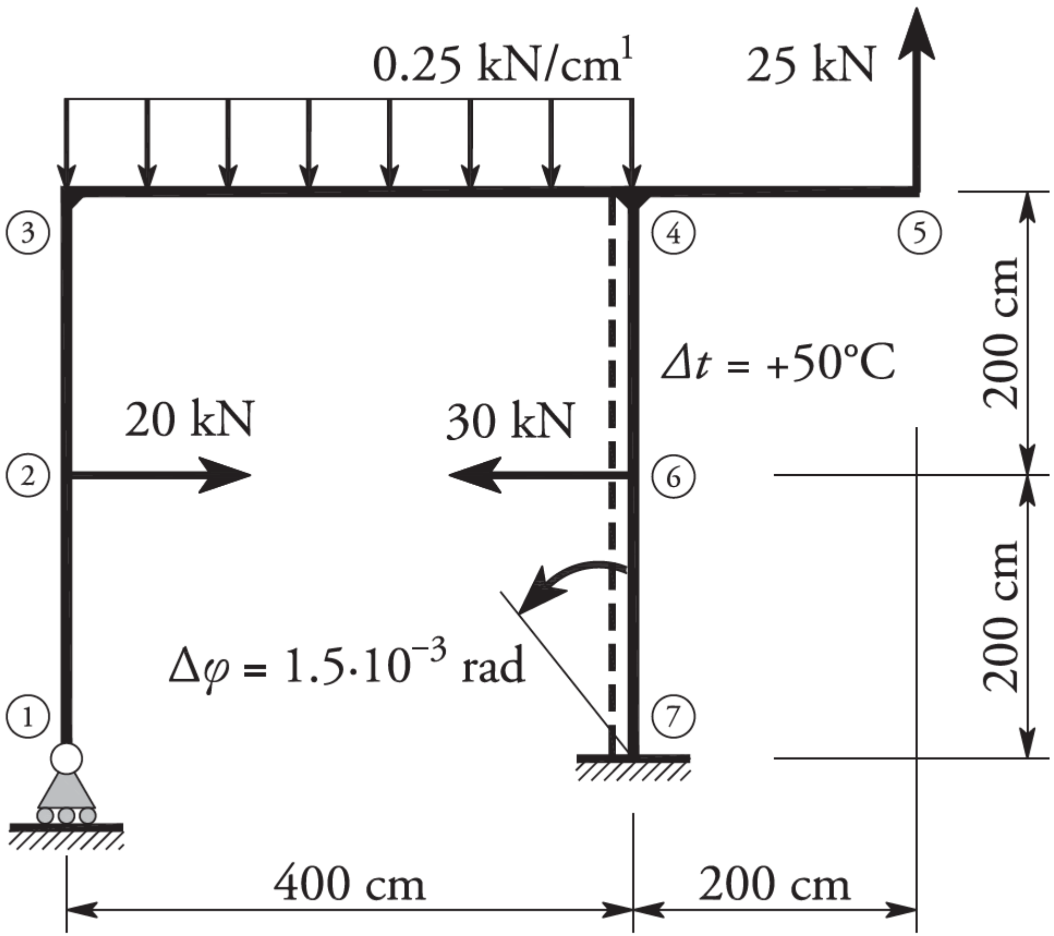
$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2

Ispitni rok | 17. veljače 2020.

