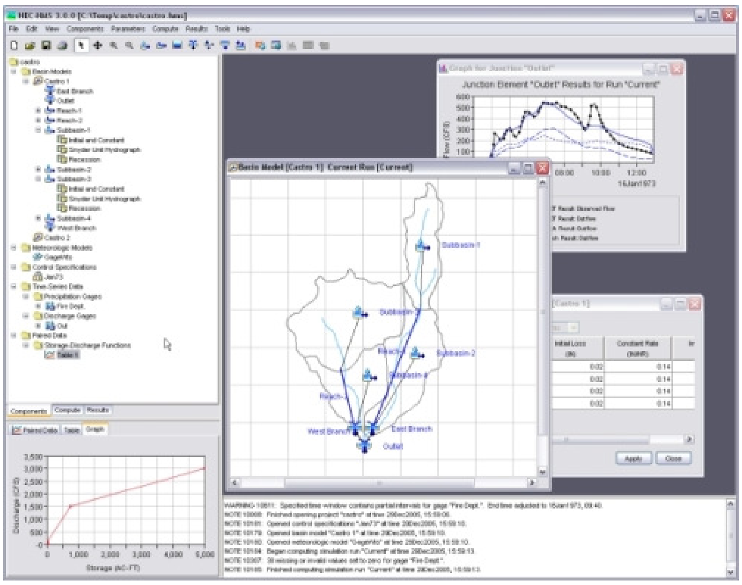
Matematički modeli u hidrotehnici

1. hidrološki modeli slivova
   - npr. HEC-HMS, HSPF, SWAT, MIKE-SHE
2. modeli upravljanja slivovima i objektima
   - npr. HEC-RES, RiverWare
3. modeli za tečenje i kvalitetu površinskih voda
   - npr. HEC-RAS, MIKE-11/MIKE 2/MIKE 3
4. modeli za tečenje i kvalitetu podzemnih voda
   - npr. MODFLOW
5. modeli za mrežne sustave
   - npr. EPANET, SWMM

1

HEC-HMS (Hydrologic Modeling System)



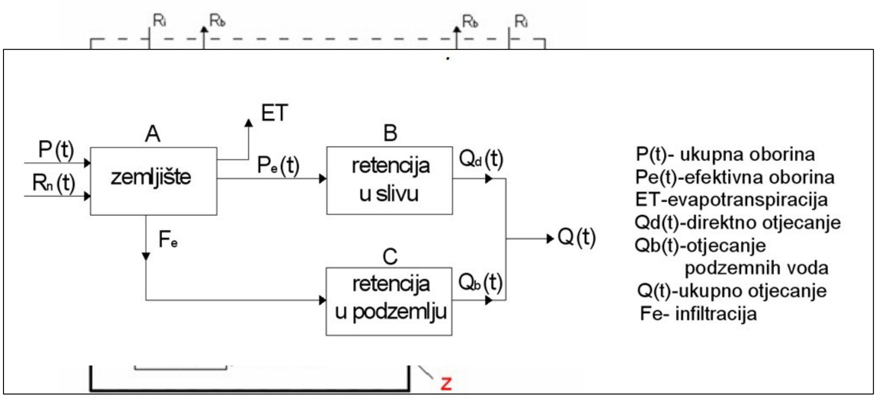
2

Hidrološko modeliranje u HEC-HMS-u

1. Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa
   - Komponente otjecanja
   - Hidrogram
   - Hijetogram
   - Vododjelnica
2. Modeliranje - općenito
   - Model
   - Vrste modela
3. HEC-HMS - simulacija otjecanja sa sliva
   - Prikaz komponenti hidrološkog ciklusa

3

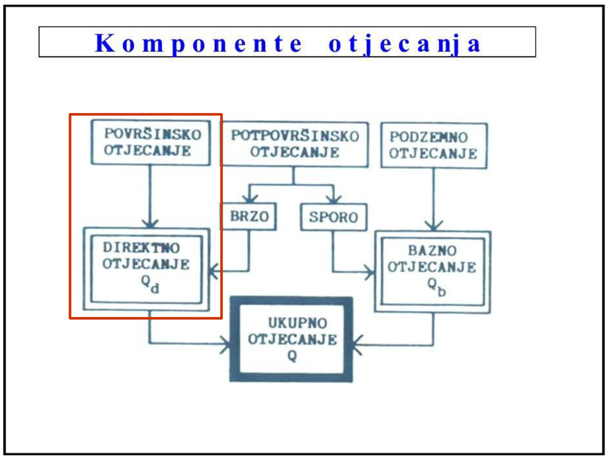
Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa



- Sustavni prikaz hidrološkog ciklusa (sa Z je označena zemljišni podsustav)

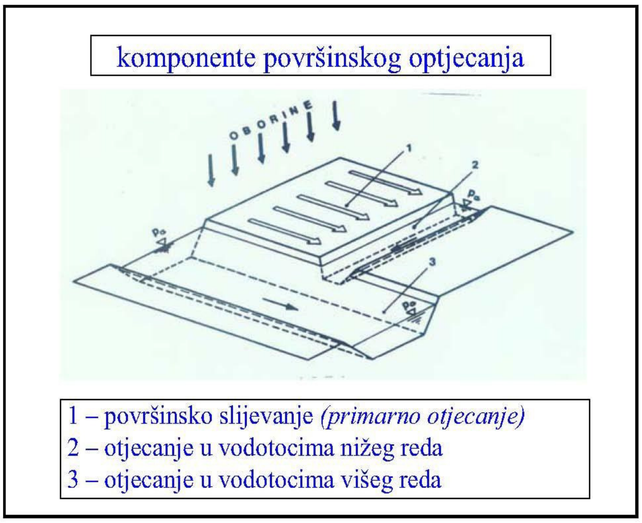
4

Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa



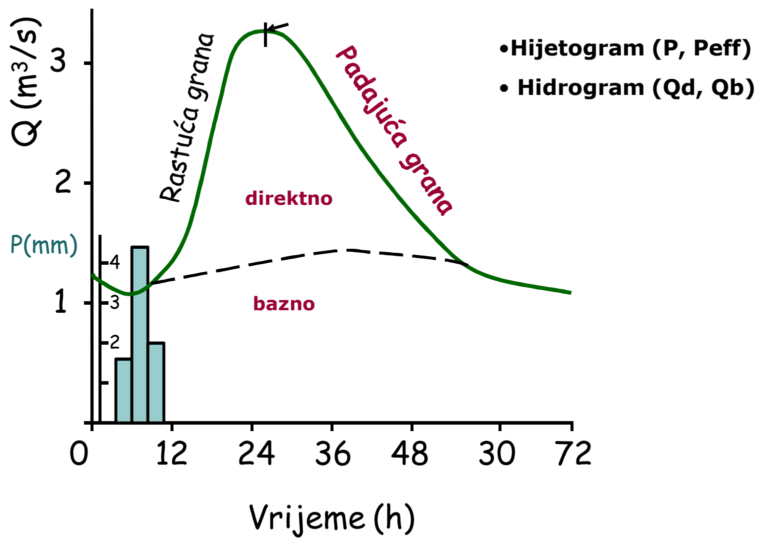
5

Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa



6

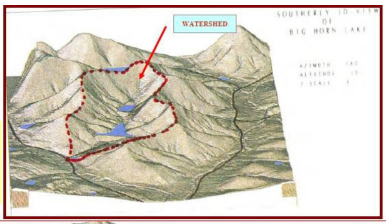
Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa

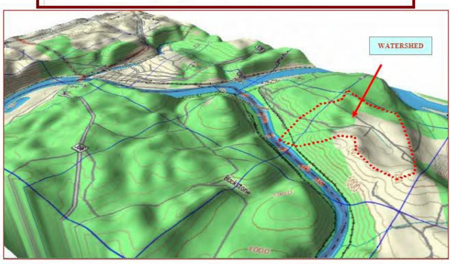


7

Otjecanje - kao komponenta hidrološkog ciklusa

Primjer sliva sa topografskom vododjelnicom





8

Modeliranje - općenito

- Podjela matematičkih modela

Kriterij podjele matematičkih modela	Kategorija modela
razvoj modela u vremenu	stacionarni
	nestacionarni
vrsta matemtičke veza	linearni
	nelinearni
oblik vremenske varijable	diskretni
	kontinuirani
varijabilnost parametara u prostoru	model s globalnim parametrima
	model s distribuiranim parametrima
razina neodređenosti sustava	deterministički
	stohastički (ili probabilistički)
prisustvo parmetara	ne-parametarski
	parametarski
svrha modela	simulacijski
	optimizacijski
razina znanja o sustavu	fizikalni ("bijela kutija")
	Inženjerski: a) input - output ("crna kutija") b) input - stanje - ouput c) konceptualni ("siva kutija")

9

Modeliranje - općenito

- **hidrološki modeli padalina- otjecanje**

$$\boxed{P(x, y, t) \rightarrow Q(t)}$$

- **Podjela**
  - obzirom na komponente (odnosno podsustave) procesa otjecanja

10

Modeliranje - općenito

- **Modeli za komponente otjecanja**
  - Model volumena otjecanja (*određivanje efektivne oborine, tj gubitka*)
  - Modeli direktnog otjecanja
  - Modeli tečenja u vodotocima – (transformacija vodnog vala)
  - Modeli baznog otjecanja

