IZVIJANJE TLAČNIH ŠTAPOVA

IZVIJANJE STUPOVA

Stabilnost stupova

- Pretpostavke klasične teorije kritične sile uzdužnih štapova:
  - *štap je početno ravan, vitak, punog poprečnog presjeka s konstantnom krutosti na savijanje **EI** duž njegove osi;*
  - *uzdužna tlačna sila djeluje duž težišne osi štapa;*
  - *materijal štapa je homogen, izotropan i idealno elastičan;*
  - *vrijedi teorija malih progiba pri savijanju.*

- **Eulerov stup**
  - *idealizirani štap, obostrano zglobno oslonjen izložen djelovanju uzdužne tlačne sile.*

- **Eulerova kritična sila P_e .**

Eulerova teorija vitkih štapova

- Povećanjem uzdužne tlačne sile koja djeluje na krajevima dugog vitkog štapa, za određenu veličinu sile doći će do naglog izvijanja (izbočavanja) u nekom smjeru koji nije unaprijed određen.
- Stvarno stanje: asimetrija uslijed geometrijske ili materijalne imperfekcije štapa i pripadajućeg opterećenja.
- Pretpostavka o idealiziranom stanju: idealno pravolinijski štap s idealno centričnom tlačnom silom (ne može doći do izvijanja samo od tlačnog naprezanja → precizno definiranje izvijanja).

  - uslijed tlačne sile P, dolazi do skraćivanja štapa bez obzira na veličinu sile P;

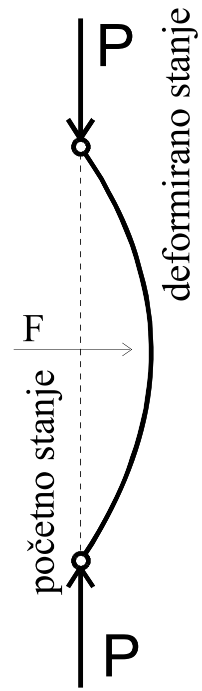
  - kada uslijed sile P naprezanja prekorače granicu popuštanja, dolazi do sloma materijala.
- Ako se štap deformira za neku infinitezimalnu veličinu pomaka

  uslijed poprečne sile F:

  - **$P<P_{CR}$** (uklanjanje sile F rezultira povratkom štapa u početno stanje)
  STABILNA RAVNOTEŽA

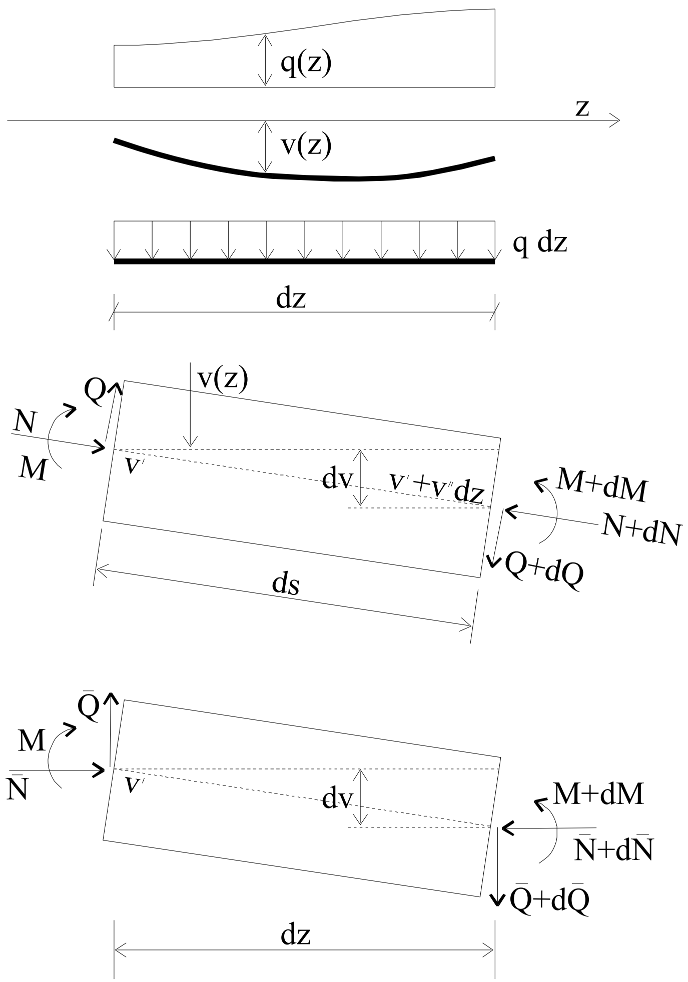
  - **$P=P_{CR}$** (pomaci ne iščezavaju i štap ostaje u bilo kojem deformiranom položaju dok su pomaci dovoljno mali)
  NEUTRALNA RAVNOTEŽA