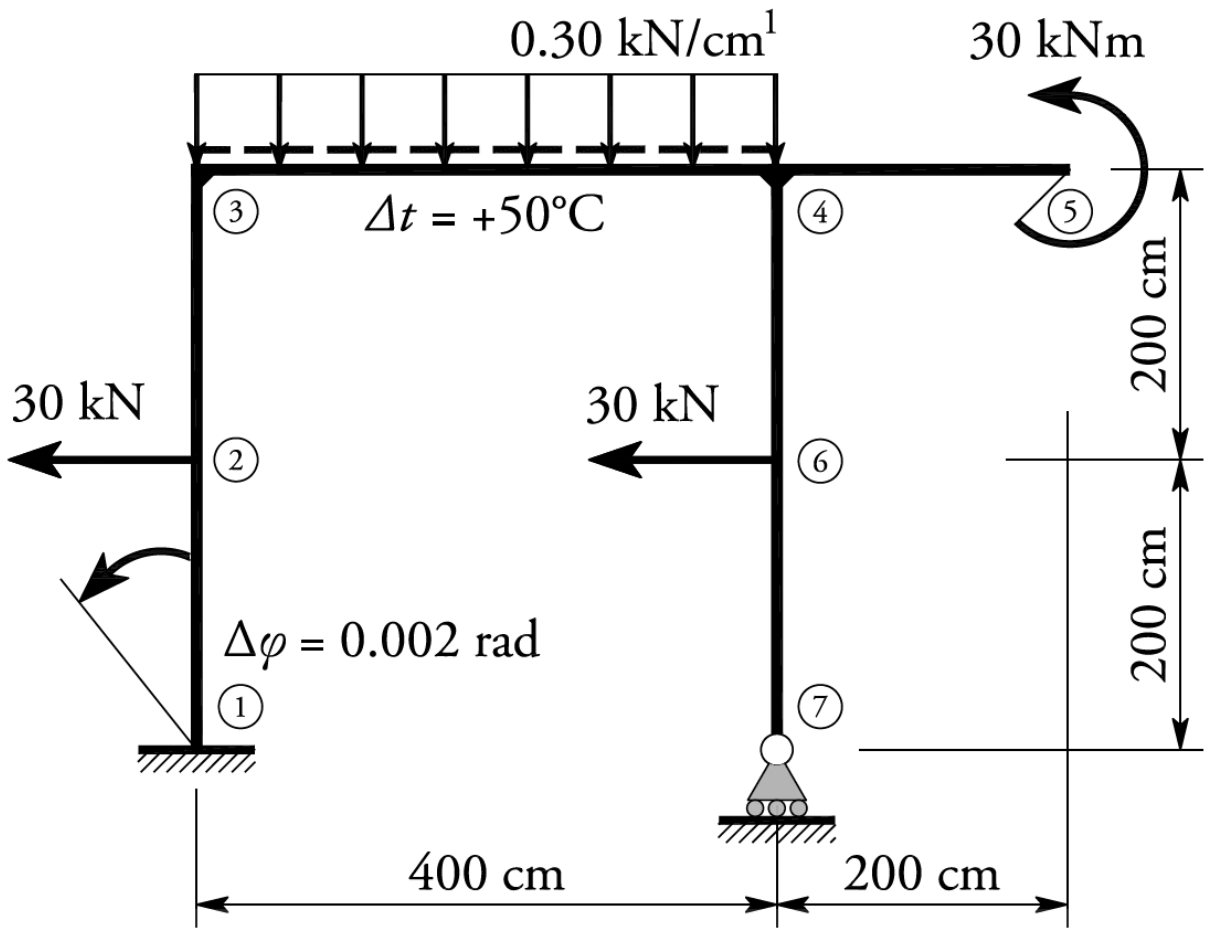


Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.
Ured II.26, Vladimira Preloga 3, marin.grubisic@gfos.hr | Google Classroom: qmvjpo6

