Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
**Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek**
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
**Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek**

**Građevna statika 2** (21093) | Tjedan #4
Akademska godina 2020./2021.

# Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

**Marin Grubišić**

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)
Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)
Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku
Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR–31 000 Osijek, Hrvatska

**marin.grubisic@gfos.hr**

Structural &
Earthquake Engineering

# Sadržaj prezentacije

# Struktura prezentacije

1. **Ciljevi i sadržaj**
2. Vrste proračuna konstrukcija
3. Matrice fleksibilnosti i krutosti
4. Metode integriranja

# Ciljevi i sadržaj

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

- Razumjeti Maxwell-Bettijevi **teoremi o uzajamnosti radova i pomaka**
- Razumjeti linearne odnose **sila** i **pomaka** konstrukcija izraženih koeficijentima **fleksibilnosti** i **krutosti**
- Razumjeti oblik koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u **matričnom obliku**
- Prikazati njihovu ulogu u **metodi sila** i **metodi pomaka**

# Struktura prezentacije

# Proračuni štapnih konstrukcija

## Sustavi diferencijalnih jednadžbi, tri stupa analize konstrukcija

Za **statički određene** sustave, **metoda sila** omogućuje pronalaženje unutarnjih sila (uvjeti ravnoteže), bez obzira na materijalne informacije. Materijalne karakteristike su potrebne samo za proračun **progiba** ili **rotacija**.

Za **statički neodređene** sustave (reakcije ili unutarnje sile $>$ uvjeti ravnoteže), uvjeti ravnoteže **nisu dovoljni** za potpunu analizu sustava. Informacije o **kompatibilnosti** i **materijalu** su ključne.

Proračun štapnih konstrukcija temelji se na sustavu **diferencijalnih jednadžbi** (linearnih ili nelinearnih) koje opisuju ponašanje konstrukcije pod djelovanjem vanjskih utjecaja.

1. **Statika**: diferencijalne **jednadžbe ravnoteže** opisuju vezu vanjskih djelovanja unutarnjih sila (jednadžbe ravnoteže).
2. **Kinematika**: diferencijalne **jednadžbe kompatibilnosti** opisuju vezu pomaka i deformacija (kompatibilnost pomaka).
3. **Konstitutivni materijali**: diferencijalne **jednadžbe materijala** opisuju vezu naprezanja i deformacija.

# Glavne vrste metoda analize statički neodređenih konstrukcija

Prvenstveno koristimo **dvije vrste metoda analize**:

### Metoda sila (fleksibilnosti)

- **Statički neodređeni** sustav pretvaramo u određeni uklanjanjem nekih **nepoznatih sila** ili reakcija oslonaca i zamjenom s (pretpostavljenim) poznatim/jediničnim silama.
- Prikaz koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u **matričnom obliku**.
- **Superpozicijom** izračunavamo silu potrebnu za **postizanje kompatibilnosti** s izvornom konstrukcijom.
- Nepoznanice obično su **redundantne (prekobrojne) sile**.
- Koeficijenti nepoznanica su **koeficijenti fleksibilnosti (popustljivosti)**, $[\boldsymbol{F}]\{\boldsymbol{P}\} = \{\boldsymbol{\Delta}\}$.

### Metoda pomaka (krutosti)

- Izražavamo lokalne (razina elementa) odnose **sile i pomaka** u pogledu **nepoznatih pomaka elementa**.
- **Kinematska neodređenost** – nepoznati pomaci i rotacije.
- Koristeći **uvjete ravnoteže** sastavljenih elemenata, pronalazimo **nepoznate pomake**.
- Nepoznanice obično su **pomaci**.
- Koeficijenti nepoznanica su **koeficijenti krutosti**, $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\Delta}\} = \{\boldsymbol{P}\}$.

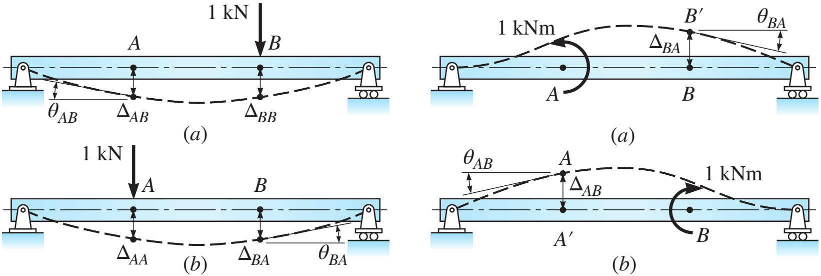
# Glavne vrste metoda analize statički neodređenih konstrukcija

