

# *Rotacijska dinamika*

**FIZIKA  
PSS-GRAD  
8. studenog 2023.**

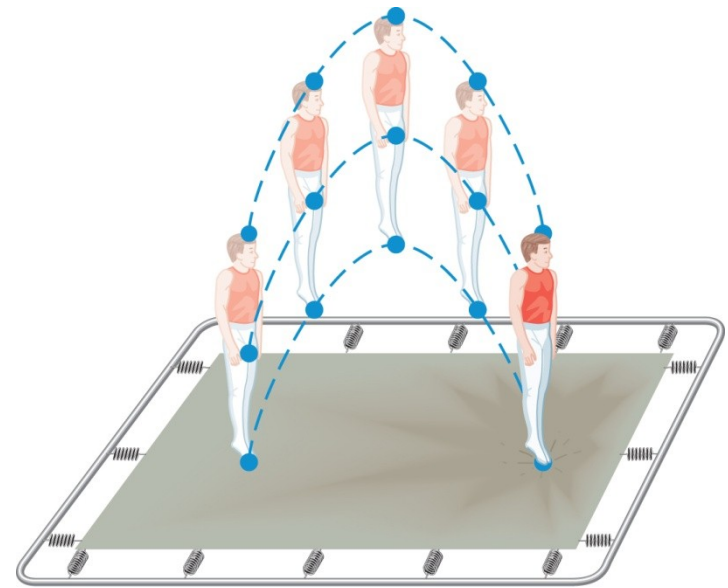


**WILEY**

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

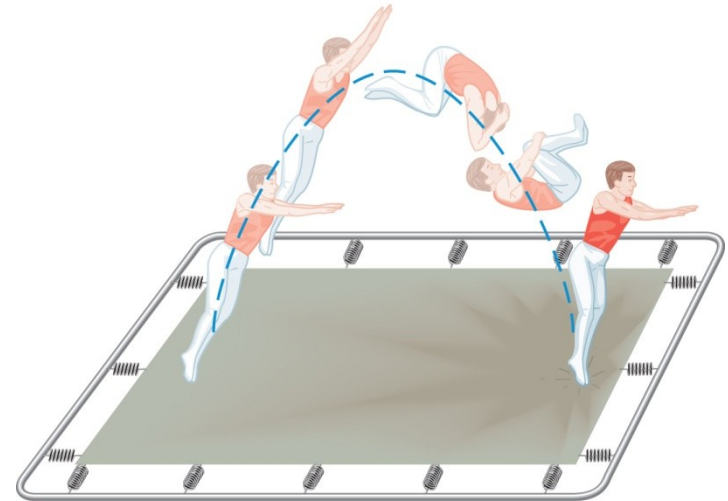
## 9.1 Djelovanje sila na čvrsta tijela i momenti sila

Pri gibanju koje je samo translacijsko sve točke tijela gibaju se po usporednim putanjama.



(a) translacija

Općenito gibanje je kombinacija translacije i rotacije.



(b) kombinacija translacije i rotacije

**WILEY**

## 9.1 Djelovanje sila na čvrsta tijela i momenti sila

Prema drugom Newtonovom zakonu, rezultantna sila tijelu daje akceleraciju.

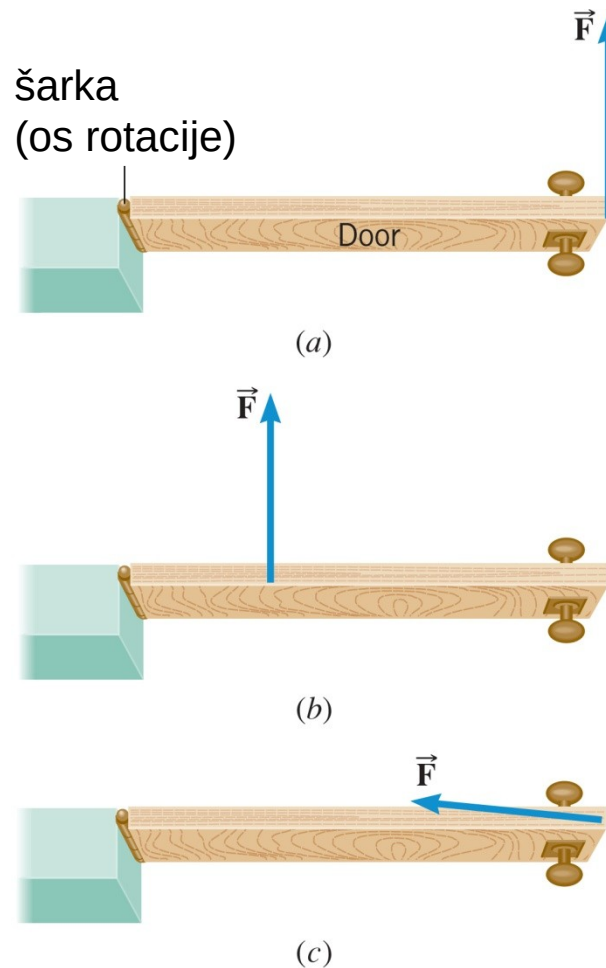
Što tijelu daje *kutnu akceleraciju*?