  - **$P>P_{CR}$** (poprečni pomaci rastu i štap postaje nestabilan).



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Diferencijalna jednadžba savijanja



$$\sum M:$$

$$dM - \overline{Q}dz - \overline{N}dv + qdz\left(\chi_q dz\right) = 0$$

$$M' = \overline{Q} + \overline{N} \cdot v'$$

$$\sum V:$$

$$\overline{Q'}(z) = -q(z)$$

$$M'' = \overline{N} \cdot v'' - q$$

$$Bernoulli:$$

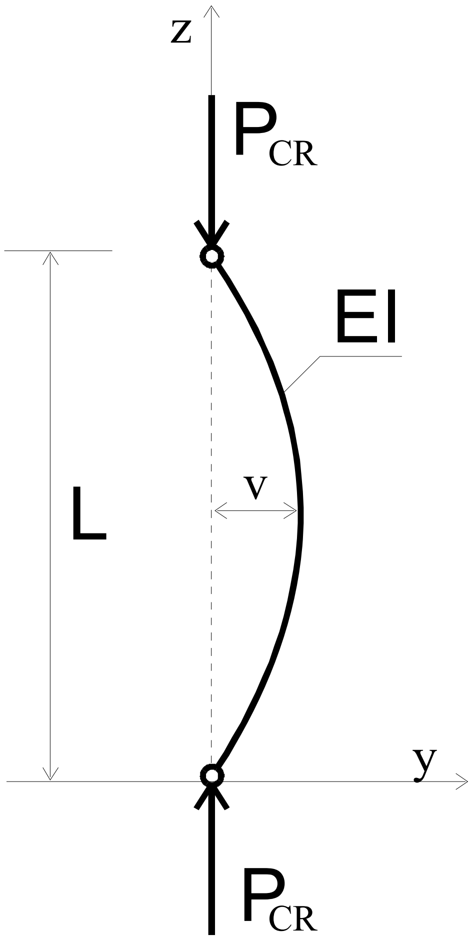
$$M = -EI / R \approx -EI / v''$$

$$\left(EI \cdot v''\right)'' + \overline{N} \cdot v'' = q$$

$$EI \cdot v'''' + P \cdot v'' = q$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE OBOSTRANO ZGLOBNO OSLONJENOG ŠTAPA



$$M = P_{CR} v$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P_{CR}}{EI} v$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI} v = 0$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

rubni uvjeti: $v(z=0)=0, v(z=L)=0$

$$\sin \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n\pi, \quad n = 1,2,3...$$