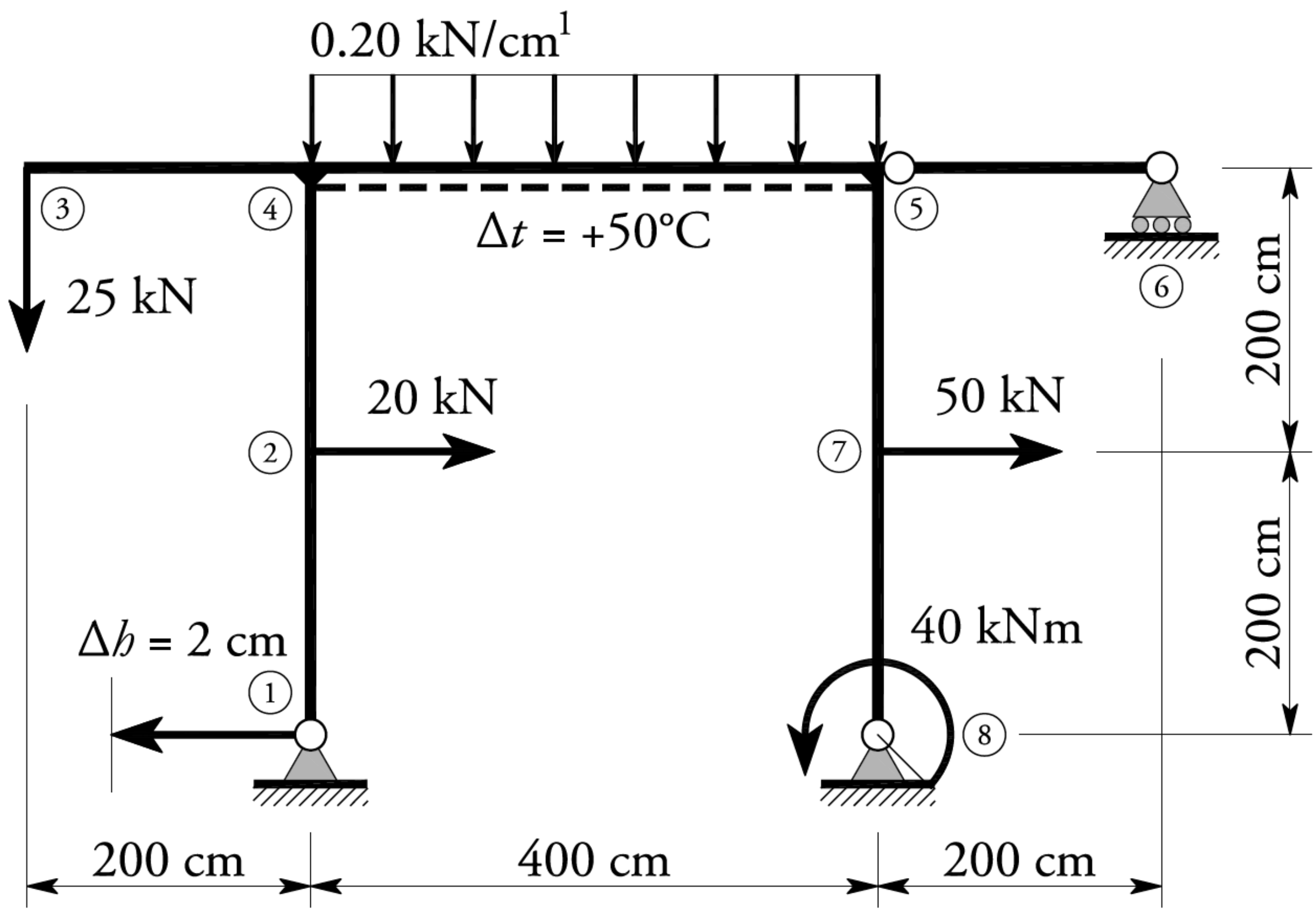
Ispitni rok | 9. srpnja 2020.