## Usporedba ideja proračuna prema metodi sila i metodi pomaka

**Tablica 1:** Usporedba dvaju metoda analize konstrukcija

| Metoda analize konstrukcija | Nepoznanice | Jednadžbe korištene za proračun | Koeficijenti nepoznanica |
|---|---|---|---|
| **Metoda sila** (*fleksibilnosti*) | **Sile i momenti** | **Kompatibilnosti** i odnosi sila-pomak | **Matrice fleksibilnosti** |
| **Metoda pomaka** (*krutosti*) | **Pomaci i rotacije** | **Ravnoteže** i odnosi sila-pomak | **Matrice krutosti** |

# Maxwell-Bettijevi teoremi o uzajamnosti radova i pomaka




**Slika 1:** Maxwell-Bettijevi teoremi

Pomak ili rotacija u točki $A$ u smjeru 1 uslijed jediničnog opterećenja u $B$ u smjeru 2 jednak je pomaku ili rotaciji u $B$ u smjeru 2 zbog jediničnog opterećenja u $A$ u smjeru 1.

$$F_B \Delta_{BA} = F_A \Delta_{AB} \quad \because \quad \Delta_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} \, \mathrm{d}x = \Delta_{AB} \tag{2.1}$$

$$M_B \theta_{BA} = M_A \theta_{AB} \quad \because \quad \theta_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} \, \mathrm{d}x = \theta_{AB} \tag{2.2}$$

$$\sum F_1 \delta_2 = \sum F_2 \delta_1 \tag{2.3}$$

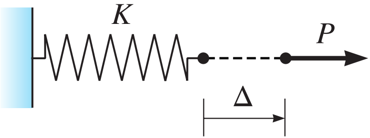
# Struktura prezentacije

# Jednodimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

Koeficijenti fleksibilnosti i krutosti su **obilježja konstrukcije** i njezinoga **koordinatnog sustava**. Na primjeru linearno elastične opruge jednostavno je prikazati odnos sile, $P$ i pomaka, $\Delta$.

$$P = K\Delta \quad \therefore \quad \Delta = FP \tag{3.1}$$




**Slika 2:** Linearno elastična opruga

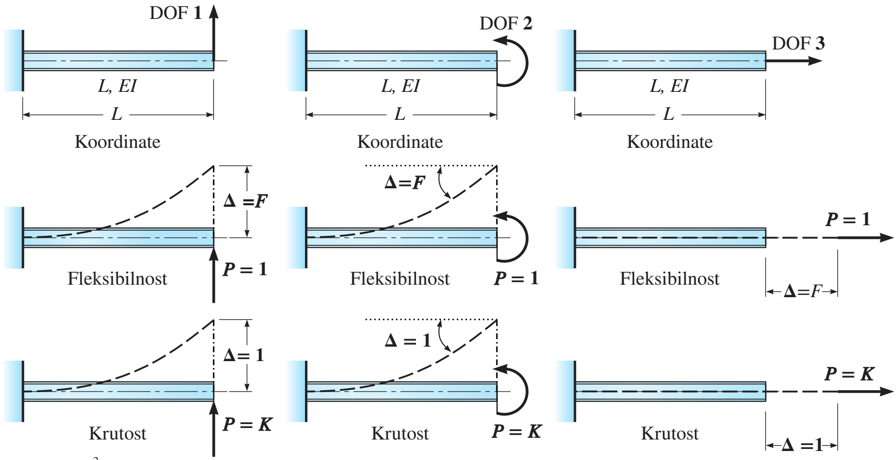
**Krutost** (konstanta) opruge $K$ definirana kao **sila** ili **moment** $P$ potreban da proizvede jedinični **pomak** ili **rotaciju**. **Fleksibilnost** (popustljivost) opruge $F$ definirana kao **pomak** ili **rotacija** uzrokovan jediničnom vrijednošću **sile** ili **momenta**.

$$F = \frac{1}{K} \quad \therefore \quad K = \frac{1}{F} \quad \therefore \quad KF = 1 \tag{3.2}$$

Ako je **krutost** opruge poznata, **pomak** ili **rotacija** se može odrediti za bilo koje primijenjeno opterećenje $P$. Izrazi vrijede za linearno elastičnu oprugu i za bilo koju **jednodimenzionalni** linearno elastični sustav.

# Jednodimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

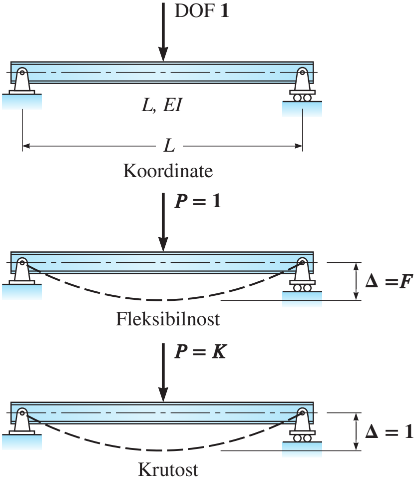



$F = \frac{L^3}{3EI} \quad K = \frac{3EI}{L^3}$ $\qquad$ $F = \frac{L}{EI} \quad K = \frac{EI}{L}$ $\qquad$ $F = \frac{L}{EA} \quad K = \frac{EA}{L}$

**Slika 3:** Fleksibilnosti i krutosti za jednodimenzionalne sustave

# Jednodimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

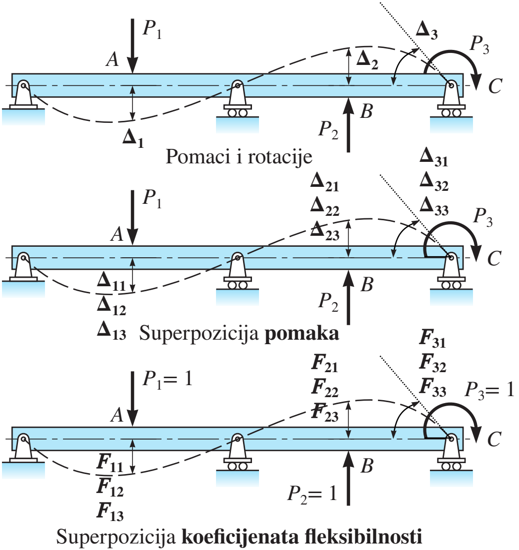



$$F = \frac{L^3}{48EI} \qquad K = \frac{48EI}{L^3}$$

**Slika 4:** Fleksibilnosti i krutosti za jednodimenzionalne sustave

# Višedimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava




**Slika 5:** Fleksibilnosti i krutosti za jednodimenzionalne sustave

# Višedimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

Budući da je odnos sile i pomaka linearan, može se koristiti **princip superpozicije**. Tada se pomak točke može pisati kao **suma pomaka od individualnih opterećenja** za svaki smjer djelovanja posebno. Tada se sustav jednadžbi može napisati kao:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} \quad \therefore \quad \Delta_1 = F_{11}P_1 + F_{12}P_2 + F_{13}P_3 \\
\Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} \quad \therefore \quad \Delta_2 = F_{21}P_1 + F_{22}P_2 + F_{23}P_3 \\
\Delta_3 &= \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} \quad \therefore \quad \Delta_3 = F_{31}P_1 + F_{32}P_2 + F_{33}P_3
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Za sustav s $n$ koordinata, odnosno stupnjeva slobode za proračun pomaka može se napisati:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, P_j \tag{3.4}$$

Ili u **matričnom obliku**:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \{\Delta\} = [F]\{P\} \tag{3.5}$$

# Višedimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

Sila (ili moment) u točki može pisati kao **suma sila (ili momenata) od individualnih pomaka** za svaki smjer posebno. Tada se sustav jednadžbi može napisati kao:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{11} + P_{12} + P_{13} \quad \therefore \quad P_1 = K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + K_{13}\Delta_3 \\ P_2 &= P_{21} + P_{22} + P_{23} \quad \therefore \quad P_2 = K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + K_{23}\Delta_3 \\ P_3 &= P_{31} + P_{32} + P_{33} \quad \therefore \quad P_3 = K_{31}\Delta_1 + K_{32}\Delta_2 + K_{33}\Delta_3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Za sustav s $n$ koordinata, odnosno stupnjeva slobode za proračun sila (ili momenata) može se napisati:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, D_j \tag{3.7}$$

Ili u **matričnom obliku**:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \{P\} = [K]\{\Delta\} \tag{3.8}$$

# Višedimenzionalni sustav

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

U izrazima $\{\Delta\} = [F]\{P\}$ i $\{P\} = [K]\{\Delta\}$ je $\{\Delta\}$ **vektor pomaka** dimenzije $n \times 1$, $[F]$ i $[K]$ je kvadratna matrica $n$-tog reda, koju zovemo **matrica fleksibilnosti** ili **popustljivosti**, odnosno **matrica krutosti** i $\{P\}$ je **vektor sile** dimenzije $n \times 1$.

