



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek

Građevna statika 2 (21093) | Tjedan #1

Akademska godina 2020./2021.

Metode određivanja progiba i rotacija greda i okvira

Marin Grubišić

Dr. sc. / mag. ing. aedif.

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)
Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)
Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku
Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR-31 000 Osijek, Hrvatska

marin.grubisic@gfos.hr

Structural &
Earthquake Engineering

Sadržaj prezentacije

- 1 Uvod, ciljevi i sadržaj**
 - Tri stupa analize konstrukcija
 - Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
 - Principi superpozicije
 - Crtanje elastične progibne linije
- 2 Diferencijalne jednačbe**
 - Numerički primjeri #1
- 3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti**
 - Numerički primjeri #2
- 4 Fiktivni (konjugirani) nosač**
 - Numerički primjeri #3
- 5 Zaključci**

Struktura prezentacije

1 Uvod, ciljevi i sadržaj

- Tri stupa analize konstrukcija
- Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
- Principi superpozicije
- Crtanje elastične progibne linije

2 Diferencijalne jednačbe

- Numerički primjeri #1

3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti

- Numerički primjeri #2

4 Fiktivni (konjugirani) nosač

- Numerički primjeri #3

5 Zaključci

Ciljevi i sadržaj

Određivanje progiba i kutova zaokreta (rotacija) kao preduvjet za analizu statički neodređenih nosača

- Prikazati metode za izračunavanje progiba i kutova zaokreta (rotacija) elastičnih greda i okvira.
 - ➊ Naučiti metodu **dvostruke integracije** koja se temelji na osnovnoj **diferencijalnoj jednačbi elastične krivulje**, koja povezuje zakrivljenost s M/EI duž uzdužne osi elementa.
 - ➋ Naučiti metodu temeljenu na **teorema dijagrama zakrivljenosti**, odnosno M/EI dijagrama između dviju točaka duž osi elementa. To je geometrijska metoda koja zahtijeva da se oblik progiba pravilno nacрта.
 - ➌ Naučiti metodu **fiktivne (konjugirane/analogne) grede** za izračun kutova zaokreta i progiba u bilo kojoj točki elementa.
- Shvatiti prednosti i nedostatke pojedinih prezentiranih metoda za određivanje progiba i rotacija.
- Osnove simboličke matematike u Pythonu kao pomoću pri rješavanju diferencijalnih jednačbi ([Anaconda 3 2020.07](#)).

Sadržaj prezentacije

Opis gradiva sadržanog u prezentaciji

Uvodni dio obuhvaća osnove linearne statike štapnih konstrukcija, uz ponavljanje općenitih svojstava:

- rubnih uvjeta i veza,
- predznaka momenata savijanja,
- karakteristike momentnog dijagrama,
- karakteristike elastične progibne linije grednih nosača i okvira,
- veza između elastične progibne linije i momentnog dijagrama.

U nastavku ćemo predstaviti tri različite metode koje se mogu koristiti za proračun progiba i kutova zaokreta (rotacija) statički određenih sustava:

- analitička metoda:
 - 1 integracija diferencijalne jednačbe elastične linije nosača,
- grafoanalitičke metode:
 - 1 teoremi dijagrama zakrivljenosti, M/EI ,
 - 2 metoda fiktivne (konjugirane/analogne) grede.

Proračun štapnih konstrukcija

Sustavi diferencijalnih jednačbi, tri stupa analize konstrukcija

Proračun štapnih konstrukcija temelji se na sustavu diferencijalnih jednačbi (linearnih ili nelinearnih) koje opisuju ponašanje konstrukcije pod djelovanjem vanjskih utjecaja.

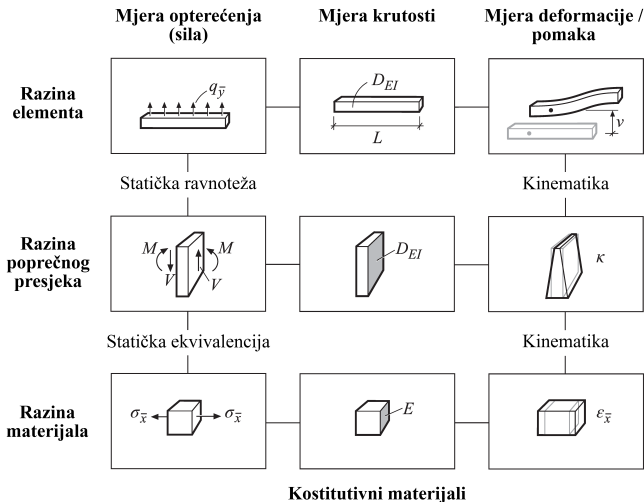
- 1 **Statika:** diferencijalne **jednačbe ravnoteže** opisuju vezu vanjskih djelovanja unutarnjih sila (jednačbe ravnoteže),
- 2 **Kinematika:** diferencijalne **jednačbe kompatibilnosti** opisuju vezu pomaka i deformacija (kompatibilnost pomaka),
- 3 **Konstitutivni materijali:** diferencijalne **jednačbe materijala** opisuju vezu naprezanja i deformacija.

Linearni proračun štapnih konstrukcija temelj i se na pretpostavci da su sve tri diferencijalne jednačbe linearne, odnosno:

- pomaci konstrukcije su mali te se uvjeti ravnoteže postavljaju na nedeformiranom štapu, deformacije konstrukcije su male veličine $\varepsilon \ll 1$, $\theta \ll 1$ a njihovi produkti i potencije su zanemarivo male veličine,
- veza deformacija i pomaka su opisane linearnim diferencijalnim jednačbama prvog reda,
- veza između deformacija i naprezanja odnosno temperaturnih promjena je linearna (vrijedi *Hookeov zakon*).

Tri stupa analize konstrukcija

Od razine materijala do razine elementa u konstrukciji



Slika 1: Analize od razine materijala do razine elementa u konstrukciji

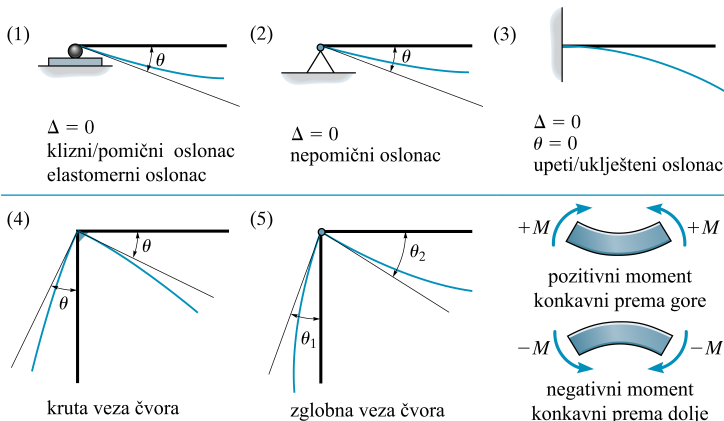
Tri stupa analize konstrukcija

Od razine materijala do razine elementa u konstrukciji

- Prve dvije pretpostavke rezultiraju linearnom vezom između vanjskih i unutarnjih sila te pomaka i deformacija pa govorimo **geometrijskoj linearnosti**.
- Treća pretpostavka o linearnoj vezi naprežanja i deformacija označava se kao **materijalna (fizikalna) linearnost**.
- Proračun konstrukcija uz pretpostavke geometrijske i materijalne (fizikalne) linearnosti označava se kao **teorija 1. reda**.
- Pri proračunu konstrukcija po teoriji 1. reda vrijedi **zakon superpozicije** rješenja koja proizlaze iz diferencijalnih jednačbi štapa su jedinstvena.

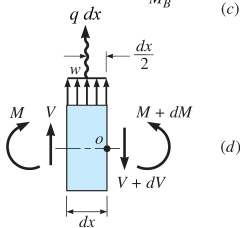
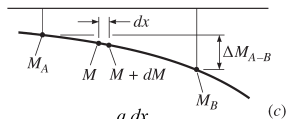
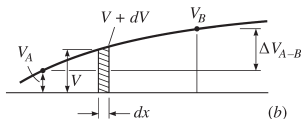
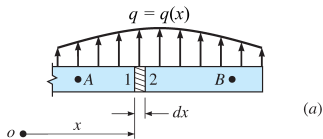
Karakteristike tipičnih veza

Karakteristične veze s obzirom na njihove pomake i rotacije



Slika 2: Karakteristike tipičnih krutih i popustljivih veza te predznaci momenata savijanja

Diferencijalni odnosi opterećenja, poprečnih sila i momenata savijanja



$$dV = q dx \quad \therefore \quad \frac{dV}{dx} = q$$

$$\Delta V_{A-B} = V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B dq dx$$

$$dM = V dx \quad \therefore \quad \frac{dM}{dx} = V$$

$$\Delta M_{A-B} = M_B - M_A = \int_A^B dM = \int_A^B dV dx$$

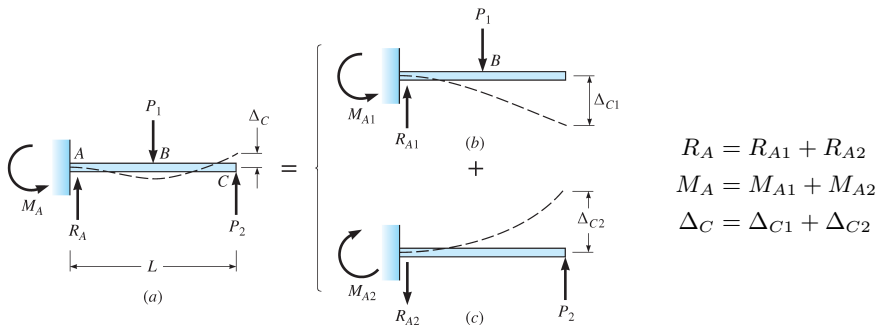
ΔV_{A-B} = površina ispod krivulje kontinuiranog opterećenja između točaka A i B

ΔM_{A-B} = površina ispod dijagrama poprečnih sila između točaka A i B

$\frac{dV}{dx} = q \therefore$ nagib dijagrama poprečnih sila u određenoj točki duž osi elementa jednak je ordinati krivulje distribuiranog opterećenja u toj točki.