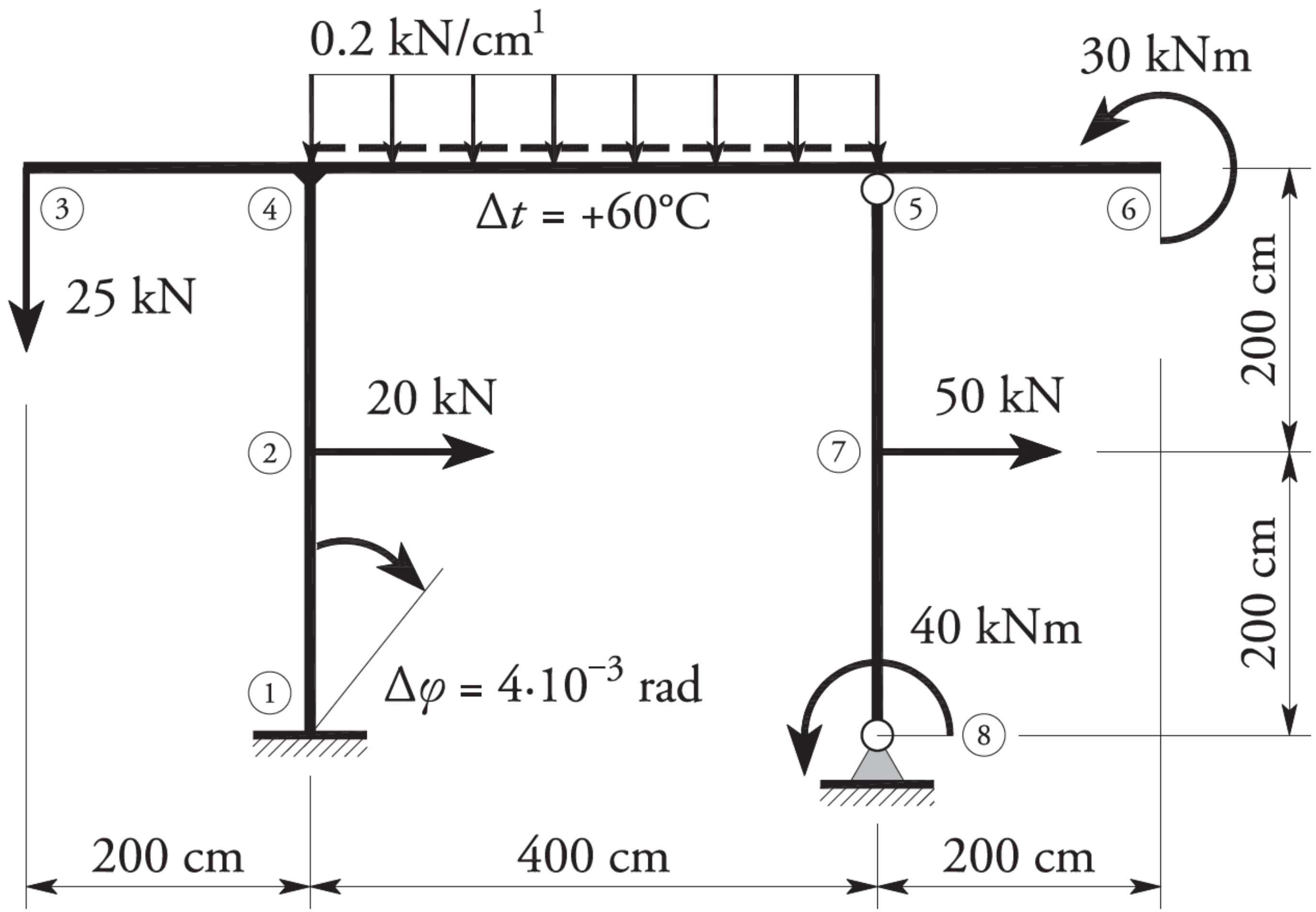
Ispitni rok | 23. srpnja 2020.