Odgovarajuće **metode proračuna**

11

Elementi modela sliva u HEC-HMS-u

1. HEC-HMS – općenito
   - Komponente modela
     - BASIN MODEL – hidrološki elementi
   - Koraci u programiranju
2. HEC-HMS – definiranje hidroloških elementa za zadani sliv
3. **Za zadani sliv odrediti podjelu na podslivove (te ostale hidr. elemente)**

12

HEC-HMS - općenito

- **Komponente HMS modela:**
- Basin Model Component (komponenete modela sliva)
- Meterologic Model Component (komponente meteorološkog modela)
- Control Specifications Component (komponente kontrolnih specifikacija)
- Input Data Components (komponente ulaznih podataka)

13

Basin model – hidrološki elementi

-predstavlja fizičke karakteristike sliva

-korisnik stvara modela sliva dodavanjem i spajanjem hidroloških elemenata (tablica 1)

-hidrološki elementi - koriste se matematički modeli za opis fizikalnih procesa na slivu

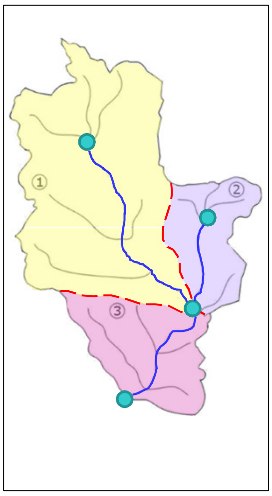
14

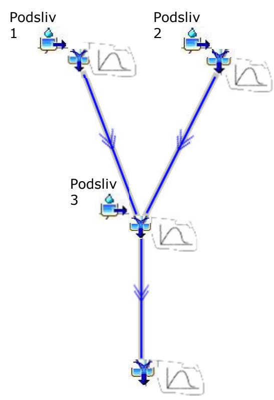
Tablica 1

HIDROLOŠKI ELEMENT	OPIS
Subbasin (podsliv)	Prestavlja fizički sliv i otjecanje sa njega. Kada dodamo kišu, protok na podslivu se proračunava (nakon što oduzmemo kišne gubitke) transformacijom kiše u otjecanje.
Reach (dio vodotoka)	Predstavlja protok vode, koja je otekla sa sliva sa sliva, u vodotoku.
Junction (čvor, spoj)	Sjedinjuje protok hidroloških elemenata koji su smješteni uzvodno od čvora.
Source (izvor)	Prestavlja izvor na slivu (nema dotoka). Protok na izvoru definiran je od strane korisnika.
Sink (ponor)	Prestavlja ponor sliva. Dotok u ponor može doći sa jednog ili više hidrološka elementa. Ne postoji izlazni protok.
Reservoir (rezervoar)	Služi za modeliranje retencijskih sposobnosti sliva, odnosno za "zadržavanje i prigušenje" hidrograma.
Diversion (odvojak)	Služi za modeliranje onih dijelova vodotoka koji se odvajaju od glavnog kanala vodotoka.

15

Određivanje podslivova

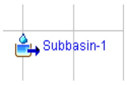
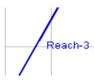




Shema modela otjecanja

16

Prikaz otjecanja u HEC-HMS-u

HIDROLOŠKI ELEMENT	TIP PRORAČUNA	METODA (*BASIN MODEL – parameters*)
Subbasin (podsliv) 	Efektivna oborina, tj. Volumen otjecanja (*Loss*)	Deficit and constat rate (DC), Exponential, Green and Ampt, Gridded DC, Gridded SCS CN, Gridded SMA, Inital and constant rate, **SCS curve number (CN),** Smith Parlange, Soil moisture accounting (SMA)
	Direktno otjecanje (*Transform*)	Clark's UH **Kinematic Wave** ModClark **SCS UH** Snyder's UH User-specified S-graph User-specified unit hydrograph (UH)
	Bazno otjecanje (*Baseflow*)	Bounded recession **Constant monthly** Linear reservoir Nonlinear Boussinesq Recession
Reach (dio vodotoka) 	Transformacija vodnog vala kroz vodotok (*Routing*)	**Kinematic Wave** Lag Modified Puls Muskingum, Muskingum-Cunge

17

Prikaz otjecanja u HEC-HMS-u

- **Otjecanje**
  - Određivanje ef. oborine
  - Direktno otjecanje
  - Otjecanje – transformacija vodnog vala u vodotocima
  - Bazni dotok
- **HEC –HMS** (***BASIN MODEL – parameters***)
  - "Loss"
  - "Transform"
  - "Routing"
  - "Baseflow"

Odgovarajuće **metode proračuna**

18

MODEL EFEKTIVNE OBORINE (odn. GUBITAKA) – SCS CN

19

SCS(NRCS) CN metoda

1. UVOD

- Naziv metode ***SCS*** potječe od državne ustanove iz SAD
  - "Soil Conservation Service" (danas naziva *NRCS – "National Resources Conservation Service"*),
- **CN** – engl. skraćenica za Broj Krivulje otjecanja *("Curve Number")*

20

SCS(NRCS) CN metoda

- **Uz određene pretpostavke (vidi literaturu) dobiven je izraz** za efektivnu oborinu:

$$Pe = 25{,}4 \cdot \frac{\left(0{,}03937 \cdot P - \frac{200}{CN} + 2\right)^2}{\left(0{,}03937 \cdot P + \frac{800}{CN} - 8\right)}$$

- gdje je:
  - Pe - kumulativna efektivna (netto) oborina [mm]
  - P - kumulativna (brutto) oborina [mm]
  - CN- broj krivulje otjecanja koji se određuje iz tablica koje se mogu naći u hidrološkim priručnicima

21

SCS(NRCS) CN metoda

- Vrijednost broja krivulje CN se određuje na temelju četiri faktora:
  - vegetacijskoga pokrova,
  - načina površinske obrade zemljišta
  - tipa tla
  - prethodnih uvjeta vlažnosti tla
- Vrijednosti koeficijenta C*N* za slivove dana je u tablicama svakog ozbiljnijeg hidrološkog priručnika

22

Tablica 1: Izbor broja krivulje otjecanja CN za srednje uvjete vlažnosti (II)

Vegetacijski pokrov	Površinska obrada tla	Tip tla			
		A	B	C	D
Ugar	Ravni redovi	77	86	91	94
Okopavine	Ravni redovi	70	80	87	90
(kulture rijetka	Obrada po izohipsama	67	77	83	87
sklopa)	O. po izohipsama + terase	64	73	79	82
Žitarice	Ravni redovi	64	76	84	88
(niske trave)	Obrada po izohipsama	62	74	82	85
	O. po izohipsama + terase	60	71	79	82
Leguminoze	Ravni redovi	62	75	83	87
ili livade u	Obrada po izohipsama	60	72	81	84
plodoredu	O. po izohipsama + terase	57	70	78	82
Pašnjaci	Slabi	68	79	86	89
	Normalni	49	69	79	84
	Dobri	39	61	74	80
	O. po izohipsama, slabi	47	67	81	88
	O. po izohipsama, normalni	25	59	75	83
	O. po izohipsama, dobri	6	35	70	79
	Normalne	30	58	71	78
Livade	Niske transpirac. sposob.	45	66	77	83
Uzgajane šume,	Normalne transpirac. sposob.	36	60	73	79
lugovi	Visoka transpiracija	25	55	70	77
	Normalni	59	74	82	86
Salaši	Meka površina – blatnjavi	72	82	87	89
Putovi	Tvrda površina	74	84	90	92
	Vrlo niska transpiracija	56	75	86	91
Šume	Niska transpiracija	46	68	78	84
koje nisu uzgajane -	Normalna transpiracija	36	60	70	76
prirodne	Visoka transpiracija	26	52	62	69
	Vrlo visoka transpiracija	15	44	54	61
		100	100	100	100
Nepropusna površina					

23

SCS(NRCS) CN metoda

- Prema SCS metodi za hidrološku praksu se koriste sljedeće **četiri grupe tla:**
  - Tip A:
    - najslabiji uvjeti otjecanja (vrlo visok stupanj infiltracije) -dobro propusne naslage
  - Tip B:
    - nešto bolji uvjeti otjecanja nego kod tipa A (visok stupanj infiltracije) – djelomično nepropusne naslage
  - Tip C:
    - dobri uvjeti otjecanja (srednji stupanj infiltracije) -djelomično propusne naslage
  - Tip D:
    - najbolji uvjeti otjecanja (nizak stupanj infiltracije) –nepropusne naslage

24

SCS(NRCS) CN metoda

- Prema SCS metodi prethodna se vlažnost zemljišta određuje na temelju tri uvjeta:
  - ispodprosječnih I,
  - prosječnih II
  - natprosječnih III.
- Kod natprosječnih uvjeta III se podrazumijeva da je zemljište praktički saturirano vodom

25

SCS(NRCS) CN metoda

CN za uvjet II (1)	CN za uvjet I (2)	CN za uvjet III (3)
100	100	100
98	94	99
96	89	99
94	85	98
92	81	97
90	78	96
88	75	95
86	72	94
84	68	93
82	66	92
80	63	91
78	60	90
76	58	89
74	55	88
72	53	86
70	51	85
68	48	84
66	46	82
64	44	81
62	42	79
60	40	78