$\frac{dM}{dx} = V \therefore$ nagib dijagrama momenata u bilo kojoj točki duž osi elementa jednak je poprečnoj sili u toj točki.

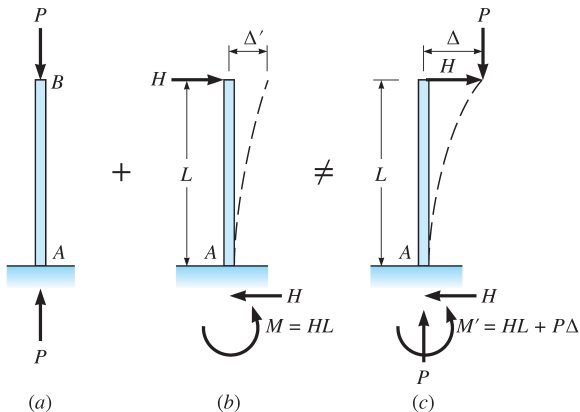
Principi superpozicije



Slika 3: Principi superpozicije na grednim nosačima

Ako se konstrukcija ponaša linearno elastično, sila ili pomak u određenoj točki nastali skupom opterećenja koja djeluju istodobno mogu se izračunati dodavanjem (**superponiranjem**) sila ili pomaka u određenoj točki proizvedenim od svakog opterećenja pojedinačno. Odziv linearne konstrukcije jednak je ako se sva opterećenja primjenjuju istodobno ili ako se kombiniraju učinci pojedinih opterećenja (**algebarska suma**).

Principi superpozicije



$$M' = HL + P\Delta$$

Slika 4: Princip superpozicije nije primjenjiv

Superpozicija **nije primjenjiva** za zajedničko djelovanje uzdužne (aksijalne) sile i horizontalnog opterećenja na stupove, koje izravno stvaraju dodatni $P\Delta$ moment.

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

Ograničavanje deformacija i progiba kao uvjeta uporabljivosti

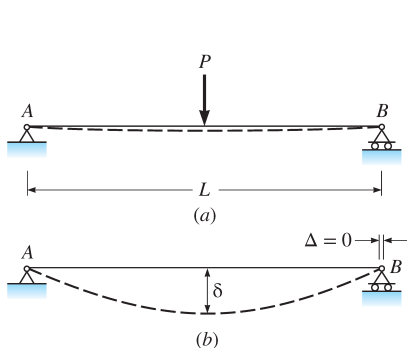
Budući da za skiciranje progibnih linija greda i okvira koristimo različita horizontalna i vertikalna mjerila, moramo biti svjesni **iskrivljenja (distorzije)** koja se moraju primijeniti na skici kako bi se osiguralo da je deformirani oblik progibnih linija točan prikaz opterećene konstrukcije.

Točna skica progibnih linija mora udovoljavati sljedećim pravilima:

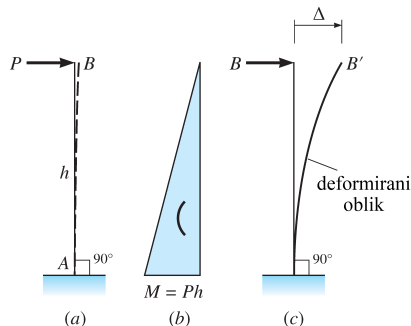
- 1 Zakrivljenost $\varphi = M/EI$ mora biti u skladu s momentnim dijagramom M .
- 2 Oblik elastične progibne linije mora zadovoljiti ograničenja definirana rubnim uvjetima ($\Delta = 0$ ili $\theta = 0$).
- 3 Izvorni kut (obično 90°) na krutom spoju mora se sačuvati.
- 4 Duljina deformiranog elementa jednaka je izvornoj duljini neopterećenog elementa.
- 5 Horizontalna projekcija grede ili vertikalna projekcija stupa jednaka je izvornoj duljini elementa.
- 6 Aksijalne (uzdužne) deformacije iznimno su male u usporedbi s deformacijama savijanja, zbog čega su zanemarene ($EA \approx \infty$).

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



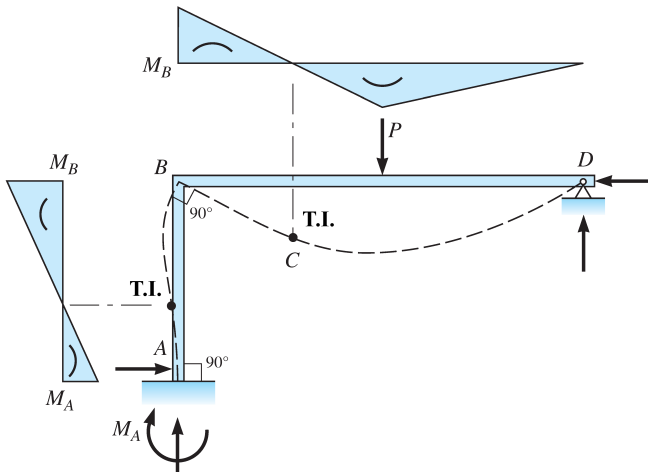
Slika 5: Progibna linija u (a) realnom i (b) naglašenom mjerilu radi jasnoće



Slika 6: (a) Deformirani oblik prikazan isprekidanom linijom u realnom mjerilu; (b) momentni dijagram za konzolu; (c) horizontalna progibna linija u naglašenom mjerilu radi jasnoće

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

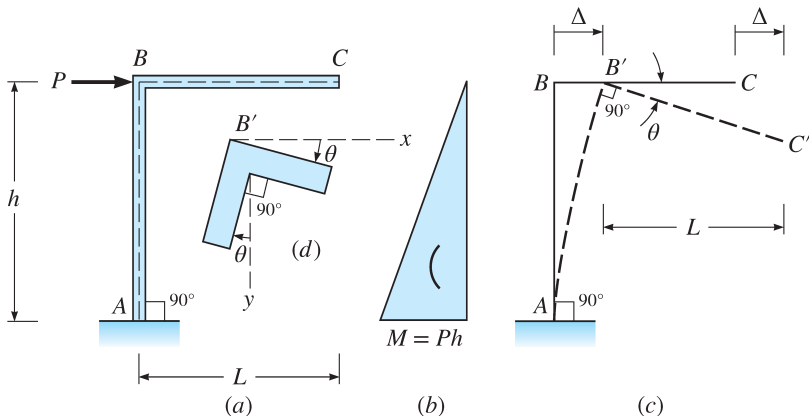
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 7: Progibna linija nepomičnog okvira s momentnim dijagramom i naglašenim točkama infleksije (T.I.)

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

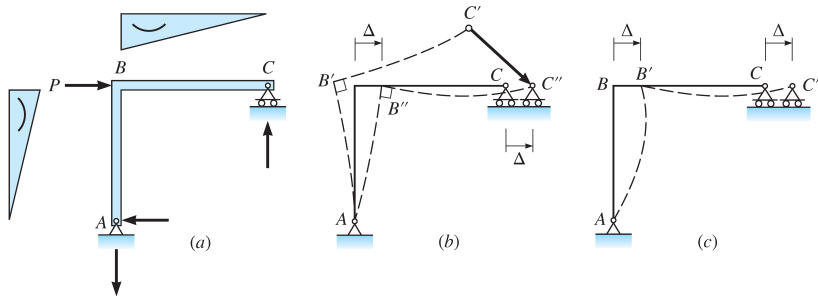
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 8: (a) Progibna linija prikazana u realnom mjerilu isprekidanom linijom; (b) momentni dijagram; (c) progibna linija u naglašenom mjerilu; (d) rotacija krutog čvora B

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

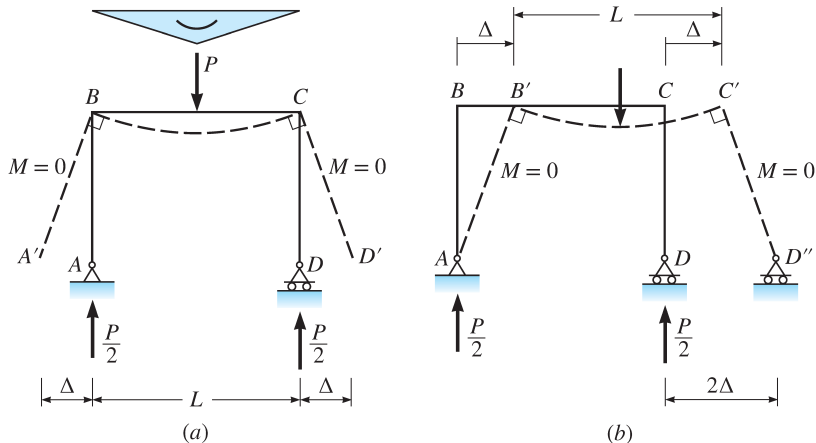
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 9: (a) Momentni dijagram okvira ABC ; (b) deformirani okvir u konačnom položaju; (c) netočna progibna linija: kut od 90° u krutom čvoru B nije sačuvan

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

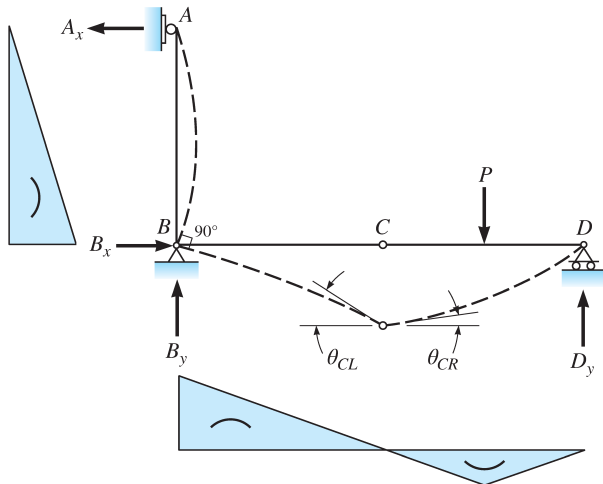
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 10: (a) deformacije nastale opterećenjem prikazane crtkanom linijom; (b) deformirani položaj okvira s obzirom na ograničenja definirana rubnim uvjetima