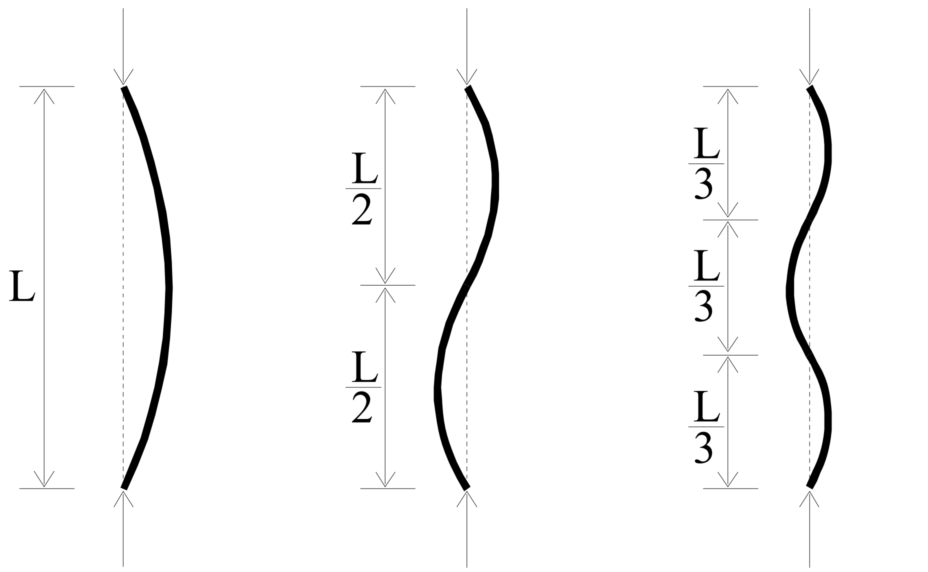
$$P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE OBOSTRANO ZGLOBNO OSLONJENOG ŠTAPA

Minimalna kritična sila : za n=1.

Viši oblici izvijanja mogu nastati uz poprečno pridržanje u točkama infleksije.



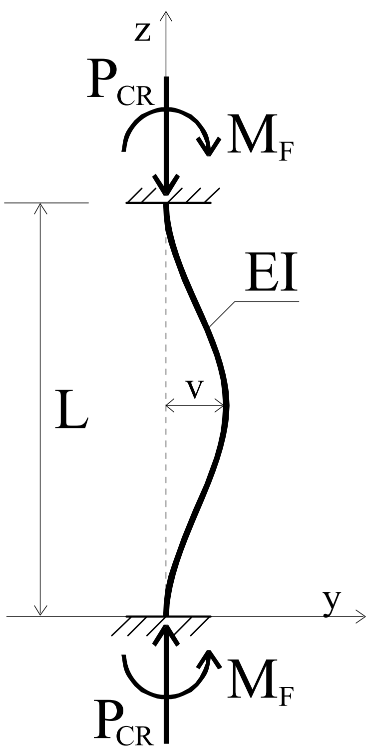
$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{CR} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE OBOSTRANO UPETOG ŠTAPA



$$M = P_{CR} v - M_F$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{P_{CR}}{EI} v + \frac{M_F}{EI}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI} v = \frac{M_F}{EI}$$

rješenje dif.jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + \frac{M_F}{P_{CR}}$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

rubni uvjeti: $v(z=0)=0, v(z=L)=0$

$$C_1 = -\frac{M_F}{P_{CR}}, \qquad C_2 = -\frac{M_F}{P_{CR}} \frac{(1-\cos \alpha L)}{\sin \alpha L}$$

$$v = -\frac{M_F}{P_{CR}} \left(\cos \alpha z + \frac{1-\cos \alpha L}{\sin \alpha L} \sin \alpha z - 1 \right)$$

rubni uvjet: $\frac{dv}{dz} = 0, \quad$ *za* $z = L$:

$$1 - \cos \alpha L = 0$$

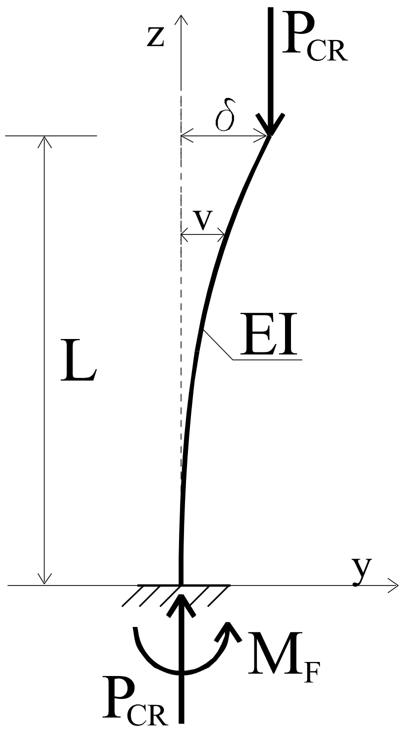
$$\cos \alpha L = 1$$

$$\alpha L = n\pi, \quad n = 0,2,4...$$

$$\boxed{\min P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE KONZOLNOG ŠTAPA