Tablica 2:
Odnos brojevi krivulja otjecanja za uvjete vlažnosti I, II i III

26

MODEL DIREKTNOG OTJECANJA

- Metoda proračuna direktnog otjecanja
  - Modeliranje procesa"transformacije" efektivnih oborina u hidrogram direktnog otjecanja
- Vrste modela
  - Empirijski
    - (modeli crne kutije ili modeli Teorije sustava)
  - Konceptualni
    - (opis fizikalnih procesa otjecanja)
- Radimo usporedbu 2 verzije modela otjecanja (shema!):
  - SCS JH – empirijski model
  - Kinematički val – konceptualni model

27

Metoda **SCS jediničnog hidrograma**

- u SCS metodi JH određen je empirijski odnos između vremena zakašnjenja (zaostajanja) i vremena koncentracije koji je jednak: $\boxed{t_{lag} = 0{,}6 \cdot t_c}$
- Dakle: parametar koji unosimo u HEC-HMS je: ***vrijeme zakašnjenja sliva (t_{LAG})***
  - određujemo ga preko ***vremena koncentracije sliva (t_c)***

28

○ Vrijeme koncentracije

- **Vrijeme koncentracije (sabiranja): tc [h]**
  je vrijeme koje je potrebno da čestica vode s najudaljenije točke sliva dospije do mjesta opažanja protoka u vodotoku

29

IZRAZI ZA ODREĐIVANJE VREMENA KONCENTRACIJE t_c

prema nekim autorima

AUTOR	MATEMATIČKA DEFINICIJA VREMENA KONCENTRACIJE	KLIMATSKI POKAZATELJI PODRUČJA	GEOGRAFSKO – GEOLOŠKI POKAZATELJI SLIVA
Z.P.Kirpich (1940)	$t_c = 0{,}00032 \cdot L^{0{,}77} \cdot I^{-0{,}385} \quad [sati]$	Nema	Duljina vodot. L [m] Nagib terena I
C.F.Izzard (1944)	$t_c = 530 \cdot K \cdot L^{1/3} \cdot i_e^{-2/3} \quad [\mathrm{min}]$	Efektivni kišni intenzitet i_e [mm/sat]	Duljina vodot. L [m] Nagib terena I Koef. zakašnjenja c_r $K = (2{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot i_e + c_r) \cdot I^{-1/3}$
R.Morgali, R.K.Linsley (1965)	$t_c = 6{,}99 \cdot (nL)^{0{,}6} i_e^{-0{,}4} \cdot I^{-0{,}3} \quad [\mathrm{min}]$	Mjerodavni kišni intenzitet i_e [mm/sat]	Duljina vodot. L [m] Nagib terena I Manningov koeficijent hrapavosti n [s/m$^{1/3}$]
W.S.Kerby (1959)	$t_c = 1{,}44 \cdot \left(LrI^{-0{,}5}\right)^{0{,}467} \quad [\mathrm{min}]$	Nema	Duljina vodot. L [m] Nagib terena I Koef. zakašnjenja uslijed hrapavosti r
Giandotti – Vissentini (1952)	$t_c = \dfrac{4{,}0\sqrt{A} + 1{,}5L}{0{,}8\sqrt{\Delta H}} \quad [sati]$	Nema	Duljina vodot. L [m] Srednja visinska razlika sliva ΔH, Površina sliva A [km^2]
I.I.Herheulidze (1947)	$t_c = \dfrac{L}{v} = \dfrac{L}{(1{,}6 + 1{,}10 \log P) \mathrm{I_{max}}^{1/4}} \quad [\mathrm{sec}]$	Nema	Duljina vodot. L [m] Maks. nagib terena I Povratno razdoblje P [god]
Srebrenović (1970)	$t_c = \dfrac{20\beta}{[Hs \cdot (1 + 1{,}5 \log P)]^{0{,}57} \cdot I^{0{,}43}} + 2{,}6 \cdot \left[\dfrac{A}{I}\right]^{1/3} \quad [sati]$	Visina prosječnih godišnjih oborina H_s [m]	Duljina vodot. L [m] Nagib terena I Povratno razdoblje P [god] Koef. ovisan o propusnosti, pošumljenosti i sl. ?

30

Metoda **SCS jediničnog hidrograma -općenito**

- **KRATKI TEORIJSKI PREGLED:**

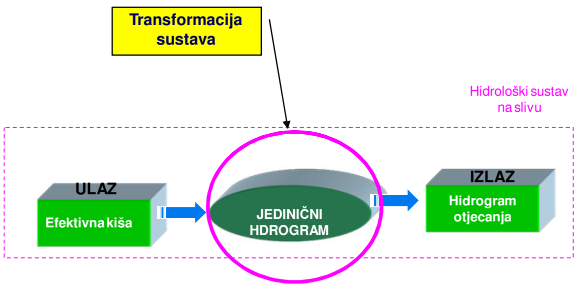
- **METODA JEDINIĈNOG HIDROGRAMA (1957.) - OPĆENITO**

DEFINICIJA:

- **Jediniĉni hidrogram** *je hidrogram izravnog otjecanja koji je rezultat jedinične količine efektivnih oborina, raspoređenih ravnomjerno po slivnome području tijekom određenog vremenskog razdoblja.*

31

PRICIP "CRNE KUTIJE"



***Slika 3**: Prikaz sliva kao **hidrološkog sustava** sa jediničnim hidrogramom kao funkcijom preslikavanja*

32

- SCS metoda jediničnog hidrograma (1957)

- Da bi se jedinični hidrogram, kao funkcija preslikavanja, definirao, potrebno je raspolagati sa mjerenim podacima ulaza (kiša) i izlaza (hidrogram otjecanja)
- Nakon jednom definirane funkcije preslikavanja (JH) za promatrani sliv, moguće je tada za svaku sljedeću kišu dobiti hidrogram otjecanja

33

Ukoliko se ne raspolaže mjerenim podacima o kiši i otjecanju koriste se SINTETIČKI JEDINIČNI HIDROGRAMI:

- Sintetički jedinični hidrogrami (JH):
  - Snyder (1938)
  - Clark-ov trenutni JH (1945)
  - **SCS bezdimenzionalni JH (1957)**

Svaka od metoda temelji se na principima JH

34

- Sintetički JH temelje na činjenici da se pomoću raznih karakteristika sliva izračunavaju razni parametri
- Najvažniji parametri koji definiraju sintetičke JH:
  - t_P (Time to Peak) - vrijeme max protoka
  - t_{LAG} (Lag Time) – vrijeme zakašnjenja
    - od težišta efektivne kiše do vrha hidrograma
  - t_C - vrijeme koncentracije
    - Od kraja efektivne kiše do točke infleksije na opadajućoj grani hidrograma
  - vremenska baza
  - površina sliva

35

SCS metoda jediničnog hidrograma

- Metoda je izvedena od velikog broja jediničnih hidrograma dobivenih iz mjerenih podataka sa manjih ruralnih slivova
- Mjereni hidrogrami - bezdimenzionalna forma
  - na ordinati svi protoci dijeljeni sa vršnim protokom, a na apscisi sva vremena sa vremenom pojavljivanja vršnog protoka

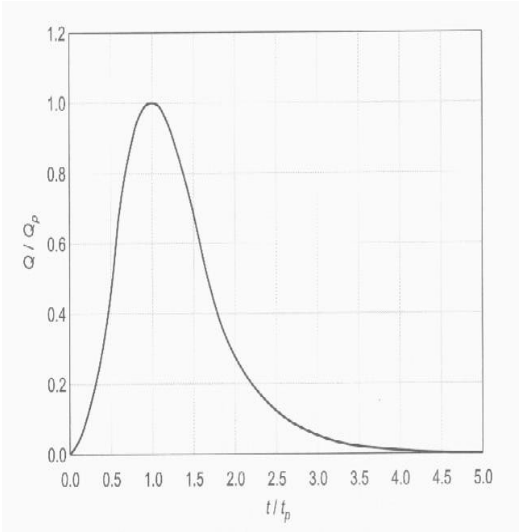
↓

- **prosječni bezdimenzionalni JH** (slika 1, tablica 1)

36

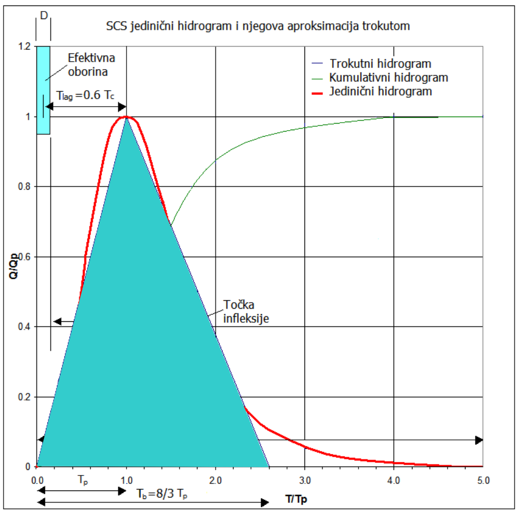
t/t_p	Q/Q_p	t/t_p	Q/Q_p
0	0.000	1.7	0.460
0.1	0.030	1.8	0.390
0.2	0.100	1.9	0.330
0.3	0.190	2.0	0.280
0.4	0.310	2.2	0.207
0.5	0.470	2.4	0.147
0.6	0.660	2.6	0.107
0.7	0.820	2.8	0.077
0.8	0.930	3.0	0.055
0.9	0.990	3.2	0.040
1.0	1.000	3.4	0.029
1.1	0.990	3.6	0.021
1.2	0.930	3.8	0.015
1.3	0.860	4.0	0.011
1.4	0.780	4.5	0.005
1.5	0.680	5.0	0.000
1.6	0.560		