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

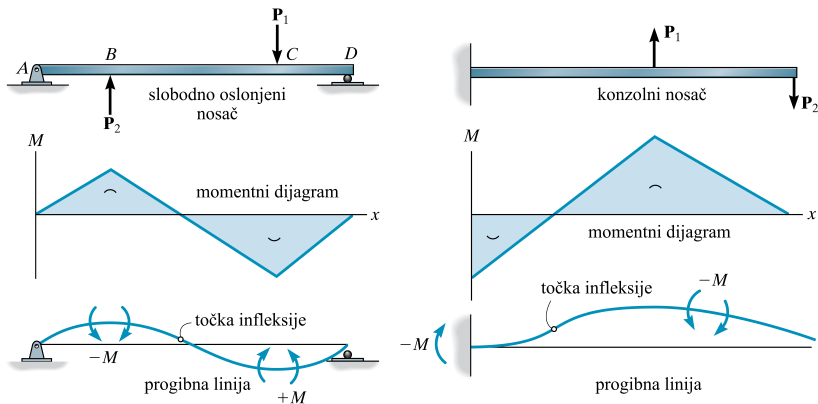
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 11: Primjer elastične progibne linije nepomičnog okvira sadržavajući zglob u čvoru C

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

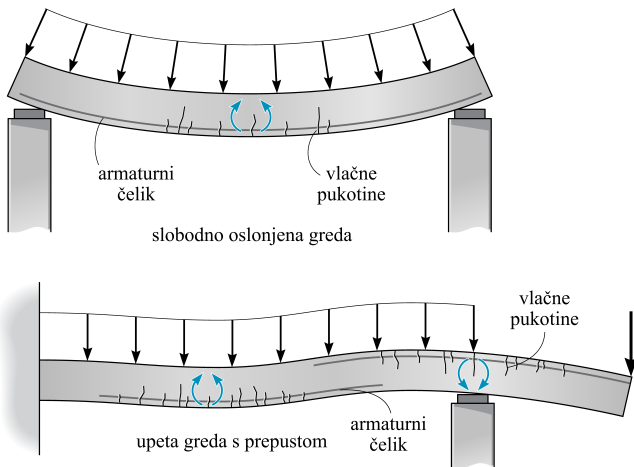
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 12: Dijagrami i elastične progibne linije nosača

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

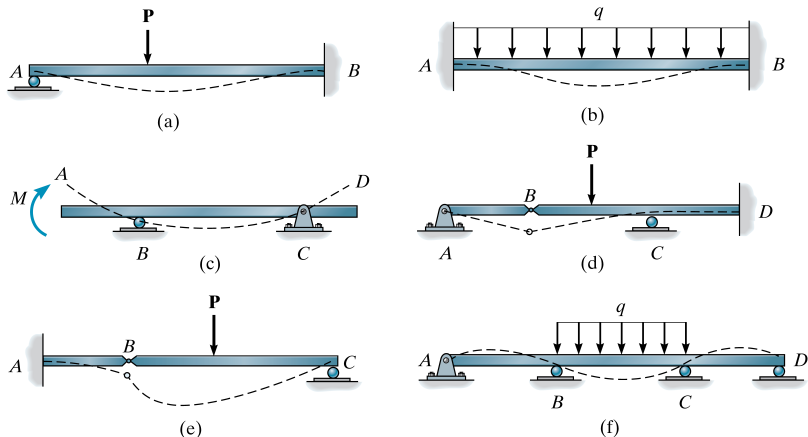
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 13: Izgled progibnih linija AB nosača

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

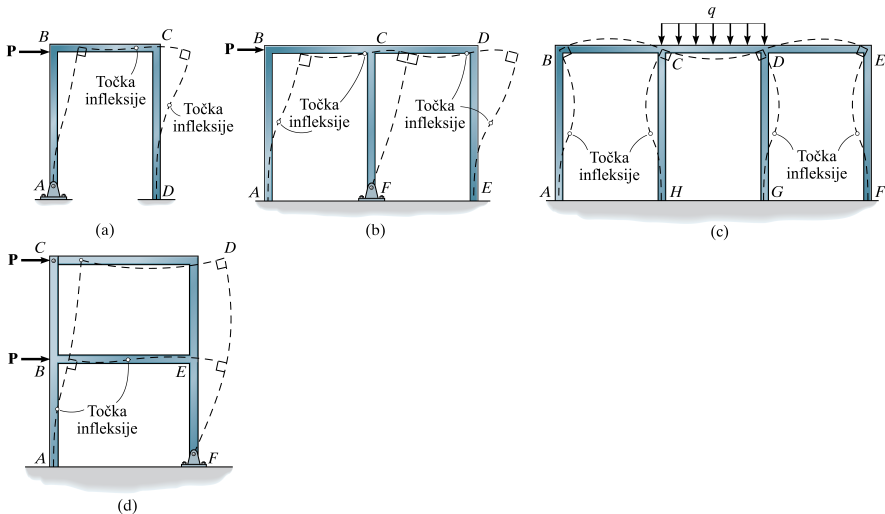
Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 14: Elastične progibne linije složenih grednih nosača

Crtanje elastične progibne linije greda i okvira

Izgled deformacija nosivih sustava i njihove karakteristike



Slika 15: Elastične progibne linije složenih okvirnih nosača

Struktura prezentacije

- 1 Uvod, ciljevi i sadržaj**
 - Tri stupa analize konstrukcija
 - Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
 - Principi superpozicije
 - Crtanje elastične progibne linije
- 2 Diferencijalne jednačbe**
 - Numerički primjeri #1
- 3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti**
 - Numerički primjeri #2
- 4 Fiktivni (konjugirani) nosač**
 - Numerički primjeri #3
- 5 Zaključci**

Euler-Bernoulli teorija savijanja greda

Progibi i deformacije vitalne su mjere za procjenu ponašanja konstrukcija. Načini na koje se konstrukcije pomiču ili deformiraju utječu na njihovu **uporabljivost i prikladnost** za različite primjene.

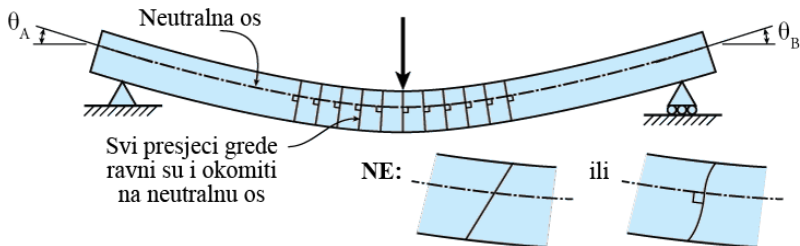
Dvije su glavne teorije savijanja greda:

- **Euler-Bernoulli teorija (1750.)** učinkoviti je ali pojednostavljeni model savijanja greda uslijed djelovanja uzdužne sile i momenta savijanja. Najčešća je metoda koju koristimo za analizu ponašanja elemenata uslijed savijanja te je osnovni model za daljnje analize.
- **Timoshenko-Ehrenfest teorija (1920.)** složenija je ali točnija teorija savijanja greda.

Dvije glavne pretpostavke Euler-Bernoulli teorije:

- 1 ravni poprečni presjeci ostaju ravni nakon deformacija uslijed savijanja,
- 2 deformirani kutovi zaokreta (rotacije) grede su mali ($\leq 5^\circ$).

Euler-Bernoulli teorija savijanja greda



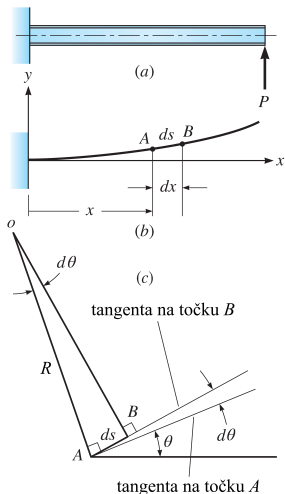
Slika 16: Pretpostavka Euler-Bernoulli teorije da ravni presjeci ostaju ravni

Tablica 1: Iznosi $\sin \theta$ i $\cos \theta$ malih kutova

Kut ($^\circ$)	Kut (rad.)	$\sin \theta$	$\cos \theta$
0	0	0	1
1	0.0175	0.0175	0.9998
2	0.0349	0.0349	0.9994
5	0.0873	0.0872	0.9962
10	0.1745	0.1736	0.9848

Geometrija elastične progibne linije

Osnovni izvodi i izrazi za opisivanje geometrije elastične progibne linije



Slika 17: Geometrija progibne linije

Kut zaokreta elastične progibne linije na točku A

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (2.1)$$

Za vrlo male kutove zaokreta ($\tan \theta \approx \theta$) možemo pisati

$$\frac{dy}{dx} = \theta \quad (2.2)$$

Iz geometrije trokutastog segmenta možemo pisati

$$R \cdot d\theta = ds \quad (2.3)$$

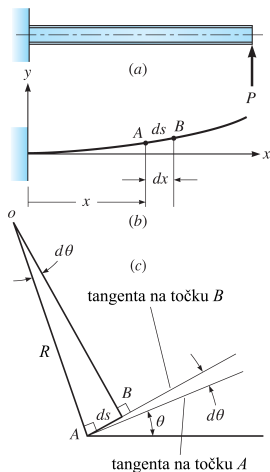
Dijeljenjem gornje jednačbe s obje strane s ds dobivamo

$$\varphi = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

gdje $\frac{d\theta}{ds}$ predstavlja promjenu kuta zaokreta po jedinici duljine duž elastične progibne linije, zove se **zakrivljenost** i označava se simbolom φ .