Koeficijenti fleksibilnosti duž glavne dijagonale $[F]$ su $F_{11},\ F_{22},\ \ldots\ (F_{ij},\ i = j)$ i oni su **izravni koeficijenti fleksibilnosti** odnosno **krutosti**. Ostali koeficijenti fleksibilnosti $(F_{ij},\ i \neq j)$ su **unakrsni koeficijenti fleksibilnosti** odnosno **krutosti**.

Budući vrijedi $F = \frac{1}{K}$, odnosno $K = \frac{1}{F}$, što označava da je i matrica krutosti $[K]$ **inverzna** matrici fleksibilnosti $[F]$ i obrnuto.

$$[K] = [F]^{-1} \quad \therefore \quad [F] = [K]^{-1} \quad \therefore \quad [F][K] = [I] \tag{3.9}$$

gdje je $[I]$ **matrica identiteta** ili **jedinična matrica**.

# Višedimenzionalni sustav

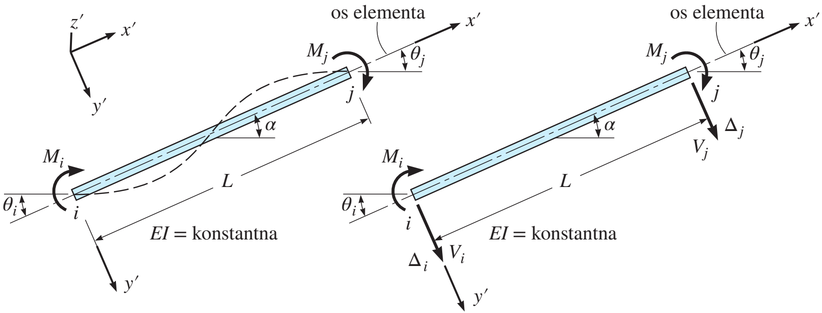
## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

Matrice fleksibilnosti i krutosti imaju sljedeće **karakteristike**:

1. Matrice su **kvadratne** i **simetrične** $[F] = [F]^T$, odnosno $[K] = [K]^T$ oko glavne dijagonale, $F_{12} = F_{21}$, odnosno $K_{12} = K_{21}$, te su $n$-tog reda, gdje je $n$ broj koordinata (stupnjeva slobode). Dokaz ove karakteristike može se dobiti iz **Maxwell-Bettijevih teorema o uzajamnosti radova i pomaka**.
2. Matrice su **singularne** i **potpuno popunjene** za bilo koji element ili generalni sustav. Međutim ako su definirani dovoljni rubni uvjeti tako da je sustav stabilan (i matrice modificirane da odražavaju te uvjete) tada matrice više **nisu singularne** (regularne su), $[A][B] = [B][A] = [I]$.
3. Koeficijenti na glavnoj dijagonali **uvijek su pozitivni**, dok ostali koeficijenti mogu biti pozitivni i negativni. Koeficijenti na glavnoj dijagonali predstavljaju silu na čvoru potrebnu za ostvarivanje odgovarajućeg pomaka na tom čvoru.

# Matrica krutosti 4 x 4 elementa u lokalnim koordinatama

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

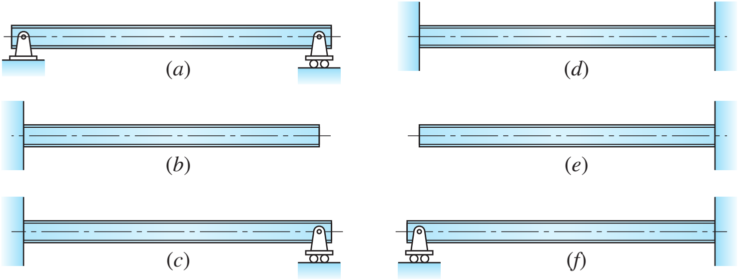



**Slika 6:** Gredni element opterećen momentima savijanja i poprečnim silama s pripadajućim pomacima i rotacijama

$$
\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ V_i \\ V_j \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} \\ 1 & 2 & \dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} \\ \dfrac{3}{L} & \dfrac{3}{L} & \dfrac{6}{L^2} & -\dfrac{6}{L^2} \\ -\dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} & -\dfrac{6}{L^2} & \dfrac{6}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} \tag{3.10}
$$

# Matrica krutosti 4 x 4 elementa u lokalnim koordinatama

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava




**Slika 7:** Gredni elementi s različitim rubnim uvjetima za redukciju matrice krutosti $4 \times 4$

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ V_i \\ V_j \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} \\ 1 & 2 & \dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} \\ \dfrac{3}{L} & \dfrac{3}{L} & \dfrac{6}{L^2} & -\dfrac{6}{L^2} \\ -\dfrac{3}{L} & -\dfrac{3}{L} & -\dfrac{6}{L^2} & \dfrac{6}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