# MOMENT SILE

WILEY

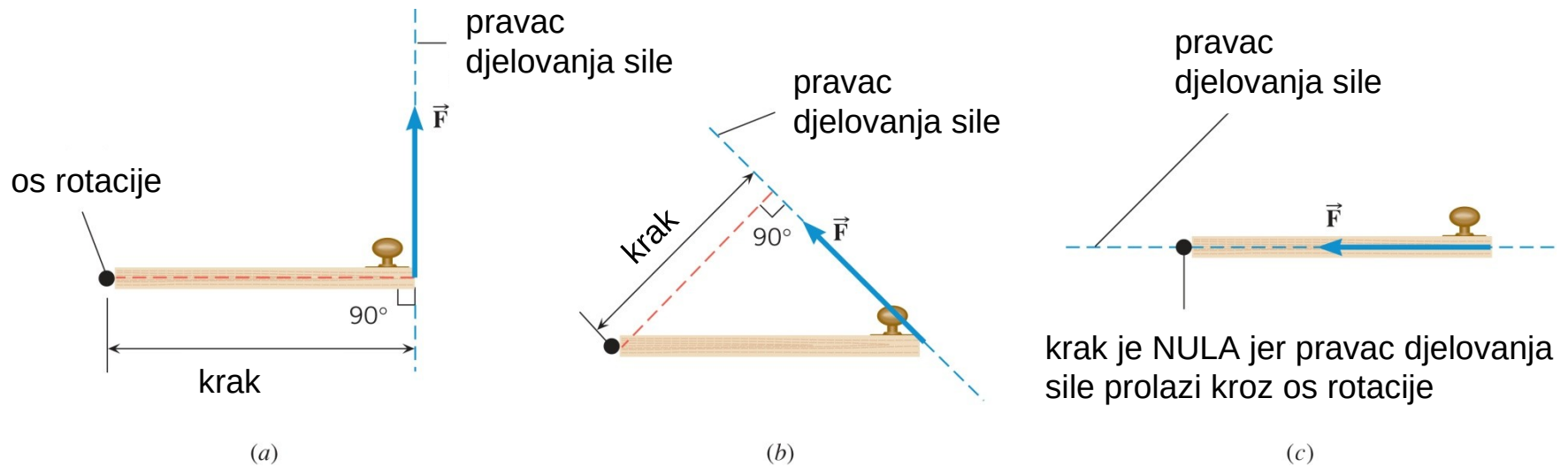
Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

## 9.1 Djelovanje sila na čvrsta tijela i momenti sila



Iznos momenta sile ovisi o hvatištu sile i o smjeru sile, kao i o položaju osi rotacije.

## 9.1 Djelovanje sile na čvrsta tijela i momenti sile



### DEFINICIJA MOMENTA SILE

iznos momenta sile = (iznos sile) x (krak)

$$\tau = F l$$

**Smjer:** Moment sile je pozitivan kad sila daje rotaciju oko osi u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.

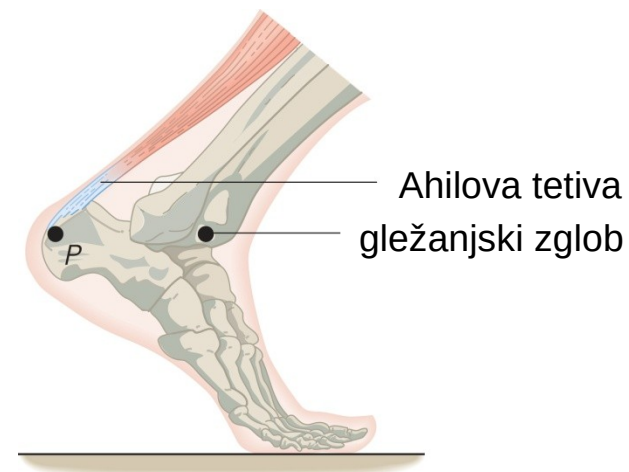
**Jedinica SI za moment sile:** njutn x metar (N·m)