Geometrija elastične progibne linije

Osnovni izvodi i izrazi za opisivanje geometrije elastične progibne linije



Budući su kutovi zaokreta mali u realnim nosačima, $ds \approx dx$ tada vrijedi

$$\varphi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{R} \quad \therefore \quad R = \frac{1}{\varphi} \quad (2.5)$$

Derivirajući obje strane početne jednačbe s obzirom na x , **zakrivljenost** $\frac{d\theta}{dx}$ možemo izraziti za pravokutni koordinatni sustav kao

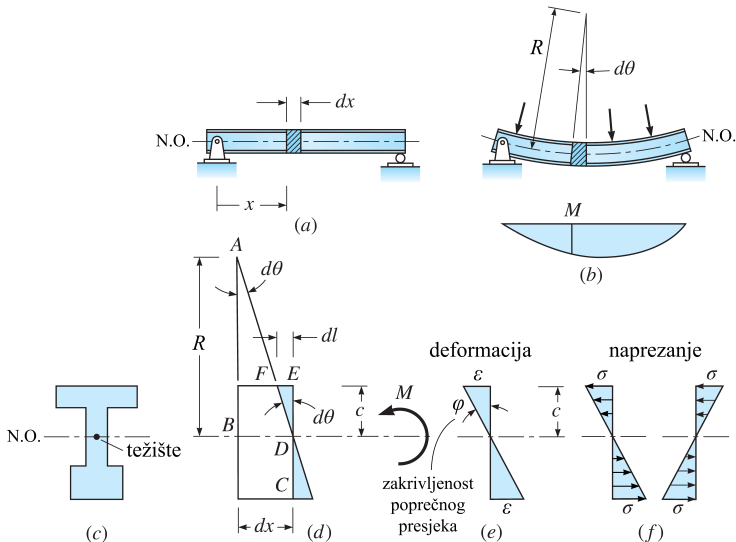
Diferencijalna jednačba elastične linije nosača

$$\varphi = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \approx \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2.6)$$

Integriranjem diferencijalne jednačbe elastične linije, uz poznavanje rubnih uvjeta, može se odrediti **progib i kut zaokreta u bilo kojoj točki grede.**

Diferencijalna jednadžba elastične progibne linije

Karakteristike elastične progibne linije, stanja napreznja i deformacija



Slika 18: Karakteristike elastične progibne linije i stanja napreznja

Diferencijalna jednačba elastične progibne linije

Karakteristike elastične progibne linije, stanja naprezanja i deformacija

Uzimajući u obzir trokut DFE na slici, promjenu duljine gornjeg vlakna dl možemo izraziti kroz $d\theta$ i udaljenost c od neutralne osi do gornjeg vlakna kao

$$dl = d\theta \cdot c \quad (2.7)$$

Prema definiciji, deformacija ε na gornjem licu može se izraziti kao

$$\varepsilon = \frac{dl}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \cdot c = \varphi \cdot c \quad \therefore \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{c} \quad (2.8)$$

Potom se **zakrivljenost** može iskazati još kao

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{M}{EI} \quad (2.9)$$

Ako je ponašanje linearno elastično, naprezanje savijanja, σ , može se povezati s deformacijom ε na gornjem vlaknu po *Hookeovom* zakonu kao (gdje je E modul elastičnosti materijala)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \therefore \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.10)$$

Diferencijalna jednačba elastične progibne linije

Karakteristike elastične progibne linije, stanja napreznja i deformacija

Kako bi eliminirali ε iz prethodne jednačbe dobivamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sigma}{E} \cdot c \quad (2.11)$$

Za elastično ponašanje odnos između napreznja od savijanja na vrhu vlakna i momenta koji djeluje na poprečni presjek dan je kao

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot c \quad (2.12)$$

Zamjenom vrijednosti σ dane prethodnom jednačbom dobiva se **osnovna diferencijalna jednačba elastične progibne linije**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2.13)$$

Sažetak diferencijalnih jednačbi elastične progibne linije

Ključni odnosi u Bernoulli-Eulerovoj jednačbi elastične progibne linije koje je važno znati i razumjeti

- Zakrivljenost** je jednaka **nagibu profila deformacije** — Zakrivljenost (simbol φ) mjera je koliko moment savijanja deformira nosač na određenom mjestu, odnosno presjeku (intenzitet krivulje). Jedna od posljedica pretpostavke da "ravninski presjeci ostaju ravni" jest da je **profil deformacije linearan**. Nagib tog linearnog profila deformacije s obzirom na visinu poprečnog presjeka nosača jednak je zakrivljenosti nosača u toj točki.
- Radijus zakrivljenosti** obrnuto je proporcionalan zakrivljenosti — ako je elastična progibna linija u točki deformiranog nosača usklađena s kružnicom koja ima isti iznos zakrivljenosti, tada je polumjer (radijus) te kružnice polumjer zakrivljenosti nosača (simbol R).
- Zakrivljenosti** je približno jednaka drugoj derivaciji progiba y s obzirom na položaj x .
- Zakrivljenost je izravno povezana s momentom savijanja.**

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{c} \quad \therefore \quad R = \frac{1}{\varphi} \quad \therefore \quad \varphi = \frac{1}{R} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{M}{EI}$$

Sažetak diferencijalnih jednačbi elastične progibne linije

Ključni odnosi u Bernoulli-Eulerovoj jednačbi elastične progibne linije koje je važno znati i razumjeti

Pojednostavljeni prikaz veza između **zakrivljenosti** φ , **rotacije** θ (kuta zaokreta) i **progiba** y .

$$\theta(x) = \int \varphi(x) dx = \int \frac{M(x)}{E(x)I(x)} dx \quad (2.14)$$

$$y(x) = \int \theta(x) dx = \iint \frac{M(x)}{E(x)I(x)} dx^2 \quad (2.15)$$

Pojednostavljeni prikaz veza između **opterećenja** q , **poprečne sile** V i **momenta savijanja** M .

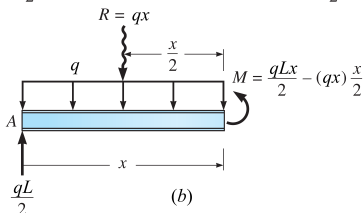
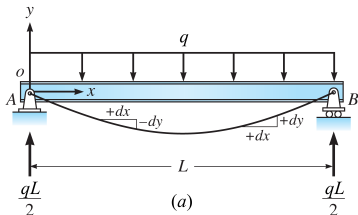
$$V(x) = \int q(x) dx \quad (2.16)$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \iint q(x) dx^2 \quad (2.17)$$

Numerički primjer #1

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača

Za zadani nosač analitičkom metodom (integriranjem jednačbe elastične progibne linije) odrediti maksimalni progib, y_{max} i kut zaokreta uz oslonac A , θ_A . Krutost EI je konstantna.



Slika 19: Slobodno oslonjena greda

Uspostavite pravokutni koordinatni sustav s ishodištem na osloncu A . Budući da se kut zaokreta povećava s povećanjem x (kut zaokreta je negativan u točki A , jednak nuli na sredini raspona i pozitivan na osloncu B), zakrivljenost je **pozitivna**.

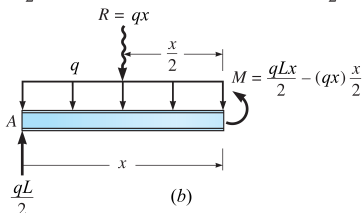
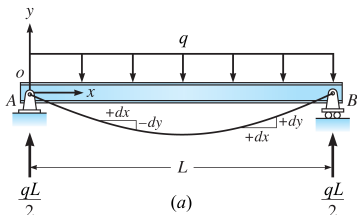
$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Iz odnosa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ zamjenimo M ,

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Numerički primjer #1

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača



Dvostrukim integriranjem jednačbe dobivamo

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI \cdot y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

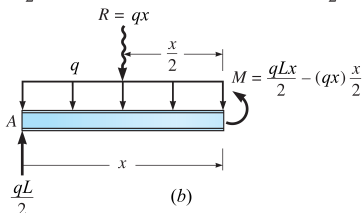
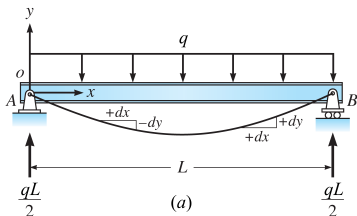
Za određivanje konstanti integracije C_1 i C_2 koristimo granične uvjete na osloncima A i B . Kod A , $x = 0$ i $y = 0$. Zamjenom tih vrijednosti u jednačbi, dobijemo da je $C_2 = 0$. Na B , $x = L$ i $y = 0$. Zamjenom ovih vrijednosti u jednačbi i rješavanjem za C_1 dobivamo

$$0 = \frac{qL^4}{12} - \frac{qL^4}{24} + C_1L$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

Numerički primjer #1

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača



Zamjenjujući C_1 i C_2 u prethodnim jednačbama i dijeljenjem istih s EI dobivamo

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$y = \frac{qLx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qL^3x}{24EI}$$

Izračun progiba na polovini raspona, $x = \frac{L}{2}$

$$y_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI} \text{ [m] } \downarrow$$

Izračun kuta zaokreta (rotacije) nosača uz oslonac A za $x = 0$

$$\theta_A = \frac{dy}{dx} = -\frac{qL^3}{24EI} \text{ [rad] } \curvearrowright$$

Rezultati su prikazani u parametarskom obliku!

Primjer algoritma u Pythonu za Numerički primjer #1

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača

Algoritam 2.1 (Python za Numerički primjer #1)

```

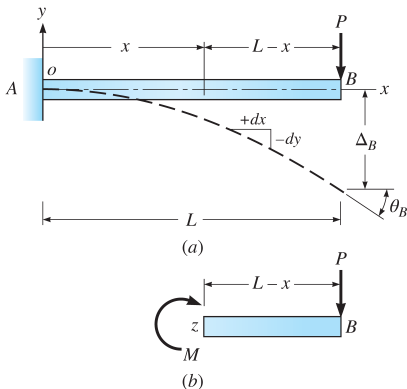
1 from sympy import * # Učitavanje Sympy modula
2 init_printing(use_latex=True) # Uredan prikaz rezultata
3
4 x, P, L, E, I, q = symbols('x P L E I q') # Definiranje simbola
5 f = Function('f')(x) # Definiranje "f" kao funkcije
6
7 M = (q*L*x)/2 - (q*x**2)/2 # Jednačba momenta savijanja
8
9 DifJedn1 = Eq(f.diff(x), M/(E*I)) # Definiraj dif. jed. 1. reda
10 DifJedn2 = Eq(f.diff(x, x), M/(E*I)) # Definiraj dif. jed. 2. reda
11
12 display(DifJedn1) # Prikazuje  $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{Lq}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right)$ 
13
14 display(DifJedn2) # Prikazuje  $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{Lq}{2} - qx \right)$ 
15
16 theta = display(dsolve(DifJedn1, f)) # Prikazuje  $f(x) = C_1 + \frac{Lqx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI}$ 
17
18 y = display(dsolve(DifJedn2, f)) # Prikazuje  $f(x) = C_1 + C_2x + \frac{Lqx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI}$ 

```

Numerički primjer #2

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača

Za zadani nosač analitičkom metodom (integriranjem jednačbe elastične progibne linije) odrediti progib i kut zaokreta u točki B , Δ_B i θ_B . Krutost EI je konstantna.