Tablica 1 Vrijednosti ordinate i apscise bezdimenzionalnog jediničnog hidrograma



Slika 1 Bezdimenzionala krivulja jediničnog hidrograma

37



38

- krivulja jediničnog hidrograma može se aproksimirati trokutom (**slika 2**) čiji je maksimalni protok jednak:

$$Q_p = \frac{C \cdot A}{t_p}$$

$$t_p = \frac{D}{2} + t_{lag}$$

gdje je:

- Qp=vršni protok jediničnog hidrograma
- A=površina sliva
- tp=vrijeme pojave vršnog protoka
- C=2.08 za SI, C=483.4 za US
- D=trajanje jedinične efektivne kiše JH
- tlag=vrijeme zakašnjenja sliva (engl."lag time")

- SCS metoda JH - empirijski odnos izmeĐu vremena zakašnjenja i vremena koncentracije :

$$\boxed{t_{lag} = 0{,}6 \cdot t_c}$$

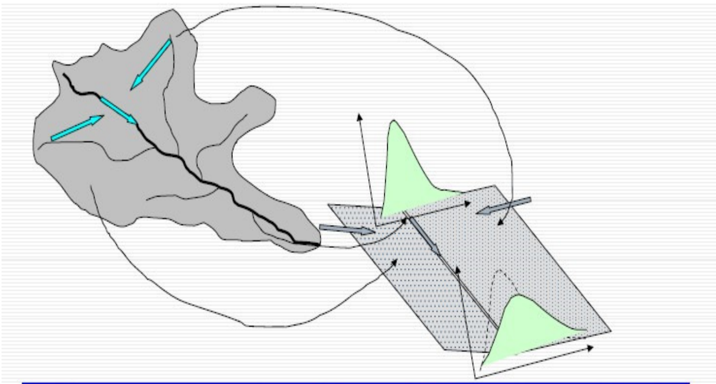
39

MODEL PROPAGACIJE VODNOG VALA U VODOTOKU

1. **Uvod** – propagacija (transformacija) vodnog vala u vodotoku
2. Metoda **kinematiĉkog vala**

40

1. UVOD



Prilikom propagacije vodnog vala kroz vodotok dolazi do smanjenja vrha hidrograma i njegove translacije

41

Metoda **Kinematičkog vala**

- **Propagacija poplavnog vala u vodotoku**
- dvije grupe modela :
  - hidrološki
  - hidraulički
- **hidraulički modeli** –
  - precizno poznavanje morfoloških karakteristika toka duž koga se računa propagacija poplavnih valova, kao i poznavanje ulaznog i izlaznog hidrograma.
- hidrološke modeli
  - detaljna morfologija toka nije potrebna,
  - svi se parametri određuju na bazi poznatih ulaznih i izlaznih hidrograma.
- Model kinematskog vala - **hidraulička** etoda **kinematičkog vala**

42

Metoda **Kinematičkog vala**

- 2. Metoda kinematiĉkog vala
  - ○ služi za modeliranje tečenja u vodotocima
    - Osnovne jednadžbe nestacionarnog strujanja u
    - otvorenim koritima;
  - ○ ovim modelom se računa nizvodni hidrogram tako da je uzvodni hidrogram

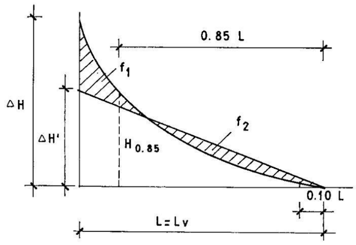
43

2. Metoda **kinematiĉkog vala**

Show Elements: All Elements

Reach	Length (M)	Slope (M/M)	Manning's n	Subreaches	Shape	Diameter (M)	Width (M)	Side Slope (xH:1V)
medvescak_II	1325.79	0.0438	0.03	2	Trapezoid		1	1.125
pustidol_II	725.14	0.0487	0.03	2	Trapezoid		1	0.6
medvescak_III_1	261.61	0.0438	0.03	2	Rectangle		2.4	

Razlika u odnosu na "Transform"**:**
- stvarna duljina vodotoka
- stvarni pad vodotoka



44

MODEL KIŠE U HEC-HMS-u

- Uvod
- Oborina – ulazna veličina u modele otjec.
  - ITP-krivulje
- Pljusak za projektiranje (engl. *design storm*)
- Definiranje projektnog pljuska u HEC-HMS-u

45

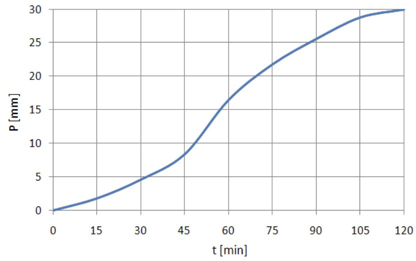
1. UVOD - Osnovni pojmovi

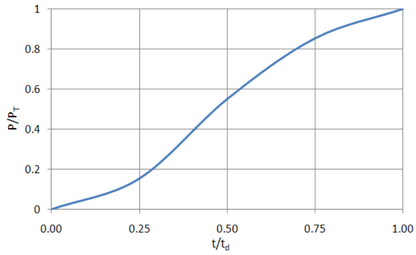
- **trajanje oborine [min]** – vrijeme proteklo izmeĎu početka i kraja kišnog dogaĎaja dovoljnog intenziteta da se moţe izmjeriti
- **ukupna oborina [mm]** – predstavlja vrijednost koju bi dosegla razina vode nastala tijekom kiše da ostane na mjestu gdje je pala bez otjecanja
- **intenzitet [mm/min]** – omjer ukupno pale oborine i trajanja kiše
- **hijetograf** – grafički prikaz promjene intenziteta kiše tokom jednog kišnog dogaĎaja

46

Kišni događaj – obično se opisuje sa prosječnom količinom pale oborine na cijelom promatranom prostoru

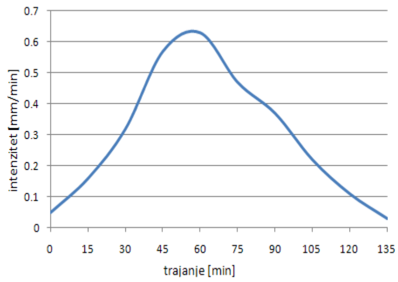
Prosječna količina pale oborine opada s povećanjem promatranog prostora

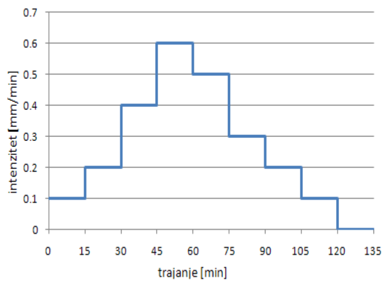




47

- Intenzitet kiše:
  - varira i prostorno i vremenski tijekom jednog kišnog događaja
  - u pravilu najveći je u središtu oluje i smanjuje se što se više udaljavamo od njega.





48

OBORINA – ULAZNA VELIČINA

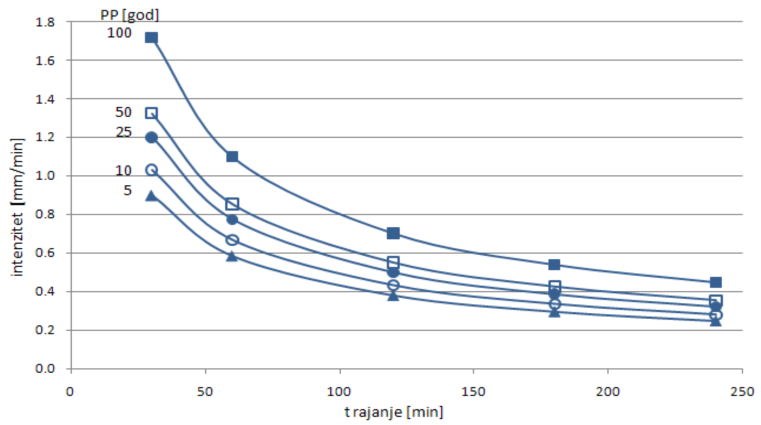
- Analiza i projektiranje hidrotehničkih objekata
- Ulazna veličina – podaci o oborinama
- Oblici ulaza:
  - **Povijesni podaci opaženih oborina → osnova za sve tipove**
  - Generirane sekvence oborina → rijetko se koriste
  - **Oborine prikazane u obliku familija krivulja (ITP / PTP)**
  - **Pljuskovi za projektiranje**

49

Model kiše u HEC-HMS-u

ITP – krivulje

50



•**ITP KRIVULJA: Intenzitet kiše – Trajanje oborine - PP**

51

OBORINA – ULAZNA VELIČINA

- razni načini definiranja padalina u HEC-HMS-u dan u ***tablici*** →
- **Povijesni (mjereni)** kišni događaj