WILEY

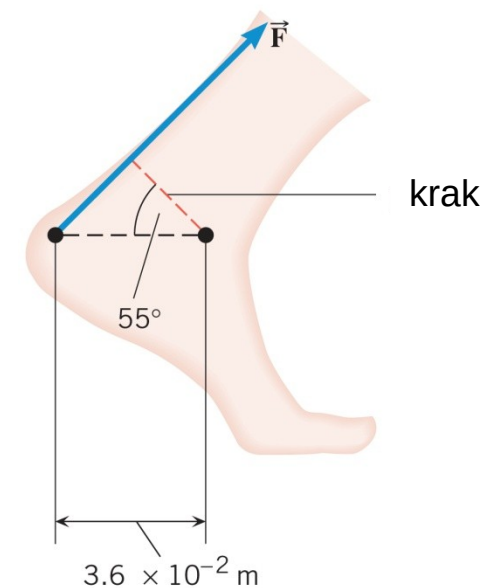
## 9.1 Djelovanje sila na čvrsta tijela i momenti sila

### Primjer 2 Ahilova tetiva

Tetiva djeluje silom iznosa 790 N.  
Odredite moment te sile  
(iznos i smjer) na gležanjski zglob.



(a)



(b)

WILEY

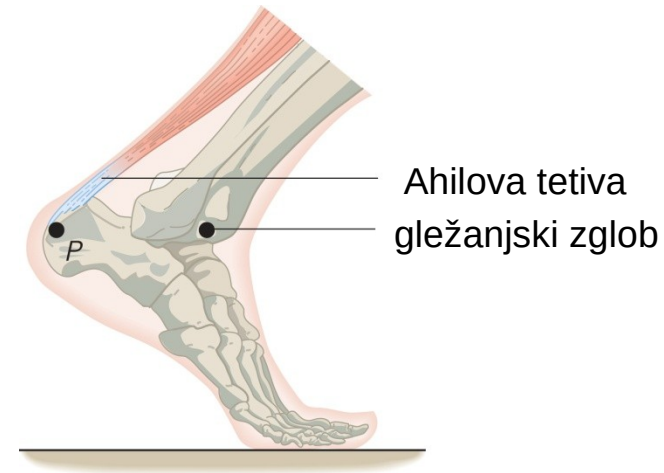
## 9.1 Djelovanje sila na čvrsta tijela i momenti sila

$$\tau = F l$$

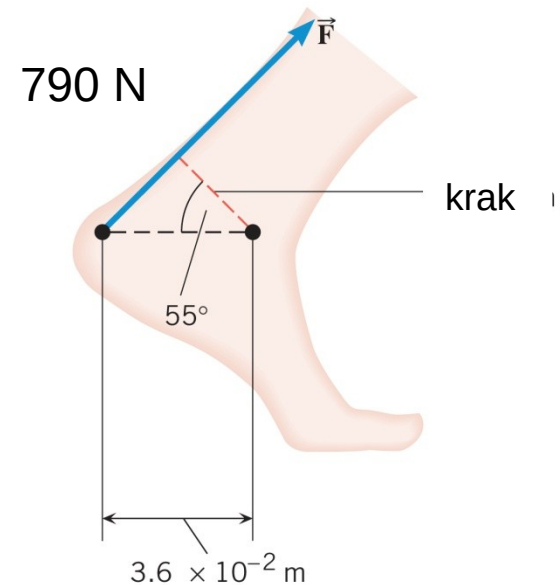
$$\cos 55^\circ = \frac{l}{3,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\tau = 790 \text{ N} \cdot 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \cos 55^\circ$$

$$\tau = 16 \text{ Nm}$$



(a)



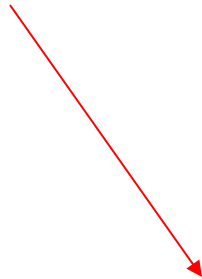
(b)

**WILEY**

## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži

Ako je čvrsto tijelo u ravnoteži onda se ne mijenja ni njegovo translacijsko ni njegovo rotacijsko gibanje.