Slika 20: Konzolni nosač

Budući je kut zaokreta negativan i postaje izraženiji u pozitivnom smjeru x , zakrivljenost je **negativna**.

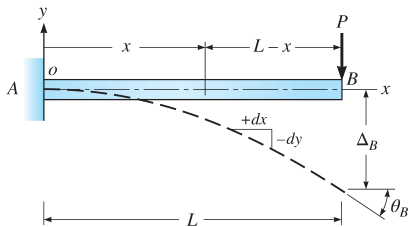
$$M = -P(L - x)$$

Iz odnosa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ zamjenimo M ,

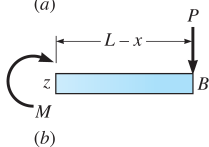
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P(L - x)}{EI}$$

Numerički primjer #2

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača



(a)



(b)

Dvostrukim integriranjem jednačbe dobivamo izraze za kut zaokreta i progib

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{PLx}{EI} + \frac{Px^2}{2EI} + C_1$$

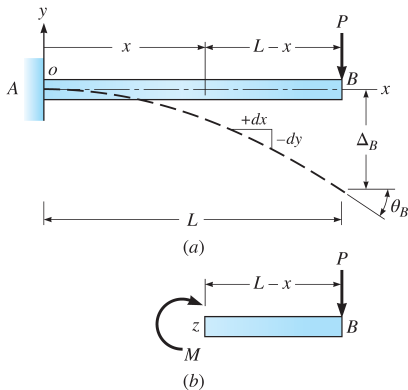
$$y = -\frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + C_1x + C_2$$

Za određivanje konstanti integracije C_1 i C_2 u jednačbama koristimo se graničnim uvjetima koje definira upeti oslonac A:

- 1 za $x = 0$, $y = 0$ tada je $C_2 = 0$
- 2 za $x = 0$, $\theta = 0$ tada je $C_1 = 0$

Numerički primjer #2

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača



Konačne jednačbe su

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{PLx}{EI} + \frac{Px^2}{2EI}$$

$$y = -\frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI}$$

Da bismo uspostavili vrijednosti θ_B i Δ_B , u jednačbi zamjenjujemo $x = L$ za izračunavanje

Rezultati prikazani u **parametarskom obliku**.

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI} \text{ [rad]} \curvearrowright$$

$$\Delta_B = -\frac{PL^3}{3EI} \text{ [m]} \downarrow$$

Primjer algoritma u Pythonu za Numerički primjer #2

Direktno rješavanje diferencijalne jednačbe elastične progibne linije nosača

Algoritam 2.2 (Python za Numerički primjer #2)

```

1 from sympy import * # Učitavanje Sympy modula
2 init_printing(use_latex=True) # Uredan prikaz rezultata
3
4 x, P, L, E, I, q = symbols('x P L E I q') # Definiranje simbola
5 f = Function('f')(x) # Definiranje "f" kao funkcije
6
7 M = -P*(L-x) # Jednačba momenta savijanja
8
9 DifJedn1 = Eq(f.diff(x), M/(E*I)) # Definiraj dif. jed. 1. reda
10 DifJedn2 = Eq(f.diff(x, x), M/(E*I)) # Definiraj dif. jed. 2. reda
11
12 display(DifJedn1) # Prikazuje  $\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{P(L-x)}{EI}$ 
13
14 display(DifJedn2) # Prikazuje  $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -\frac{P(L-x)}{EI}$ 
15
16 theta = display(dsolve(DifJedn1, f)) # Prikazuje  $f(x) = C_1 - \frac{LPx}{EI} + \frac{Px^2}{2EI}$ 
17
18 y = display(dsolve(DifJedn2, f)) # Prikazuje  $f(x) = C_1 + C_2x - \frac{LPx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI}$ 

```

Struktura prezentacije

- 1 Uvod, ciljevi i sadržaj**
 - Tri stupa analize konstrukcija
 - Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
 - Principi superpozicije
 - Crtanje elastične progibne linije
- 2 Diferencijalne jednačbe**
 - Numerički primjeri #1
- 3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti**
 - Numerički primjeri #2
- 4 Fiktivni (konjugirani) nosač**
 - Numerički primjeri #3
- 5 Zaključci**

Teoremi dijagrama zakrivljenosti

Metoda koja zahtjeva preciznu skicu elastične progibne linije nosača **koristi dva teorema**.

- ➊ **Prvi teorem** izračunava **promjenu rotacije**, $\Delta\theta_{AB}$ (**kuta zaokreta**) između **dvije točke** na elastičnoj progibnoj liniji.
- ➋ **Drugi teorem** izračunava **vertikalnu udaljenost**, t_{BA} (**tangencijalnu devijaciju**) između točke na elastičnoj progibnoj liniji i tangente progibne linije druge točke.

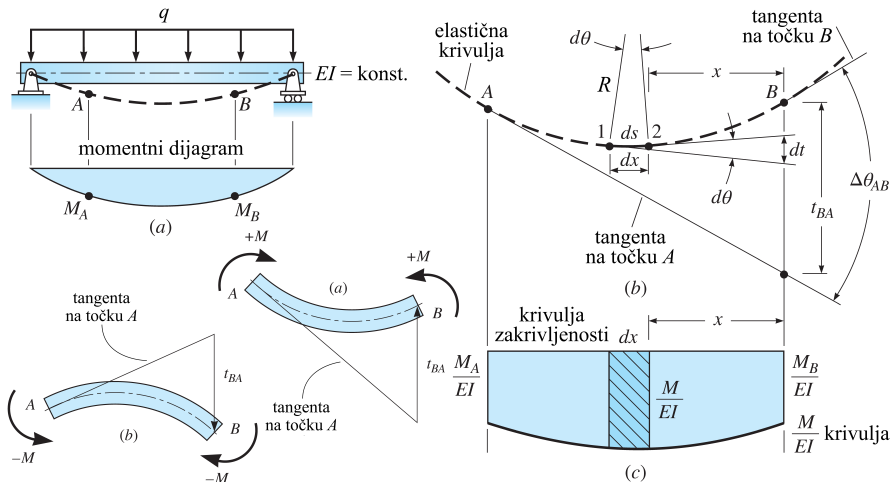
Metoda primjenjiva samo za slučaj s **kontinuiranim progibnim linijama između dvije točke** (prekidi, zglobovi).

Potrebno je znati jednu točku za koju je **poznata rotacija tangente na progibnu liniju**, θ (kut zaokreta odnosno nagib progibne linije).

Strategija, odnosno postavljanje jednadžbi za teoreme dijagrama zakrivljenosti mogu se grubo svrstati u **tri kategorije**:

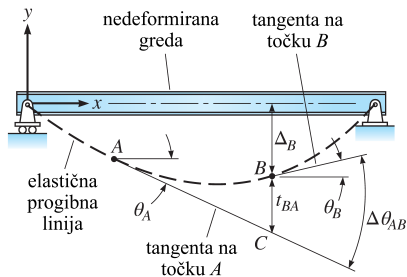
- Konzolni nosači
- Konstrukcije s vertikalnom osi simetrije koje su opterećene simetrično
- Konstrukcije koje sadrže element čiji se krajevi ne pomiču u smjeru *normalnom* na izvorni položaj uzdužne osi tog elementa

Teoremi dijagrama zakrivljenosti



Slika 21: Promjena kuta zaokreta i tangencijalna devijacija između točaka A i B

Teoremi dijagrama zakrivljenosti



Slika 22: Promjena kuta zaokreta, $\Delta\theta_{AB}$, i tangencijalna devijacija, t_{BA} , između točaka A i B

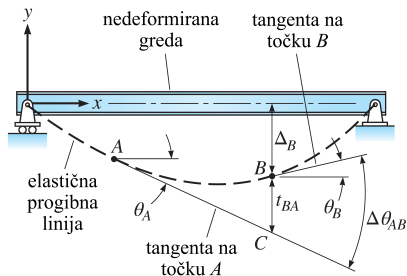
Da bismo utvrdili ukupnu promjenu kuta $\Delta\theta_{AB}$, moramo zbrojiti $d\theta$ inkremente za sve segmente duljine ds između točaka A i B integracijom.

$$\Delta\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (3.1)$$

Teorem #1:

Promjena kuta zaokreta, θ , bilo koje dvije točke na glatkoj kontinuiranoj elastičnoj progibnoj liniji jednaka je površini ispod M/EI krivulje između tih točaka.

Teoremi dijagrama zakrivljenosti



Slika 23: Promjena kuta zaokreta, $\Delta\theta_{AB}$, i tangencijalna devijacija, t_{BA} , između točaka A i B

Da bismo utvrdili tangencijalno odstupanje t_{BA} , moramo zbrojiti dt integriranjem doprinosa svih beskonačno malih segmenata između točaka A i B .