HEC –HMS Metode za proračun oborine
Frequency storm
Gage Weights
Gridded Precipitation
Inverse Distance
SCS Storm
Specified Hyetograph
Standard Project Storm

52

ITP -krivulje

- Empirijske krivulje
- određuju se na bazi **povijesnih pluviografskih podataka** mjerodavnog intenziteta;
- **ITP -** funkcijska veza intenzitet - trajanje – povratno razdoblje :
- **i = f (t_0, PR)**
- određuju se matematičko - statističkim postupcima (za definiranje neophodan niz od min. 20 god. mjerenja, *što više to bolje*)
- Osim ITP- krivulja, postoji prikaz i u obliku **PTP-krivulja** (*slika*)

53

ITP -krivulje

- **Povratni period [god] –** označava razdoblje u kojem će se određeni hidrološki dogaĎaj **prosječno** pojaviti ili premašiti jedanput

- PP za određene objekte:
  - 2-5 god za slivnike na cestama,
  - 2-25 god za kanalizaciju,
  - 10-100 god za retencijske bazene

54

Model kiše u HEC-HMS-u

Pljusak za projektiranje

55

PLJUSAK ZA PROJEKTIRANJE

- **Def**: "Projektna kiša (pljusak) je količina i prihvaćena raspodjela oborine u vremenu na razmatranome slivnom području, što se koristi za određivanje projektne velike vode" (Ţugaj)
- Cilj uvođenja:
  - pokušaj da se odredi ulaz u hidrološki proces koji će opisivati realne, ali opće hidrograme oborina
  - pokušaj da se postigne da je PP period oborine (ulaza), bude pribliţno jednak PP karakt otjecanja (izlaza)
- Trajanje i intenzitet projektne kiše - ovise o projektiranom objektu:
  - za odvodne kanale traţi se projektna kiša koja daje najveći vršni protok
  - za retencijske bazene traţi se projektna kiša koja će uzrokovati najveći porast volumena u bazenu

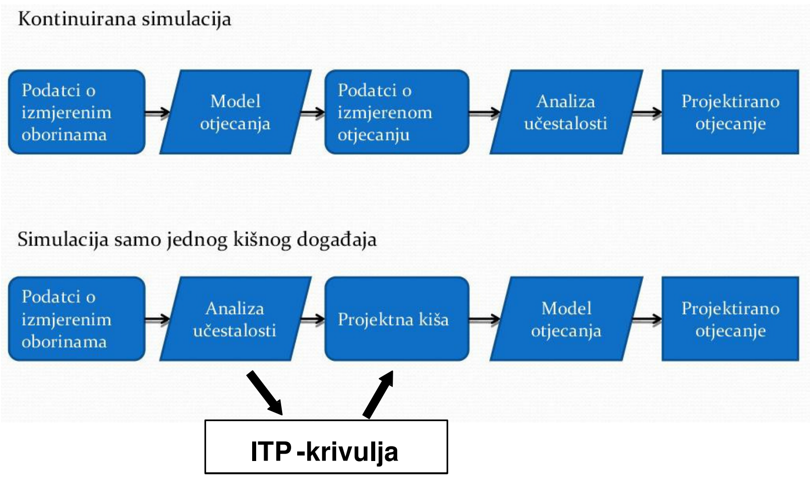
56

PLJUSAK ZA PROJEKTIRANJE

- dimenzioniranje hidrotehničkih objekata (npr odvodnja):
  - odrediti projektni protok na određenom mjestu
  - na način da se odrede protoke iz projektnih kiša pomoću modela koji povezuje kišni događaj s otjecanjem
- dva pristupa ovom problemu:
  - kontinuirane simulacije
  - simulacije samo jednog kišnog događaja

57

PLJUSAK ZA PROJEKTIRANJE



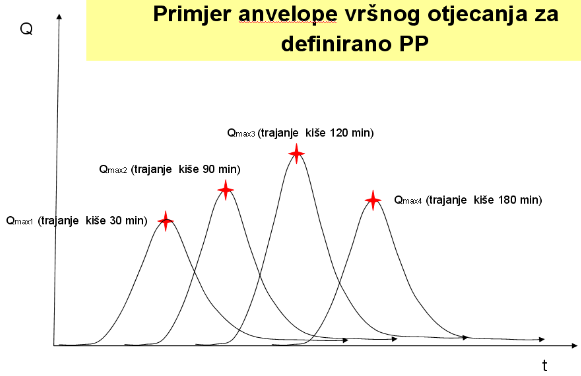
58

PLJUSAK ZA PROJEKTIRANJE

IZLAZNI PODACI

Primjer anvelope vršnog otjecanja za definirano PP

- Radimo simulacije (više) kišnih događaja (različitih trajanja)



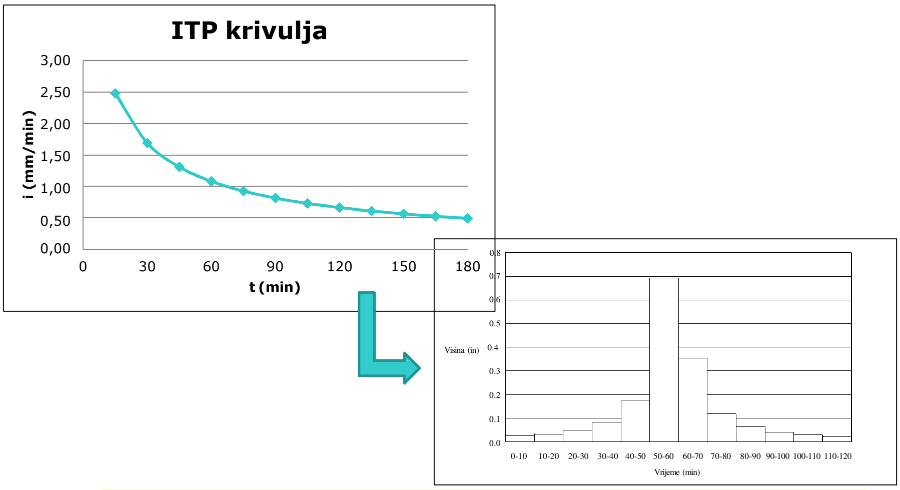
59

PLJUSAK ZA PROJEKTIRANJE

- Metode izrade hijetograma projektnih kiša (pljuskova):

1. **projektni pljusak konstantnog, prosječnog intenziteta uzetog s ITP- krivulje**
2. **Metoda izmjenjujućih blokova hijetograma**

60



Slika 5:
Pljusak za projektiranje Metoda izmj. blokova uzeta sa ITP-krivulje

61

Model kiše u HEC-HMS-u

Definiranje projektnog pljuska u HEC-HMS-u

62

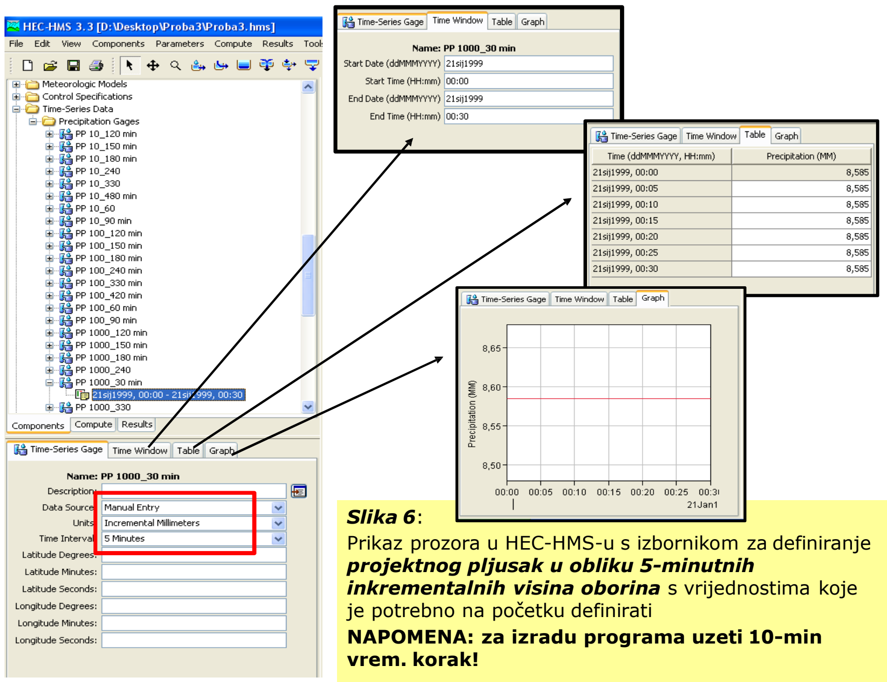
Definiranje projektnog pljuska HEC-HMS-u

- komponenta *Vremenska serija (Time-series data)*

- Definicija *"kišomjern(-ih) stanica(-e)"* *(Precipitation Gages)*

- Mjereni (povijesni) kišni dogaĎaj ili projektni pljusak
  - ovdje definirati (za zadani PP) projektne kiše različih trajanja (30, 60, 90, 120 min, ...)

63



Slika 6:
Prikaz prozora u HEC-HMS-u s izbornikom za definiranje ***projektnog pljusak u obliku 5-minutnih inkrementalnih visina oborina*** s vrijednostima koje je potrebno na početku definirati

NAPOMENA: za izradu programa uzeti 10-min vrem. korak!