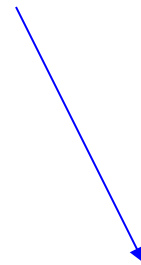
$$a_x = a_y = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\alpha = 0$$



$$\sum \tau = 0$$



### RAVNOTEŽA ČVRSTOG TIJELA

Čvrsto tijelo je u ravnoteži ako su mu i translacijska akceleracija i kutna akceleracija jednake nuli.

U ravnoteži je zbroj svih vanjskih sila nula i zbroj svih vanjskih momenata sila nula.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau = 0$$

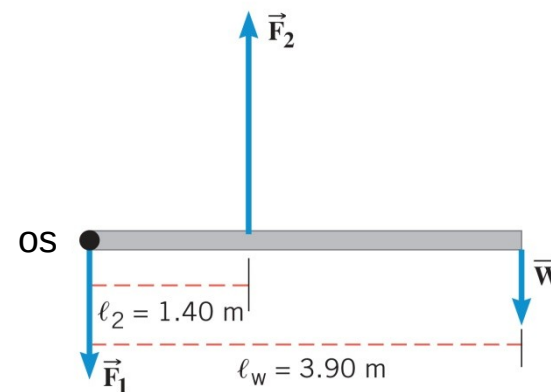
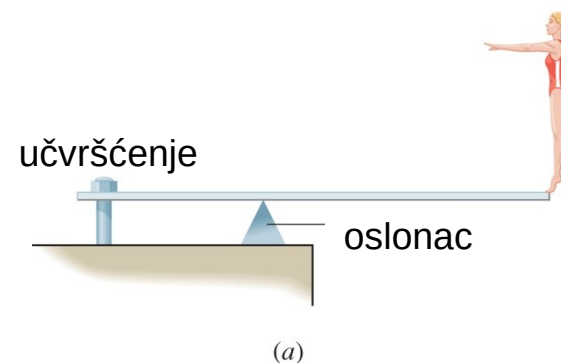
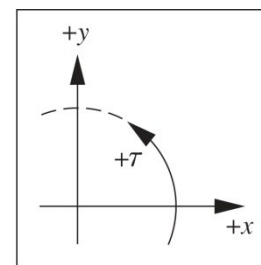
### Strategija za rješavanje problema

1. Odaberite tijelo na koje se primjenjuju jednačbe ravnoteže.
2. Nacrtajte dijagram slobodnog tijela koji prikazuje sve vanjske sile koje djeluju na tijelo.
3. Odaberite osi  $x$  i  $y$  te sve sile rastavite na komponente duž tih osi.
4. Izjednačite ukupne sile u  $x$  i  $y$  smjeru s nulom.
5. Odaberite prikladnu os rotacije. izjednačite sve momente sila oko te osi s nulom.
6. Rješite jednačbe.

### Primjer 3 Odskočna daska

Žena, čija je težina 530 N, stoji na kraju odskočne daske duljine 3,90 m. Težina daske je zanemariva, a oslonac se nalazi 1,40 m od lijevoga kraja.

Odredite sile kojima učvršćenje i oslonac djeluju na dasku.



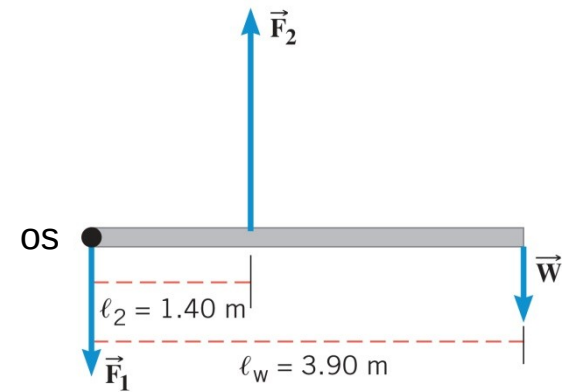
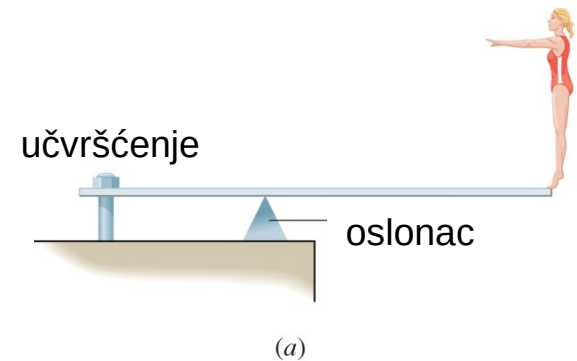
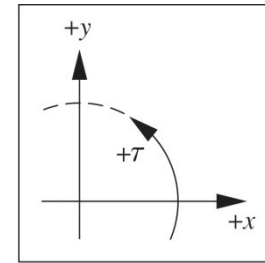
dijagram slobodnog tijela odskočne daske

## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži

$$\sum \tau = F_2 l_2 - W l_W = 0$$

$$F_2 = \frac{530 \text{ N} \cdot 3,90 \text{ m}}{1,40 \text{ m}}$$

$$F_2 = 1480 \text{ N}$$



dijagram slobodnog tijela odskočne daske

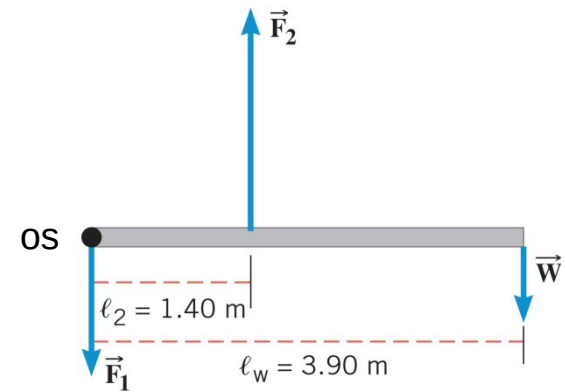
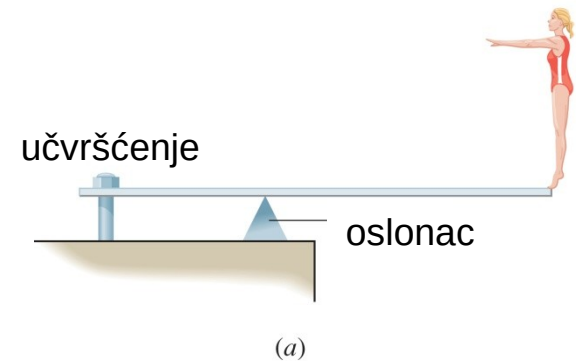
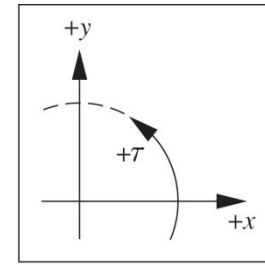
**WILEY**

## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži

$$\sum F_y = -F_1 + F_2 - W = 0$$

$$-F_1 + 1480 \text{ N} - 530 \text{ N} = 0$$

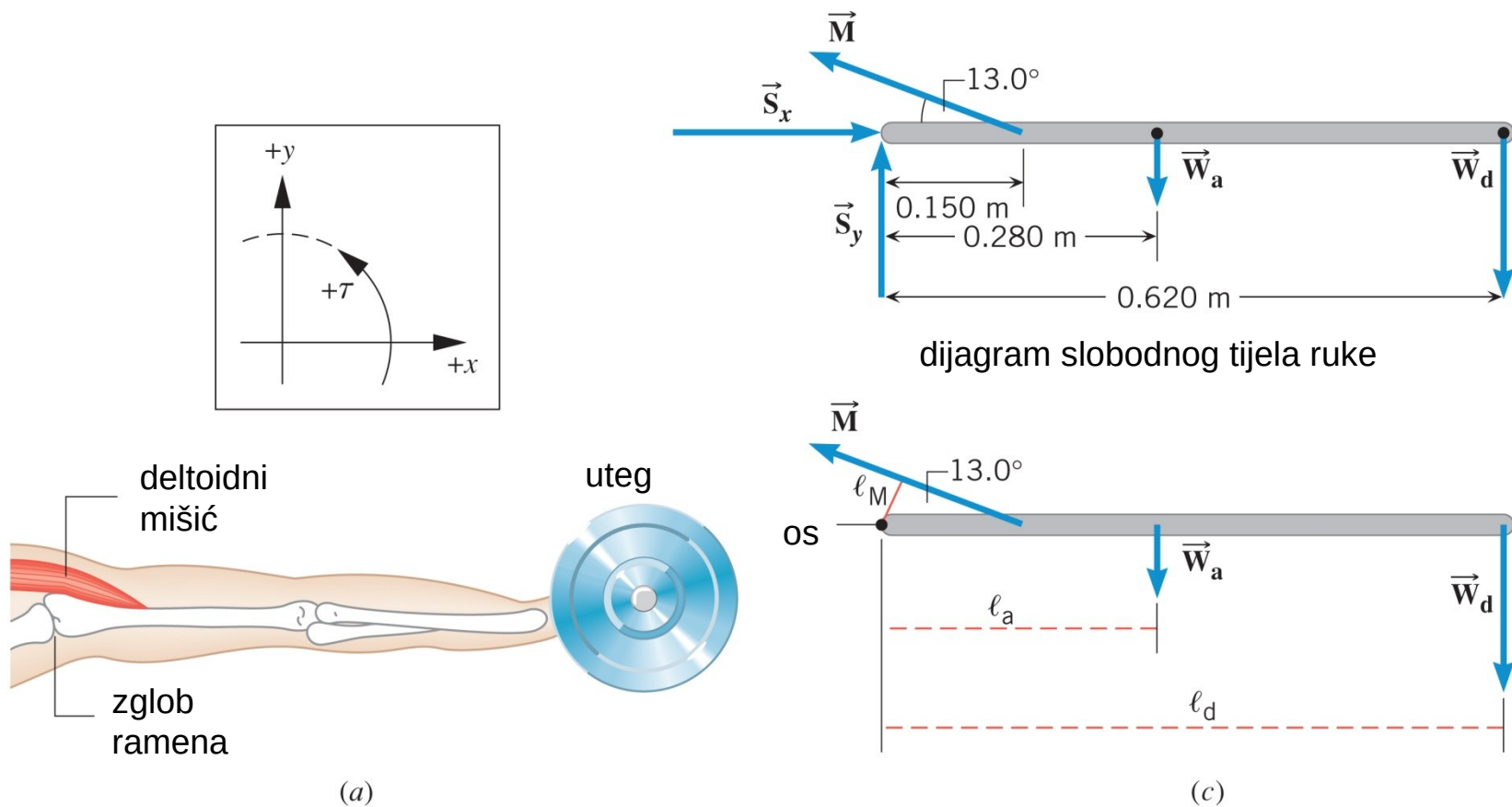
$$F_1 = 950 \text{ N}$$



dijagram slobodnog tijela odskočne daske

**WILEY**

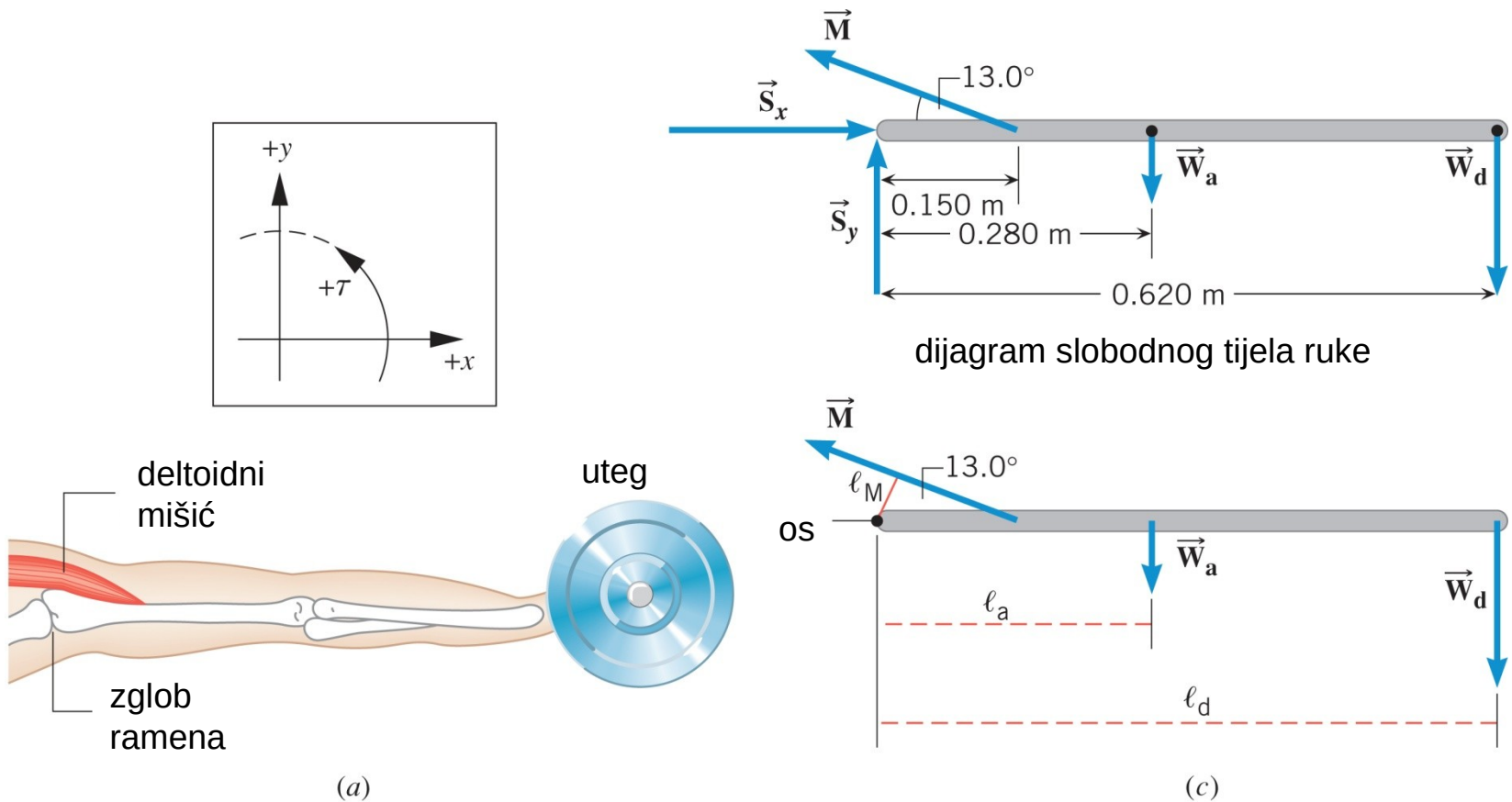
## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži



### Primjer 5 Bodibilding

Ruka je ispružena i teži  $31,0\text{ N}$ . Deltoidni mišić može izdržati silu od  $1840\text{ N}$ . Koliko teži najteži uteg koji se može držati u tom položaju?

## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži

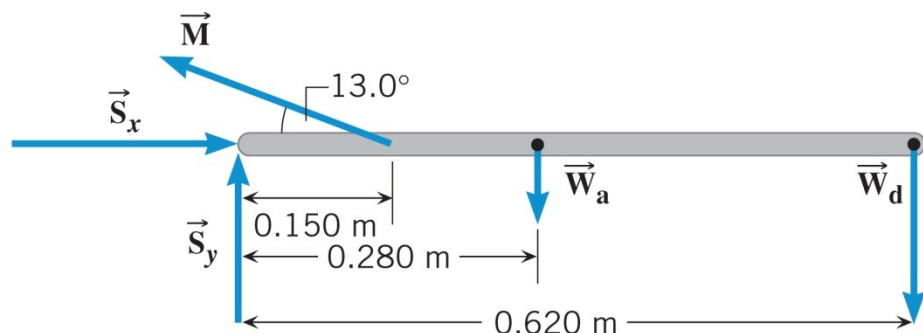
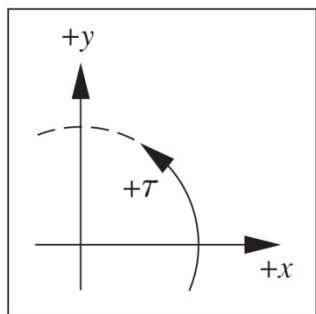


$$\sum \tau = -W_a l_a - W_d l_d + M l_M = 0$$

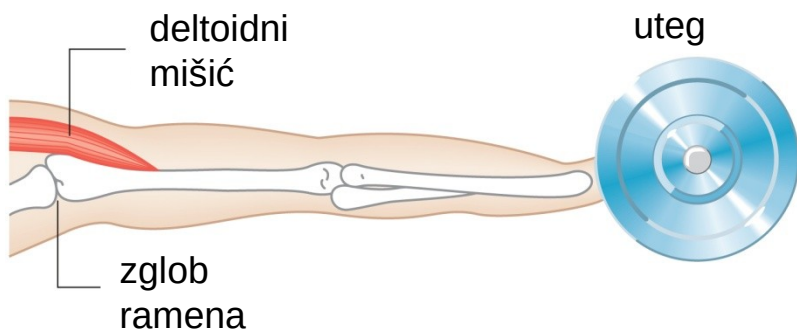
$$l_M = 0,150 \text{ m} \cdot \sin 13,0^\circ$$