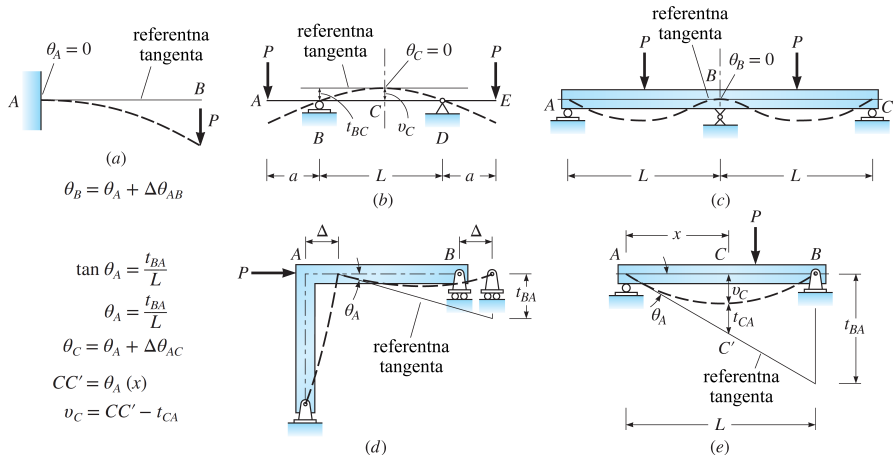
$$dt = d\theta \cdot x \quad (3.2)$$

$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{M}{EI} \cdot x dx \quad (3.3)$$

Teorem #2:

Tangencijalno odstupanje, t_{BA} u točki B na glatkoj kontinuiranoj elastičnoj progibnoj liniji od tangente povučene na elastičnu liniju u drugoj točki A jednako je **momentu oko B površine ispod dijagrama M/EI između dviju točaka.**

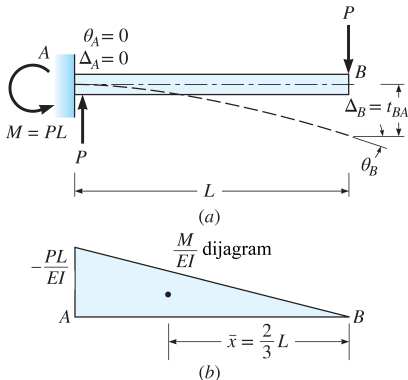
Teoremi dijagrama zakrivljenosti



Slika 24: Primjeri nosača s naznačenim tangencijalnim devijacijama i rotacijama čvorova

Numerički primjer #3

Za zadani nosač grafoanalitičkom metodom (teoremi dijagrama zakrivljenosti) odrediti progib i kut zaokreta u točki B , Δ_B i θ_B . Krutost EI je konstantna.



Slika 25: Konzolni nosač

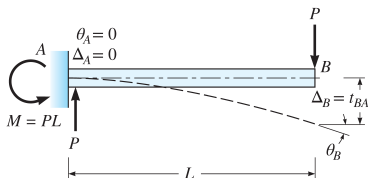
Nacrtajte momentni dijagram i podijeli njegove iznose s krutosti poprečnog presjeka na savijanje, EI , kako bi dobili dijagram zakrivljenosti, M/EI .

Izračunaj θ_B dodajući kut zaokreta u točki A i promjenu kuta zaokreta Δ_{AB} između točaka A i B . Za upeti oslonac kut zaokreta (rotacija) je $\theta_A = 0$.

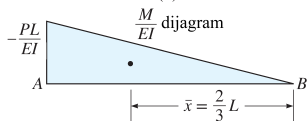
$$\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{AB} = \Delta\theta_{AB}$$

Prema prvom teoremu o površini dijagrama zakrivljenosti, $\Delta\theta_{AB}$ jednak je površini ispod dijagrama M/EI između točaka A i B .

Numerički primjer #3



(a)



(b)

$$\Delta\theta_{AB} = \frac{1}{2}(L) \left(-\frac{PL}{EI} \right) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

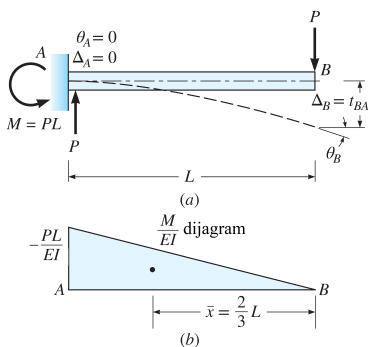
Uvrstimo li drugu jednačbu u prvu dobivamo

Rezultat prikazan u parametarskom obliku.

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI} \text{ [rad]} \curvearrowright$$

Budući da se tangenta na B spušta udesno, njezin nagib je **negativan**. U ovom je slučaju negativna ordinata dijagrama M/EI dala točan predznak kuta zaokreta (rotacije). U većini problema smjer nagiba vidljiv je iz skice elastične progibne linije. Izračun progiba Δ_B kraja konzole koristeći drugi teorem o površini dijagrama zakrivljenosti.

Numerički primjer #3



Oznaka $\Delta_B = t_{BA}$ je ukupno tangencijalno odstupanje, odnosno moment površine M/EI dijagrama oko točke B .

$$\Delta_B = \frac{1}{2}L \left(-\frac{PL}{EI} \right) \frac{2}{3}L$$

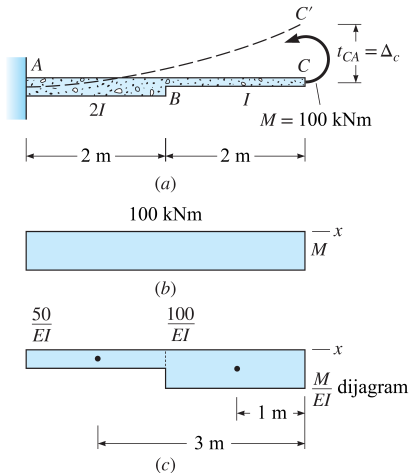
Rezultat prikazan u parametarskom obliku.

$$\Delta_B = -\frac{PL^3}{3EI} \text{ [m]} \downarrow$$

Predznak minus označava da se tangenta nalazi iznad elastične progibne linije, odnosno da je progib ostvaren prema dolje.

Numerički primjer #4

Za zadani nosač grafoanalitičkom metodom (teoremi dijagrama zakrivljenosti) odrediti progib u točki C , Δ_C ako je modul elastičnosti $E = 30 \text{ GPa}$. Momenti inercije su $I_{AB} = 2I$ i $I_{BC} = I$, gdje je $I = 45\,000 \text{ cm}^4$.



Slika 26: Konzolni nosač

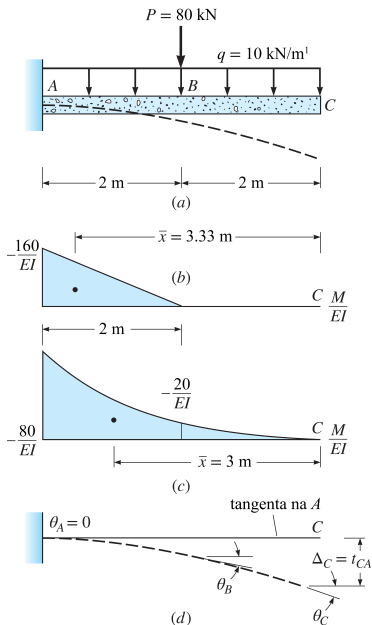
Da bi se dobila M/EI dijagram, ordinate momentnog dijagrama dijele se s odgovarajućim momentima tromosti. Budući da je I_{AB} dvostruko veći od I_{BC} , ordinate M/EI dijagrama između A i B biti će upola manje od onih između B i C . Budući da je progib točke C , označen kao Δ_C , jednak t_{CA} , izračunavamo moment površine M/EI dijagrama oko točke C .

$$\Delta_C = t_{CA} = \frac{100}{2EI}(2)(3) + \frac{100}{EI}(2)(1) = \frac{500}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{500}{(3 \cdot 10^7)(45\,000 \cdot 10^{-8})} \cdot 10^2$$

$$\Delta_C = 3.70 \text{ cm} \uparrow$$

Numerički primjer #5



Za zadani nosač grafoanalitičkom metodom odredite kut zaokreta u točkama B i C te progib u točki C . Krutost EI je konstantna.

Dijagrami M/EI crtani su posebno za distribuirano, q i koncentrirano opterećenje, P budući vrijedi princip superpozicije. Izračunajte kut zaokreta na C gdje je $\Delta\theta_{AC}$ definiran zbrojem površina M/EI oba dijagrama, pri čemu je poznato $\theta_A = 0$.

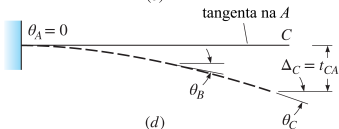
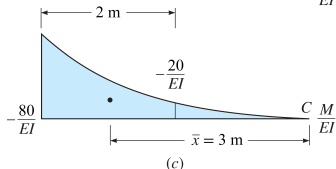
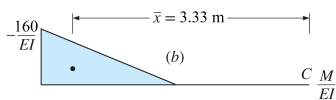
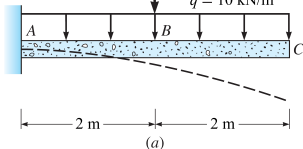
$$\begin{aligned}\theta_C &= \theta_A + \Delta\theta_{AC} \\ &= 0 + \frac{1}{2}(2) \left(-\frac{160}{EI}\right) + \frac{1}{3}(4) \left(-\frac{80}{EI}\right)\end{aligned}$$

$$\theta_C = -\frac{266.66}{EI} \text{ rad} \curvearrowright$$

Numerički primjer #5

$$P = 80 \text{ kN}$$

$$q = 10 \text{ kN/m}^1$$



Izračunajte rotaciju θ_B čvora B analiziranjem područja zakrivljenosti između B i C .

$$\begin{aligned}\theta_B &= \theta_C + \Delta\theta_{BC} \\ &= -\frac{266.66}{EI} + \frac{1}{3}(2) \left(\frac{20}{EI} \right)\end{aligned}$$

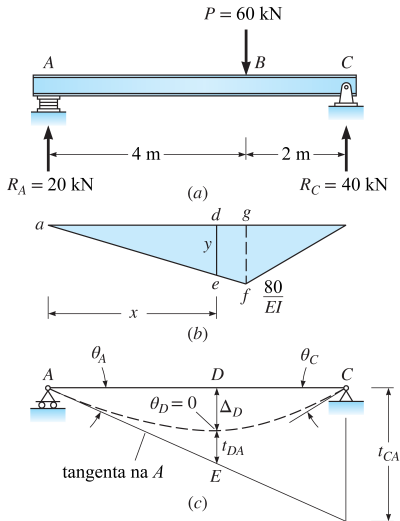
$$\theta_B = -\frac{253.33}{EI} \text{ rad} \curvearrowright$$

Izračunajte progib Δ_C točke C koji je jednak tangencijalnom devijacijom t_{CA} točke C od tangente na progibnu liniju u točki A .

$$\Delta_C = \frac{1}{2}(2) \left(-\frac{160}{EI} \right) (3.33) + \frac{1}{3}(4) \left(-\frac{80}{EI} \right) \quad (3)$$

$$\Delta_C = t_{CA} = -\frac{852.8}{EI} \text{ m} \downarrow$$

Numerički primjer #6



Slika 27: Slobodno oslonjena greda

Za zadani čelični nosač grafoanalitičkom metodom odredite kut zaokreta u točkama A i C . Krutost EI je konstantna.