64

2. dio

65

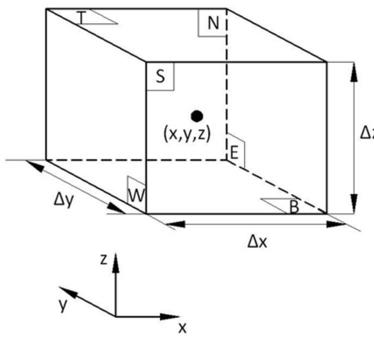
Osnovne jednadžbe strujanja tekućine i transfera topline

- Osnovne jednadžbe strujanja tekućina i predstavljene su matematičkim izrazima *zakona očuvanja polja:*
  - Zakon očuvanja mase;
  - Zakon očuvanja količine gibanja (drugi Newton-ov aksiom);
  - Zakon očuvanja energije (prvi zakon termodinamike).
- *Usvojene pretpostavke:*
- Tekućina se promatra kao kontinuum;
- U analizi tekućina na makroskopskoj skali (1 μm i veće) molekularna struktura i molekularna gibanja se zanemaruju;
- Opisuje se ponašanje tekućine u smislu makroskopskih svojstava, poput brzine, tlaka , gustoće i temperature, te njihovih vremenskih i prostornih derivacija.

66

Izvod jednadžbi

- Promatramo djelić tekućine sa stranicama Δx, Δy i Δz
- Proračun promjena mase, količine gibanja i energije elementa tekućine nastale strujanjem kroz njegove granice, te ukoliko postoje izvori, kroz djelovanje ponora i izvora unutar elementa, vodi do jednadžbi strujanja tekućine.



67

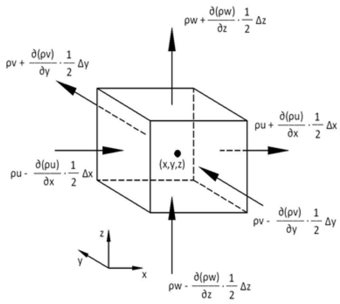
Zakon očuvanja mase

Rata prirasta mase u elementu tekućine	=	sumarni protok mase (dotok) u element tekućine

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad ili \quad \frac{\partial p}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})=0$$

- za nestišljivu tekućinu (gustoća je konstantna):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad ili \quad div\,\boldsymbol{u}=0$$



68

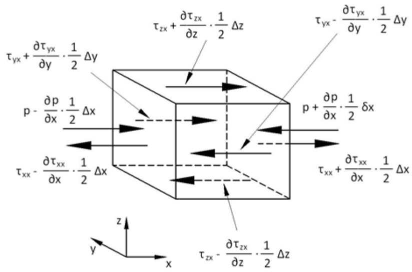
Zakon očuvanja količine gibanja

Rata prirasta količine gibanja elementa tekućine	=	Suma vanjskih sila na element tekućine

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(-p+\tau_{XX})}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{YX}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{ZX}}{\partial z}+S_{Mx}$$

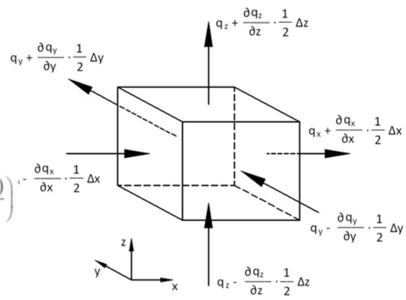
$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial\tau_{XY}}{\partial x}\frac{\partial(-p+\tau_{YY})}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{ZY}}{\partial z}+S_{My}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial\tau_{XZ}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{YX}}{\partial z}\frac{\partial(-p+\tau_{ZZ})}{\partial z}+S_{Mz}$$



69

Zakon očuvanja energije



Rata prirasta energije elementa tekućine	=	ukupna rata topline predane elementu tekućine	+	ukupna rata rada izvršenog na elementu tekućine

$$\rho\frac{DE}{Dt}=-\mathrm{div}(p\boldsymbol{u})+\left(\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right)+\mathrm{div}(-k\,\mathrm{grad}T)+S_E$$

$$E=i+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right) \qquad i=cT$$

$$\rho c\frac{DT}{Dt}=\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}T)+\tau_{XX}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{YX}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{ZX}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$+\tau_{XY}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{YY}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{ZY}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{XZ}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{YZ}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{ZZ}\frac{\partial w}{\partial z}+S_i$$

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \;;\; q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \;;\; q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Ili u vektorskoj formi:

Fourierov zakon

$$\boldsymbol{q}=-k\,\mathrm{grad}T$$

70

Jednadžbe stanja (termodinamika)

- Gibanje tekućine u tri smjera je opisano sustavom od pet parcijalnih diferencijalnih jednadžbi: očuvanja mase, *x,y,z*-očuvanja količine gibanja i jednadžbe energije. Među nepoznanicama pojavljuju se četiri termodinamičke varijable: ρ, *p, i* te *T.*
- Jednadžbe stanja: $p = p(\rho, T)$ $\quad i = i(\rho, T)$
- Savršeni plin $p = \rho R T$ $\quad i = C_V T$
- U strujanju ***stišljive tekućine*** jednadžbe stanja daju poveznicu između energetske jednadžbe s jedne strane i jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja s druge strane. Ta poveznica pojavljuje se zbog moguće varijacije gustoće uslijed varijacije tlaka i temperature u polju strujanja.
- Kapljevine i plinovi koje struje s malim brzinama ponašaju se kao ***nestišljive tekućine***. Bez varijacije gustoće ne postoji veza između energetske jednadžbe i jednadžbi očuvanja mase i količine gibanja. Tada je za rješavanje strujnog polja dovoljno razmatrati jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja. Energetska jednadžba uključuje se u analizirani sustav jednadžbi samo u slučaju prisustva izmjene topline.

71

Navier-Stokesove jednadžbe za Newton-ovu tekućinu

– Newtonov zakon viskoznosti (3D):

$$\tau_{XY} = \tau_{YX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \tau_{XZ} = \tau_{ZX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \tau_{YZ} = \tau_{ZY} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{XX} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u} \quad \tau_{YY} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u} \quad \tau_{ZZ} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + S_{MX}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + S_{MY} \quad (:$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right] + S_{MZ}$$

72

Za stišljive tekućine

1. očuvanje mase: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0$

2. očuvanje količine gibanja: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u \boldsymbol{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{div}(\mu\, \mathrm{grad} u) + S_{MX}$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v \boldsymbol{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mathrm{div}(\mu\, \mathrm{grad} v) + S_{MY}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho w \boldsymbol{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathrm{div}(\mu\, \mathrm{grad} w) + S_{MZ}$$

3. očuvanje energije: $\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho i \boldsymbol{u}) = -p\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} + \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad} T) + \Phi + S_i$

4. jednadžbe stanja: $p = p(\rho, T) \quad ; \quad i = i(\rho, T)$

- 7 jednadžbi sa 7 nepoznanica

73

Za nestišljive tekućine

- Strujanje

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\, \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u))$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{div}(v \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\, \mathrm{div}(\mathrm{grad}(v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}(w \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\, \mathrm{div}(\mathrm{grad}(w))$$

- Temperatura

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad} T) + \tau_{XX}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{YX}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{ZX}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{XY}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{YY}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{ZY}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{XZ}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{YZ}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{ZZ}\frac{\partial w}{\partial z} + S_i$$

nakon što se riješi strujanje

74

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

Navier–Stokes Equation

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

Image: Sir George Gabriel Stokes (13 August 1819–1 February 1903). Public Domain

This problem is: Unsolved

Rules:
Rules for the Millennium Prizes

Related Documents:
Official Problem Description

Related Links:
Lecture by Luis Cafarelli

75

Opća jednadžba pronosa

- Ukoliko se uvede opća varijabla ϕ, konzervativna forma svih jednadžbi strujanja tekućine, uključujući jednadžbe za skalarne veličine poput temperature ili koncentracije itd., može se pisati u slijedećoj formi (tzv. jednadžbe pronosa za svojstvo tekućine ϕ

Rata prirasta ϕ u elementu tekućine	+	ukupna rata protoka ϕ van iz elementa tekućine	=	rata povećanja ϕ uslijed difuzije	+	rata povećanja ϕ zbog djelovanja izvora

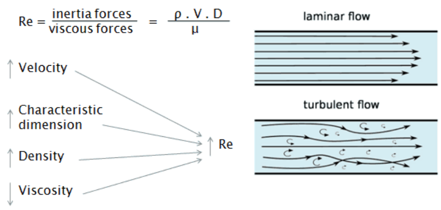
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\phi\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) + S_\phi$$

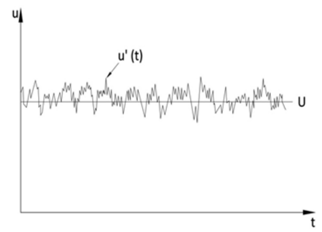
- Član ***rate promjene*** i ***konvektivni*** *član* su sa lijeve strane dok su članovi ***difuzije*** (Γ= koeficijent difuzije) i ***član izvora*** na desnoj strain
- Postavljenjem ϕ jednakim 1, zatim jednakim *u, v, w* te jednakim *i* (ili *T*) i izborom odgovarajućih vrijednosti za koeficijent difuzije Γ i član izvora, dobiva se posebna forma jednadžbi za svaku od pet PDJ za očuvanje mase, količine gibanja i energije.