# Struktura prezentacije

# Maxwell-Mohr integral i metode integriranja

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

**Maxwell-Mohr integral** za izračunavanje pomaka ili rotacija uzimajući u obzir sva djelovanja:

$$\Delta_{ij} \text{ ili } \theta_{ij} = \sum \int_0^x \frac{M_j m_i}{EI} \, \mathrm{d}x + \sum \int_0^x k \frac{V_j v_i}{GA} \, \mathrm{d}x + \sum \int_0^x \frac{N_j n_i}{EA} \, \mathrm{d}x \tag{4.1}$$

Prilikom izračuna integrala moguće je koristiti sljedeće **metode integracije**:

1. **Rješavanje određenih integrala** svih segmenata dijagrama,
2. **Trapezno pravilo** omogućuje izračunavanje u pogledu **ekstremnih ordinata** funkcija,

$$\Delta_{ij} \text{ ili } \theta_{ij} = \frac{L}{6EI}(2ab + 2cd + ad + bc)$$

3. **Simpsonovo pravilo** omogućuje izračunavanje u pogledu **ekstremnih i srednjih ordinata** funkcija,

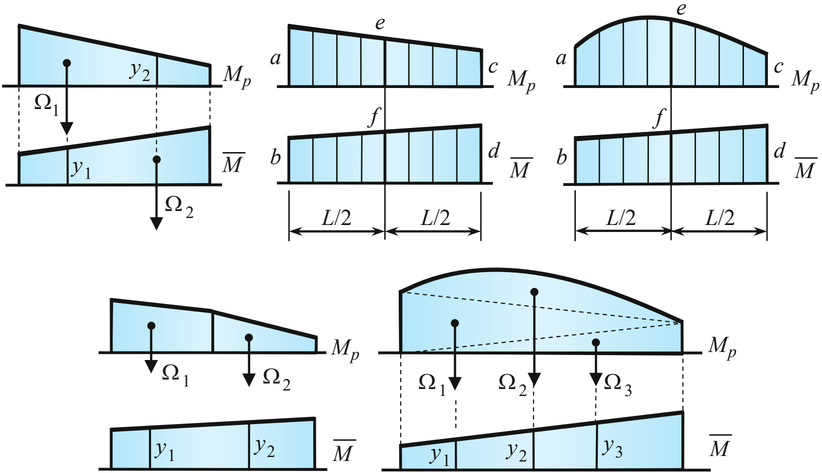
$$\Delta_{ij} \text{ ili } \theta_{ij} = \frac{L}{6EI}(ab + 4ef + cd)$$

4. **Vereshchaginovo pravilo** omogućuje izračunavanje u pogledu elementarnih algebarskih procedura.

$$\Delta_{ij} \text{ ili } \theta_{ij} = \int \frac{M_p \overline{M}}{EI} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{EI} \left( \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 \right)$$

# Maxwell-Mohr integral i metode integriranja

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava




**Slika 8:** Umnožak dva dijagrama momenata savijanja za izračunavanje Maxwell-Mohr integrala

# KAHOOT kviz

## Uloga koeficijenata fleksibilnosti i krutosti u proračunu statičkih sustava

**kahoot.it**

# Literatura

## Osnovna novija strana literatura za područje obuhvaćeno predavanjem


- Amin Ghali and Adam Neville, Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach, 7th ed., Taylor & Francis Group, LLC, 2017.
- Russell C. Hibbeler, Structural Analysis, 9th ed., Pearson Prentice Hall, 2015.
- Igor A. Karnovsky and Olga Lebed, Advanced Methods of Structural Analysis, 1st ed., Springer Science, 2010.
- Kenneth M. Leet, Chia-Ming Uang, Joel T. Lanning, and Anne M. Gilbert, Fundamentals of Structural Analysis, 5th ed., McGraw-Hill Education, 2017.
- William McGuire, Richard H. Gallagher, and Ronald D. Ziemian, Matrix Structural Analysis, 2nd ed., CreateSpace Independent Publishing Platform, 2000.
- William Weaver and James M. Gere, Matrix Analysis of Framed Structures, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold, 1990.

# Hvala na pažnji!

Pitanja?

**Marin Grubišić**

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)
Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)
Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku
Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR–31 000 Osijek, Hrvatska

**marin.grubisic@gfos.hr**

Structural &
Earthquake Engineering