Izračunajte kut zaokreta θ_A na osloncu A crtanjem tangente na elastičnu progibnu krivulju u toj točki.

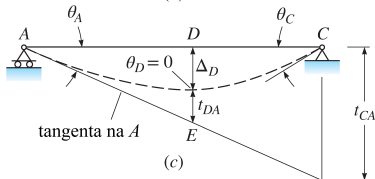
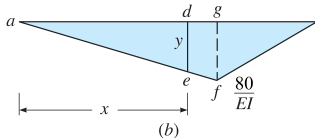
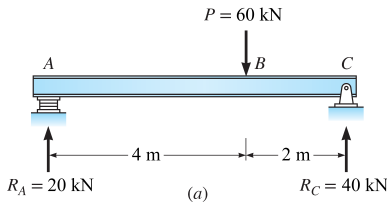
$$\tan \theta_A = \frac{t_{CA}}{L}$$

Budući za male kutove možemo pisati $\tan \theta_A \approx \theta_A$ vrijedi

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L}$$

$$t_{CA} = \frac{1}{2}(6) \left(\frac{80}{EI} \right) \underbrace{\left(\frac{6+2}{3} \right)}_{\text{formule!}} = \frac{640}{EI}$$

Numerički primjer #6



$$\theta_A = -\frac{640/EI}{6} = -\frac{106.67}{EI} \text{ rad} \curvearrowright$$

Dodaje se znak **minus** jer je kut zaokreta u točki **A negativan**.

Izračunamo θ_C

$$\theta_C = \theta_A + \Delta\theta_{AC}$$

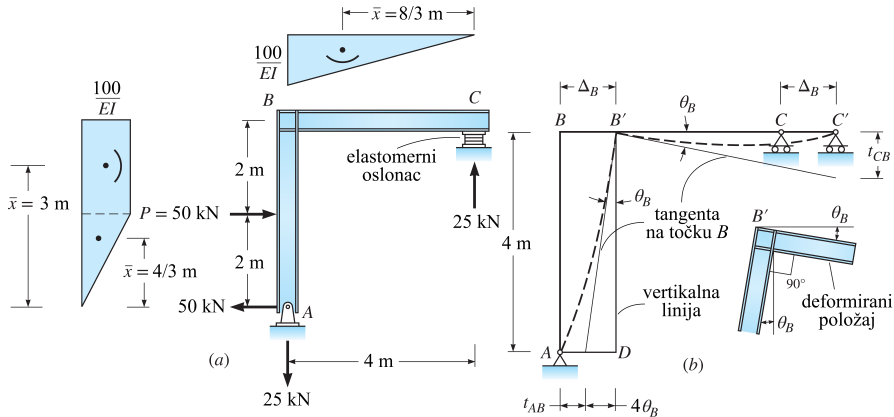
gdje je $\Delta\theta_{AC}$ jednako površini ispod M/EI dijagrama između A i C .

$$\theta_C = \underbrace{-\frac{106.67}{EI}}_{\theta_A} + \frac{1}{2}(6) \left(\frac{80}{EI} \right)$$

$$\theta_C = \frac{133.33}{EI} \text{ rad} \curvearrowright$$

Numerički primjer #7

Izračunajte horizontalni pomak čvora B okvira prikazanog na slici. Krutost EI je konstanta svih elemenata. Pretpostavimo da elastomerni oslonac djeluje kao klizni oslonac.



Slika 28: Okvirni nosač

Numerički primjer #7

Uspostavimo kut zaokreta nosača na čvoru B .

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L} \quad \therefore \quad t_{CB} = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{EI} \right) (4) \left(\frac{2}{3} 4 \right) = \frac{533.33}{EI} \text{ m}$$

$$\theta_B = \frac{533.33/EI}{4} = \frac{133.33}{EI} \text{ rad} \curvearrowright$$

Budući da je čvor B krut, vrh stupa AB također se zaokreće za kut θ_B . Budući da je horizontalni pomak Δ_B na čvoru B jednak horizontalnoj udaljenosti AD u podnožju stupa, možemo zapisati

$$\begin{aligned} \Delta_B = AD &= t_{AB} + 4\theta_B \\ &= \frac{100}{EI} (2)(3) + \frac{1}{2} \left(\frac{100}{EI} \right) (2) \left(\frac{2}{3} 2 \right) + (4) \left(\frac{133.33}{EI} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta_B = \frac{1266.66}{EI} \text{ m} \rightarrow$$

gdje je t_{AB} jednak momentu M/EI dijagrama između točaka A i B na točku A .

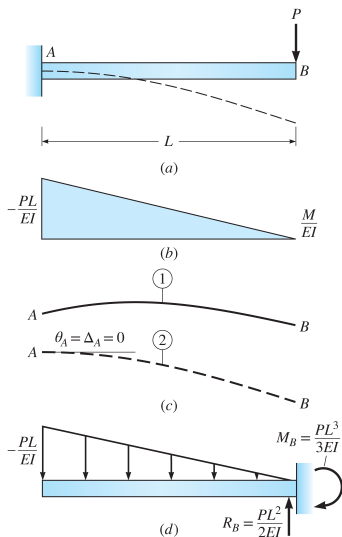
Struktura prezentacije

- 1 Uvod, ciljevi i sadržaj**
 - Tri stupa analize konstrukcija
 - Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
 - Principi superpozicije
 - Crtanje elastične progibne linije
- 2 Diferencijalne jednačbe**
 - Numerički primjeri #1
- 3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti**
 - Numerički primjeri #2
- 4 Fiktivni (konjugirani) nosač**
 - Numerički primjeri #3
- 5 Zaključci**

Fiktivni (konjugirani/analogni) nosač

Za izračun progiba ili kuta zaokreta na bilo kojoj vrsti grede metodom fiktivnog (konjugiranog) nosača postupamo na sljedeći način:

- 1 Utvrdite momentni dijagram M za stvarni nosač.
- 2 Kreirajte M/EI dijagram zakrivljenosti dijeljenjem svih ordinata momentnog dijagrama s krutosti EI . Varijacija E ili I može se uzeti u obzir u ovom koraku.
- 3 Definirajte fiktivni (konjugirani/analogni) nosač zamjenom stvarnih oslonaca ili zglobova odgovarajućim fiktivnim nosačima prikazanim u nastavku.
- 4 Primijenite M/EI dijagram na fiktivnom (konjugiranom) nosaču **kao opterećenje** i izračunajte dijagrame poprečnih sila, $V \Rightarrow \theta$ i momenata savijanja, $M \Rightarrow y$ u onim točkama u kojima je potreban iznos rotacije θ ili progiba y .



Slika 29: Princip fiktivnog (konjugiranog/analognog) nosača

Ideja fiktivnih (konjugiranih/analognih) nosača i diferencijalnih jednačbi

Ključni odnosi u Bernoulli-Eulerovoj jednačbi elastične progibne linije koje je važno znati i razumjeti

Pojednostavljeni prikaz veza između **zakrivljenosti** φ , **rotacije** θ (kuta zaokreta) i **progiba** y .

$$\theta(x) = \int \varphi(x) dx = \int \frac{M(x)}{E(x)I(x)} dx \quad (4.1)$$

$$y(x) = \int \theta(x) dx = \iint \frac{M(x)}{E(x)I(x)} dx^2 \quad (4.2)$$

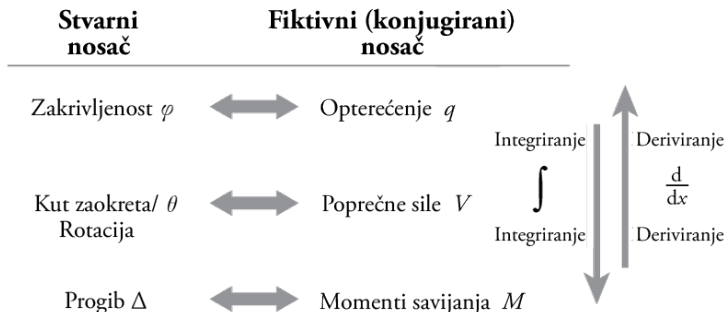
Pojednostavljeni prikaz veza između **opterećenja** q , **poprečne sile** V i **momenta savijanja** M .

$$V(x) = \int q(x) dx \quad (4.3)$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \iint q(x) dx^2 \quad (4.4)$$




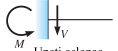






Ideja fiktivnih (konjugiranih/analognih) nosača i diferencijalnih jednačbi

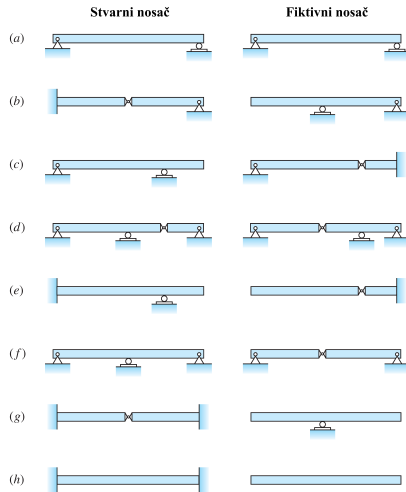
Ključni odnosi u Bernoulli-Eulerovoj jednačbi elastične progibne linije koje je važno znati i razumjeti