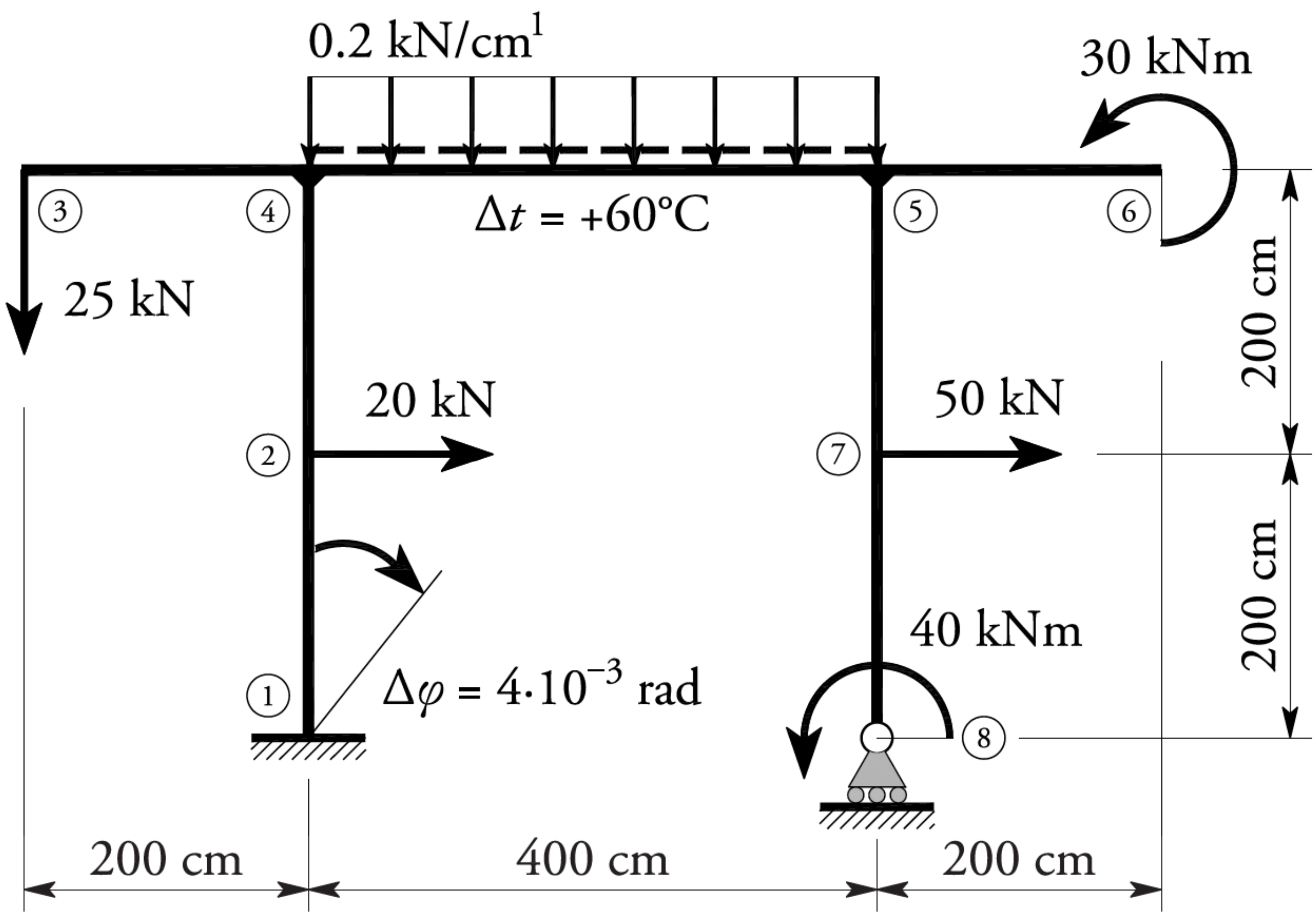
Ispitni rok | 3. rujna 2020.



Ispitni rok | 17. rujna 2020.



Ispitni rok | 1. studenoga 2020.



Hvala na pažnji!

Pitanja?

Doc. dr. sc. Marin Grubišić, mag. ing. aedif.

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)
Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)
Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku
Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR–31 000 Osijek, Hrvatska

marin.grubisic@gfos.hr

Konzultacije: **srijedom 8:00 — 9:00 sati**
Google Classroom: **qmvjpo6**