76

Turbulencija

- Reynoldsov broj daje mjeru relativne važnosti inercionih sila (povezanih sa efektima konvekcije) i viskoznih sila.
- Ekpserimentalnom djelatnosti pokazalo se da strujanje pri vrijednostima Reynoldsovog broja manjeg od tzv. kritičnog *Rekrit* ima odlike nemiješanja između međusobnih slojeva (lamina). Taj režim se naziva ***laminaran.***
- Pri vrijednostima Reynolds-ovog broja iznad *Rekrit* pojavljuje se složeni niz događaja koji u načelu vodi do radikalne promjene karaktera strujanja. U konačnom stadiju strujanje se ponaša kao kaotično i slučajno.
- Takovo gibanje je u osnovi nestacionarno čak i u uvjetima uspostavljenih konstantnih rubnih uvjeta. Brzina i svi ostali parametri toka variraju na način koji je kaotičan i slučajan pa se takav režim strujanja naziva ***turbulentnim***.





77

Reynolds-ovo osrednjavanje

$$u=U+u' \quad ; \quad v=V+v' \quad ; \quad p=P+p'$$

N-S

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}(u\boldsymbol{u})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(u))$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{div}(v\boldsymbol{u})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{div}(w\boldsymbol{u})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(w))$$

RANS

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\mathrm{div}(U\boldsymbol{U})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(U))+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'^2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'w'}\right)}{\partial z}\right] \text{(5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mathrm{div}(V\boldsymbol{U})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(U))+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'v'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'^2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'w'}\right)}{\partial z}\right] \text{(5.}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\mathrm{div}(W\boldsymbol{U})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(W))+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'w'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'w'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{w'^2}\right)}{\partial z}\right.$$

78

Reynolds-ova naprezanja

$$\tau_{XX} = -\rho\overline{u'^2} \quad ; \quad \tau_{YY} = -\rho\overline{v'^2} \quad ; \quad \tau_{ZZ} = -\rho\overline{w'^2}$$

$$\tau_{XY} = \tau_{YX} = -\rho\overline{u'v'} \quad ; \quad \tau_{XZ} = \tau_{ZX} = -\rho\overline{u'w'} \quad ; \quad \tau_{YZ} = \tau_{ZY} = -\rho\overline{v'w'}$$

Navedena turbulentna naprezanja nazivaju se ***Reynolds-ova naprezanja.*** Normalna naprezanja su ustvari varijance *x, y* i *z* komponente brzinske fluktuacije, te su uvijek veće od nule zbog kvadrata.

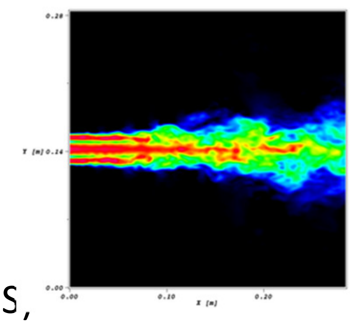
Posmična naprezanja sadrže druge momente povezane s korelacijom između različitih komponenti brzina. Korelacija između parova različitih brzinskih komponenti kroz strukturu vrtloga osigurava da ***turbulentna posmična naprezanja*** također ne mogu iznositi nula, te da su u turbulentnom toku uobičajeno puno veća od viskoznih naprezanja.

79

Proračun turbulentnih tokova

1. Modeli za RANS jednadžbe

Broj dodatnih jednadžbi pronosa	Ime modela
nula	Model duljine mješanja
dvije	*k-ε*
sedam	Reynolds sress model



2. Large eddy simulation (LES)
3. Direct numerical simulation (DNS)

80

Model turbulentne viskoznosti

- Newtonov zakon viskoznosti

$$\tau_{ij} = \mu s_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- Turbulentna analogija

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad ; \quad k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$$

Turbulentna viskoznost

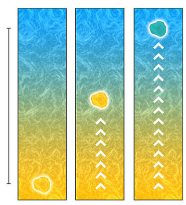
81

Model duljine miješanja (Prandtl)

Pretpostavlja se da kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti υ_t može biti izražen umnoškom mjerila turbulentne brzine ϑ i turbulentnog mjerila duljina l_t. Dimenziona analiza pokazuje da je jedno mjerilo brzina i jedno mjerilo duljina dostatno za opis efekta turbulencije: $\upsilon_t = C\,\vartheta\,l_t$ gdje je C bezdimenzionalna konstanta proporcionalnosti. Dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti je dan sa: $\mu_t = \rho\,C\,\vartheta\,l_t$.

$$\tau_{XY} = \tau_{YX} = -\rho\overline{u'v'} = \rho \ell_m^2 \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

Strujanje	Duljina mješanja
Osnosimetričan mlaz	0,075 D
Cijevi i otvoreni kanali	L (0.14-0.08(1-y/L)^2-0.06(1-y/L)^4)



82

k-ε model turbulencije

Standardni k–ε model sadrži dvije jednadžbe, jednu za k i jednu za ε, bazirano na relevantnim procesima koji uzrokuju promjene tih varijabli. Koristimo k i ε da definiramo mjerilo brzina ϑ i mjerilo duljina l_t koja su reprezentativna za turbulenciju makro mjerila (eng: large-scale turbulence):

$$\vartheta = k^{1/2} \quad ; \quad \ell_t = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \qquad \mu_t = C\rho\vartheta\ell_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Rata promjene od *k* ili *ε*	+	**Pronos od *k* ili *ε* sa konvekcijom**	=	**Pronos od *k* ili *ε* sa difuzijom**	+	**Rata proizvodnje od *k* ili *ε***	-	**Rata destrukcije od *k* ili *ε***

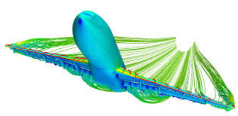
$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho k \boldsymbol{U}) = \operatorname{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \operatorname{grad} k\right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho\varepsilon$$

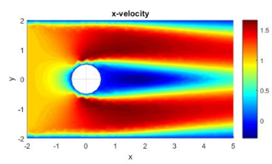
$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \boldsymbol{U}) = \operatorname{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon\right] + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

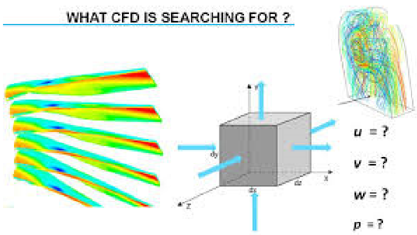
C_μ=0.09, σ_k=1.0, σ_ε=1.3, $C_{1\varepsilon}$ =1.44 i $C_{2\varepsilon}$ = 1.92

83

Computational Fluid Mechanics







https://www.youtube.com/watch?v=hzTCCcsOTg8

84

Model trodimezionalnog strujanja u otvorenom vodotoku

U ovom poglavlju opisuje se modelski sustav pogodan za analizu trodimenzionalnog strujanja u kontinuranoj akvatičkoj sredini poput mora, jezera i rijeka. U sklopu modela implementirane su 3D Reynoldsove jednadžbe uz Boussinesqovu pretpostavku o hidrostatskoj raspodjeli tlaka po vertikali stupca analizirane tekućine. U modelu jednadžba kontinuitete definirana je sljedećom jednadžbom:

„Shallow Water Equations"

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=S \qquad (6.1)$$

gdje je: *u*,*v*,*w* komponente brzina u *x*,*y* i *z* smjeru; *S* intenzitet ponora ili izvora.

https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations

85

Dvije horizontalne komponente zakona o očuvanju količine gibanja glase:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial vu}{\partial y}+\frac{\partial wu}{\partial z}=fv-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial x}-\frac{g}{\rho_0}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho}{\partial x}dz+F_u+\frac{\partial}{\partial z}\left(v_{tV}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u_s S \qquad (6.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial z}=-fu-g\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial y}-\frac{g}{\rho_0}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho}{\partial y}dz+F_v+\frac{\partial}{\partial z}\left(v_{tV}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+v_s S \qquad (6.2b)$$

gdje je: *h* trenutna dubina tekućine ($=\eta+d$); *d* srednja normalna dubina; η trenutno nadvišenje razine vodnog lica iznad srednje normalne dubine; *f* Coriolisov parametar (2Ω sin ϕ ; ϕ - geografska latituda); υ_{tV} kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti u vertikalnom smjeru; p_a atmosferski tlak; *g* gravitaciono ubrzanje; ρ gustoća tekućine; ρ_0 referentna gustoća tekućine; *x*, *y* prostorne koordinate; *t* vrijeme; u_S, v_S komponente brzine u *x* i *y* smjeru za ponor/izvor.

86

Članovi horizontalnog naprezanja su opisani putem odnosa gradijent-naprezanje uz pojednostavljenje na slijedeći oblik:

$$F_U = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\upsilon_{tH}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon_{tH}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \qquad (6.2)$$

$$F_V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon_{TH}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\upsilon_{TH}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \qquad (6.3)$$

gdje je: υ_{tH} kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti za horizontalne x i y smjerove.