Slika 30: Veze između stvarnog i fiktivnog nosača

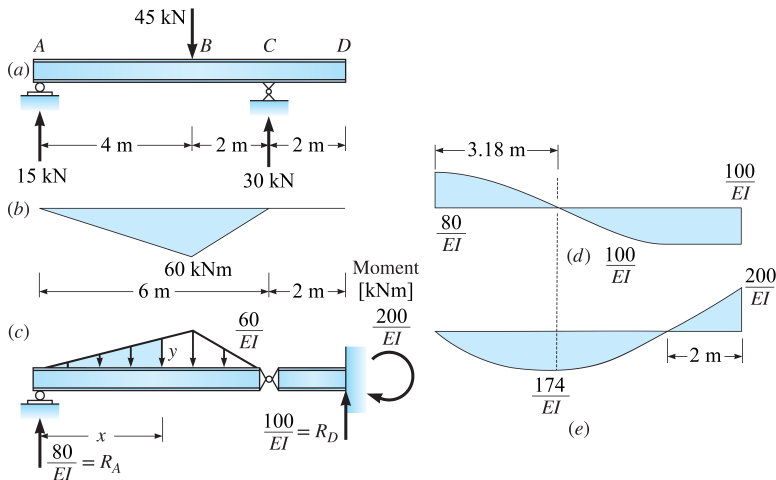
Definiranje fiktivnog (konjugiranog/analognog) nosača

	Stvarni oslonac	Fiktivni oslonac
(a)	 <p>Pomični ili nepomični $\Delta = 0$ $\theta \neq 0$</p>	 <p>Pomični ili nepomični $M = 0$ $V \neq 0$</p>
(b)	 <p>Slobodni kraj $\Delta \neq 0$ $\theta \neq 0$</p>	 <p>Upeti oslonac $M \neq 0$ $V \neq 0$</p>
(c)	 <p>Upeti oslonac $\Delta = 0$ $\theta = 0$</p>	 <p>Slobodni kraj $M = 0$ $V = 0$</p>
(d)	 <p>Unutarnji oslonac $\Delta = 0$ $\theta_L = \theta_R \neq 0$</p>	 <p>Zglob $M = 0$ $V_L = V_R \neq 0$</p>
(e)	 <p>Zglob $\Delta \neq 0$ θ_L i θ_R mogu imati različite vrijednosti</p>	 <p>Unutarnji oslonac $M \neq 0$ V_L i V_R mogu imati različite vrijednosti</p>



Numerički primjer #8

Za gredu na slici koristite metodu fiktivne (konjugirane/analogne) grede da biste odredili maksimalnu vrijednost progiba, Δ_{max} , između oslonaca A i C te na slobodnom kraju konzole, Δ_D . Krutost EI je konstanta.



Slika 31: Greda s prepustom

Numerički primjer #8

$$\begin{aligned} \curvearrowright + \sum M_{z_{\text{glob}}}^L &= 0 \\ -6R_A + \frac{120(10/3)}{EI} + \frac{60(4/3)}{EI} &= 0 \\ R_A &= \frac{1}{EI} \frac{480}{6} = \frac{80}{EI} \uparrow \\ \uparrow + \sum F_y &= 0 \\ \frac{120}{EI} + \frac{60}{EI} - \frac{80}{EI} - R_D &= 0 \\ R_D &= \frac{100}{EI} \uparrow \end{aligned}$$

Nacrtajte dijagram poprečnih sila i momenata savijanja. Moment u točki D (jednak je površini ispod dijagrama poprečnih sila između C i D) je

$$M_D = \frac{100}{EI}(2) = \frac{200}{EI} \text{ kNm } \curvearrowright$$

Numerički primjer #8

Pronađite točku gdje je poprečna sila jednaka nuli da biste utvrdili mjesto maksimalnog progiba određivanjem površine ispod dijagrama opterećenja potrebnog za uravnoteženje R_A .

$$\frac{1}{2}xy = \frac{80}{EI}$$

Iz sličnosti trokuta možemo napisati

$$\frac{y}{\frac{60}{EI}} = \frac{x}{4} \quad \text{i} \quad y = \frac{15}{EI}x \quad \therefore \quad x = \sqrt{\frac{80}{7.5}} = 3.27 \text{ m}$$

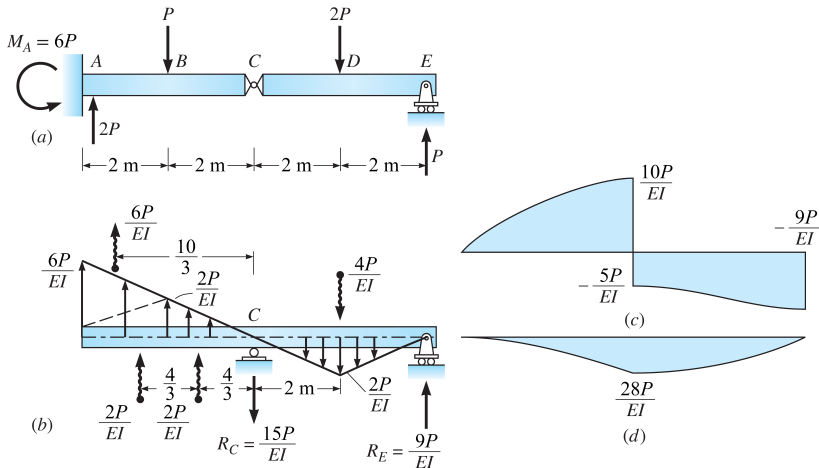
Izračunajte maksimalnu vrijednost momenta na sada poznatoj lokaciji $x = 3.27$ m. Budući da je krivulja dijagrama poprečnih sila parabolična desno od oslonca A , njena površina je $= \frac{2}{3}bh$.

$$\Delta_{max} = M_{max} = \frac{2}{3}(3.27) \left(\frac{80}{EI} \right) = \frac{174.4}{EI} \text{ m} \downarrow$$

$$\Delta_D = M_D = \frac{200}{EI} \text{ m} \uparrow$$

Numerički primjer #9

Odredite maksimalni proгиб, Δ_{max} , Gerberovog nosača na slici koristeći metodu fiktivne (konjugirane/analogne) grede. Krutost EI je konstanta.



Slika 32: Gerberov nosač

Numerički primjer #9

Ordinate momentnog dijagrama nastale koncentriranim opterećenjima koja djeluju na stvarni Gerberov nosač podijeljene su s krutosti EI i primijenjene kao raspodijeljeno opterećenje na fiktivnu (konjugiranu) gredu. Zbog jednostavnijeg proračuna dijelimo raspodijeljeno opterećenje na trokutasta područja i izračunavamo rezultante (posebne strelice) svakog područja. Izračun reakcije R_E .

$$\curvearrowright + \sum M_C = 0$$

$$-\frac{4P}{EI}(2) - \frac{2P}{EI}\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{2P}{EI}\left(2\frac{4}{3}\right) - \frac{6P}{EI}\left(\frac{10}{3}\right) + 4R_E = 0 \quad \therefore R_E = \frac{9P}{EI} \uparrow$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$\frac{6P}{EI} + 2\frac{2P}{EI} - \frac{4P}{EI} + \frac{9P}{EI} - R_E = 0 \quad \therefore R_C = \frac{15P}{EI} \downarrow$$

Da bismo utvrdili varijaciju kuta zaokreta i progiba duž osi grede, konstruiramo dijagrame poprečnih sila i momenata savijanja za fiktivnu (konjugiranu) gredu. Maksimalni progib koji se javlja u točki C (mjesto stvarnog zgloba) jednak je $\Delta_{max} = 28P/EI$. Ova se vrijednost utvrđuje izračunom momenta koji stvaraju sile koje djeluju na fiktivnoj gredi lijevo od presjeka kroz točku C .

Struktura prezentacije

- 1 Uvod, ciljevi i sadržaj**
 - Tri stupa analize konstrukcija
 - Karakteristike veza i diferencijalnih odnosa
 - Principi superpozicije
 - Crtanje elastične progibne linije
- 2 Diferencijalne jednačbe**
 - Numerički primjeri #1
- 3 Teoremi dijagrama zakrivljenosti**
 - Numerički primjeri #2
- 4 Fiktivni (konjugirani) nosač**
 - Numerički primjeri #3
- 5 Zaključci**

Zaključci poglavlja

Pregled najvažnijih aspekata i zaključaka ovog poglavlja

- Da bismo uspostavili jednačbe progiba i kuta zaokreta elastične progibne linije, započinjemo **integriranjem diferencijalne jednačbe elastične progibne linije**, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, ali ova metoda postaje nezgrapna kada se opterećenja značajnije razlikuju.
- Dalje razmatramo **teoreme dijagrama zakrivljenosti**, koja koristi M/EI dijagram za izračunavanje progiba i kuta zaokreta u odabranim točkama duž osi nosača. Ova metoda zahtijeva točnu skicu deformiranog oblika grede, odnosno elastičnu progibnu liniju nosača.
- **Metoda fiktivne (konjugirane/analogne) grede**, primjenjuje se na nosačima s različitim rubnim uvjetima. Ova metoda zahtijeva da se stvarni nosači zamijene fiktivnim nosačima kako bi se nametnuli granični uvjeti koji osiguravaju da vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja u fiktivnog gredi, opterećene dijagramom M/EI , odgovaraju progibu i kutu zaokreta u svakoj točki stvarnog nosača.



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek

Hvala na pažnji!

Pitanja?

Marin Grubišić

Dr. sc. / mag. ing. aedif.

Sveučilište u Osijeku (UNIOS)

Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek (GrAFOS)

Zavod za tehničku mehaniku (ZTM)

Katedra/Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku

Vladimira Preloga 3, **Ured II.26**, HR-31 000 Osijek, Hrvatska

marin.grubisic@gfos.hr

Structural &
Earthquake Engineering