$$M = -P_{CR}(\delta - v)$$

ili

$$M = P_{CR} v - M_F$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{P_{CR}}{EI}(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI} v = \frac{P_{CR}}{EI}\delta$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z + \delta$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

rubni uvjeti: $v(z=0) = 0, v(z=L) = \delta$

$$C_1 = -\delta, \qquad C_2 = \delta\frac{\cos\alpha L}{\sin\alpha L}$$

$$v = -\delta\left(\cos\alpha z - \frac{\cos\alpha L}{\sin\alpha L}\sin\alpha z - 1\right)$$

rubni uvjet: $\frac{dv}{dz} = 0, \quad$ *za* $z = 0$:

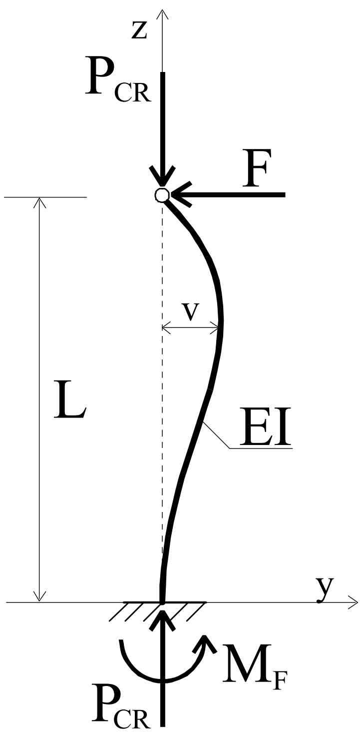
$$\cos\alpha L = 0$$

$$\alpha L = n\frac{\pi}{2}, \quad n = 1,3,5\ldots$$

$$\min P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE ŠTAPA UPETOG S JEDNE I ZGLOBNO OSLONJENOG S DRUGE STRANE



$$M = P_{CR} v + F(L-z)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{P_{CR}}{EI} v - F(L-z)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI} v = -\frac{F}{EI}(L-z)$$

$$rješenje\ \ dif.jed.:$$

$$v = C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z - \frac{F}{P_{CR}}(L-z)$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

$$rubni\ \ uvjeti: \frac{dv}{dz}(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}}$$

$$v(z=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}} tg\alpha L$$

$$v = \frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}}\left(tg\alpha L \cdot \cos\alpha z - \sin\alpha z - \alpha(L-z)\right)$$

$$rubni\ \ uvjet: v(z=0) = 0:$$

$$\alpha L = tg\alpha L$$

$$\alpha L \approx 4{,}49$$

$$\min P_{CR} = \frac{20{,}2 EI}{L^2} = \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

EKVIVALENTNA DULJINA ŠTAPA

Usporedbom prethodno izvedenih rješenja kritične sile za četiri osnovna slučaja rubnih uvjeta, općeniti je zapis kritične sile oblika:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$K = \sqrt{\frac{P_e}{P_{cr}}}$$

gdje je K

ekvivalentna duljina štapa (duljina zglobno oslonjenog štapa s kritičnom silom jednakom kritičnoj sili promatranog štapa):

K = 1,0 – obostrano zglobno oslonjen štap

K = 0,5 – obostrano upeti štap

K = 2,0 – konzolni štap

K = 0,7 – zglobno oslonjen štap s jedne a upet s druge strane.

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

OGRANIČENJA EULEROVE TEORIJE

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(KL)^2}$$

$$za \;\; I = Ar^2 \;\; (r = i): \qquad \sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}.$$

Vitkost štapa

(odnos duljine i poprečnog presjeka)

$$\frac{KL}{r}$$