87

Rubni uvjeti na površini ($z = \eta$) i dnu ($z = -d$) za komponente brzina u, v, w su:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho_0 v_t}(\tau_{SX}, \tau_{SY}) \qquad (\text{na } z = \eta) \qquad (6.4)$$

$$u\frac{\partial d}{\partial x} + v\frac{\partial d}{\partial y} + w = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho_0 v_t}(\tau_{BX}, \tau_{BY}) \qquad (\text{na } z = -d) \qquad (6.5)$$

gdje je: τ_{SX}, τ_{SY} komponente naprezanja na površini (uslijed djelovanja vjetra); τ_{BX}, τ_{BY} komponente naprezanja na dnu.

88

Površinsko naprezanje pri dnu (trenje sa dnom) definirano je jednadžbama 6.6:

$$\tau_{BX} = \rho_0 c_f u_{BX} |u_{BX}| \quad ; \quad \tau_{bY} = \rho_0 c_f u_{bY} |u_{bY}| \quad ; \quad c_f = 1 / \left(\frac{1}{\kappa \ln(\Delta z / z_0)} \right)^2 \quad (6.6a,b,c)$$

gdje je: u_{BX}, u_{BY} pridnene brzine u x i y smjeru na vertikalnoj udaljenosti Δz od dna; c_f koeficijent trenja uz pretpostavku važenja logaritamskog profila brzina od dna do Δz; z_0 karakteristična duljina za hrapavost dna; κ von Karmanova konstanta.

Površinsko naprezanje uzrokovano djelovanjem vjetra opisano je empiričkim jednad. 6.7:

$$\tau_{sx} = \rho_a C_D U_{wX} | U_{wX} | \quad ; \quad \tau_{sy} = \rho_a C_D U_{wY} | U_{wY} | \quad (6.7a,b)$$

gdje je: ρ_a gustoća zraka; C_D koeficijent povlačenja vjetra; U_{WX}, U_{WY} komponente brzine vjetra na 10m od površine.

89

Ukupna dubina h dobiva se iz kinematskog rubnog uvjeta na površini ukoliko je poznato polje brzina iz jednadžbi očuvanja količine gibanja i kontinuiteta a vertikalnom integracijom lokalne jednadžbe kontinuiteta dobiva se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\overline{v}}{\partial y} = hS + \hat{P} - \hat{E} \quad (6.8)$$

gdje je: $\hat{P}$ rata oborine; $\hat{E}$ rata evaporacije; $\overline{u}$ i $\overline{v}$ vertikalno osrednjene horizontalne komponente brzina u x i y smjeru.

$$h\overline{u} = \int_{-d}^{\eta} u dz \quad ; \quad h\overline{v} = \int_{-d}^{\eta} v dz \,. \quad (6.9)$$

90

Tekućina se pretpostavlja kao nestišljiva zbog čega je gustoća ρ neovisna o tlaku i ovisna o temperaturi T i salinitetu S a što je izraženo sljedećom jednadžbom:

$$\rho = \rho(T, S) \tag{6.10}$$

Pronos unutrašnje energije i mase otopljene tvari definiran je generaliziranom transportnom difuznom jednadžbom:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} = F_T \frac{\partial}{\partial z}\left(D_v \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \hat{H} + T_S S \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial vS}{\partial y} + \frac{\partial wS}{\partial z} = F_S + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_V \frac{\partial S}{\partial z}\right) + S_S S \tag{6.12}$$

$$(F_T, F_S) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_h \frac{\partial}{\partial y}\right)\right](T, S) \tag{6.13}$$

91

$$(F_T, F_S) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_h \frac{\partial}{\partial y}\right)\right](T, S) \tag{6.13}$$

$$D_h = \frac{\upsilon_{tH}}{\sigma_T} \quad ; \quad D_v = \frac{\upsilon_{tV}}{\sigma_T} \tag{6.14}$$

gdje je: D_h, D_v koeficijenti turbulentne difuzije za horizontalni i vertikalni smjer; $\hat{H}$ član intenziteta izvora putem toplinske izmjene sa atmosferom; T_S, S_S temperatura i salinitet u izvoru; F_T, F_S članovi horizontalne turbulentne difuzije za skalarna polja T i S; σ_T Prantlov broj (=0,9 empirijska konstanta k-ε modela).

92

Rubni uvjet za temperaturu i salinitet na površini ($z = \eta$) i dnu ($z = -d$) definirani su kako slijedi:

$$D_h \frac{\partial T}{\partial z} = v \frac{Q_{UK}}{\rho_0 c_p} + T_p \hat{P} - T_e \hat{E} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (\text{za } z = \eta) \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \tag{6.16}$$

gdje je: Q_{UK} ukupni površinski tok topline; c_p specifični toplinski kapacitet vode (4217 J/kg ^{0}K).

93

Ukoliko se uključi toplinska izmjena sa atmosferom, član evaporacije poprima oblik:

$$\hat{E} = \begin{cases} \dfrac{q_E}{\rho_0 l_v} & q_E > 0 \\ 0 & q_E \leq 0 \end{cases} \tag{6.17}$$

gdje je: q_E tok latentne topline; l_v latentna toplina prelaska vode u paru.

94

Jednadžba pronosa (kontinuiteta) za skalarna polja glasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial uC}{\partial x}+\frac{\partial vC}{\partial y}+\frac{\partial wC}{\partial z}=F_c+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_v\frac{\partial C}{\partial z}\right)-k_pC+C_sS \tag{6.18}$$

$$\left(F_C\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_h\frac{\partial}{\partial y}\right)\right](C) \tag{6.19}$$

gdje je: C koncentracija skalarnog polja u pronosu; k_p linearnog rata odumiranja skalarnog polja; C_s koncentracija skalarnog polja u pronosu na poziciji izvora; F_c član horizontalne turbulentne difuzije za promatrano skalarno polje.

95

Model turbulencije je definiran na bazi koncepta vrtložne viskoznosti uz separaciju vertikalnog i horizontalnih smjerova. U vertikalnom smjeru primjenjuje se k-ε model sa sljedećim obilježjima:

$$v_{tV}=c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{6.20}$$

gdje je: c_μ (=0,09) empirijska konstanta k - ε modela.

96

Vrijednosti turbulentne kinetičke energije k i njezine disipacije ε dobivaju se iz pripadnih jednadžbi pronosa:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial uk}{\partial x}+\frac{\partial vk}{\partial y}+\frac{\partial wk}{\partial z}=F_k+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_{tV}}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial z}\right)+P+B-\varepsilon \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial v\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial w\varepsilon}{\partial z}=F_\varepsilon+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_{tV}}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)+\frac{\varepsilon}{k}\left(c_{1\varepsilon}P+c_{3\varepsilon}B-c_{2\varepsilon}\varepsilon\right) \tag{6.22}$$

$$P=\frac{\tau_{XZ}}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\tau_{YZ}}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial z}\approx v_{tV}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right) \tag{6.23}$$

$$B=-\frac{v_{tV}}{\sigma_t}N^2 \tag{6.24}$$

$$N^2=-\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{6.25}$$

97

$$\left(F_k,F_\varepsilon\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_h\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\left(k,\varepsilon\right)\quad;\quad D_h=\frac{\upsilon_{tH}}{\sigma_k}\quad;\quad D_h=\frac{\upsilon_{tH}}{\sigma_\varepsilon} \tag{6.26}$$

gdje je: σ_k (=1), σ_ε (=1,3), $c_{1\varepsilon}$ (=1,44), $c_{2\varepsilon}$ (=1,92), $c_{3\varepsilon}$ (=0) empiričke konstante k-ε modela; P produkcija posmičnog naprezanja; B član produkcije uzgonskog djelovanja; N Brunt-Vaeisalae frekvencija; F_k , F_ε članovi horizontalne turbulentne difuzije.

98

Rubni uvjet za turbulentnu kinetičku energiju k i ratu njezine disipacije ε na slobodnoj površini ($z = \eta$) ovisi o površinskom naprezanju uslijed djelovanja vjetra $U_{\tau s}$:

$$k = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} U_{\tau s}^2 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{U_{\tau s}^2}{\kappa \Delta z_S} \quad \text{za} \quad U_{\tau s} > 0 \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\left(k\sqrt{c_\mu}\right)^{3/2}}{a \kappa h} \quad \text{za} \quad U_{\tau s} = 0 \tag{6.28}$$

gdje je: a (=0,07) empirička konstanta; Δz_S vertikalna udaljenost od površine na kojoj je primijenjen rubni uvjet.

99

Rubni uvjet za turbulentnu kinetičku energiju k i ratu njezine disipacije ε na dnu (z = -d) definiran je na sljedeći način:

$$k = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} U_{\tau b}^2 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{U_{\tau b}^2}{k \Delta z_b} \tag{6.29}$$

gdje je: Δz_b vertikalna udaljenost od dna na kojoj je primijenjen rubni uvjet.

Kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti u horizontalnom smjeru υ_{tH} tretiran je Smagorinsky konceptom:

$$\upsilon_{tH} = c_s^2 l^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \tag{6.30}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (i, j = 1,2) \tag{6.31}$$

gdje je: c_s Smagorinsky konstanta; l karakteristična duljina; S_{ij} rata deformacije.

100