WILEY

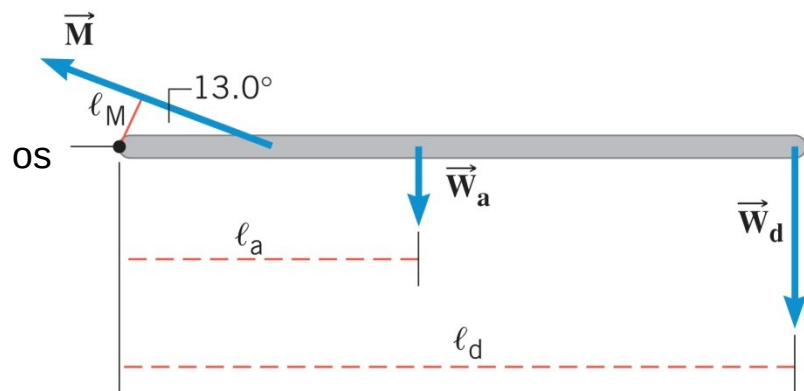
## 9.2 Čvrsta tijela u ravnoteži



dijagram slobodnog tijela ruke



(a)



(c)

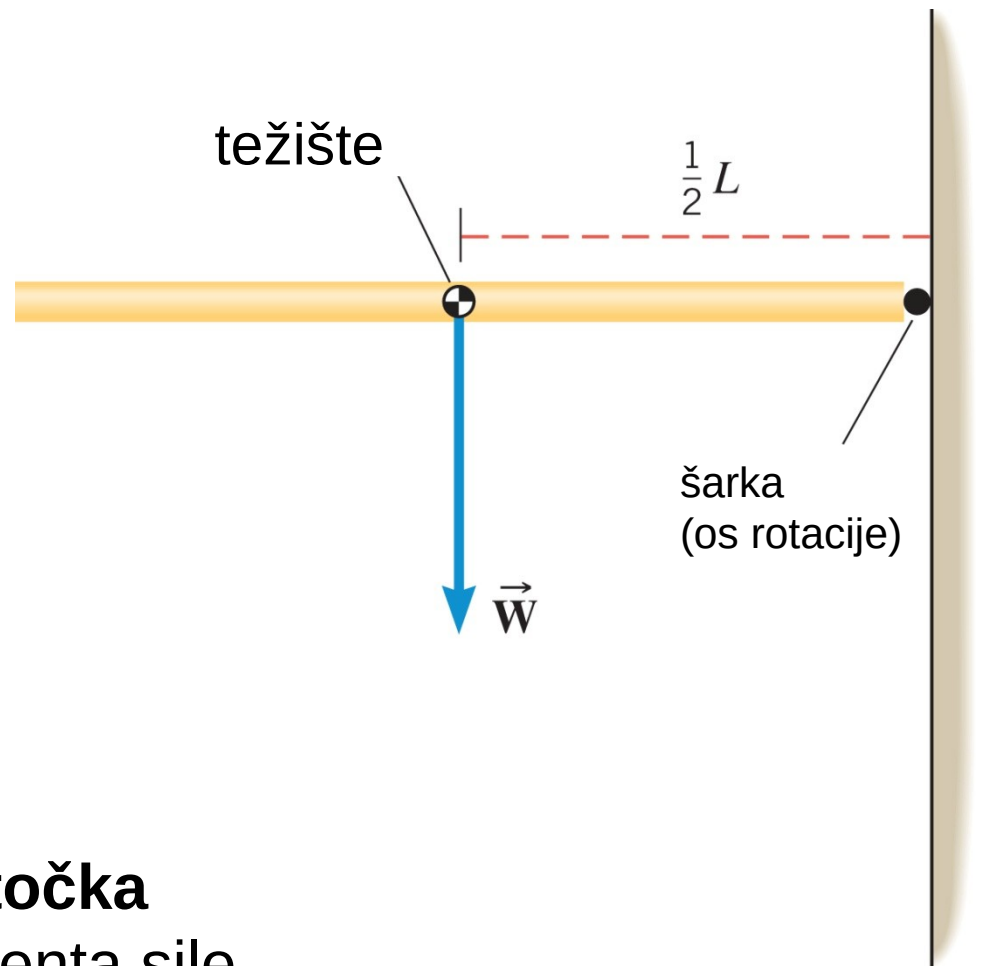
$$W_d = \frac{-W_a l_a + M l_M}{l_d}$$

$$W_d = \frac{-31,0 \text{ N} \cdot 0,280 \text{ m} + 1840 \text{ N} \cdot 0,150 \text{ m} \cdot \sin 13,0^\circ}{0,620 \text{ m}} = 86,1 \text{ N}$$

WILEY



## 9.3 Težište

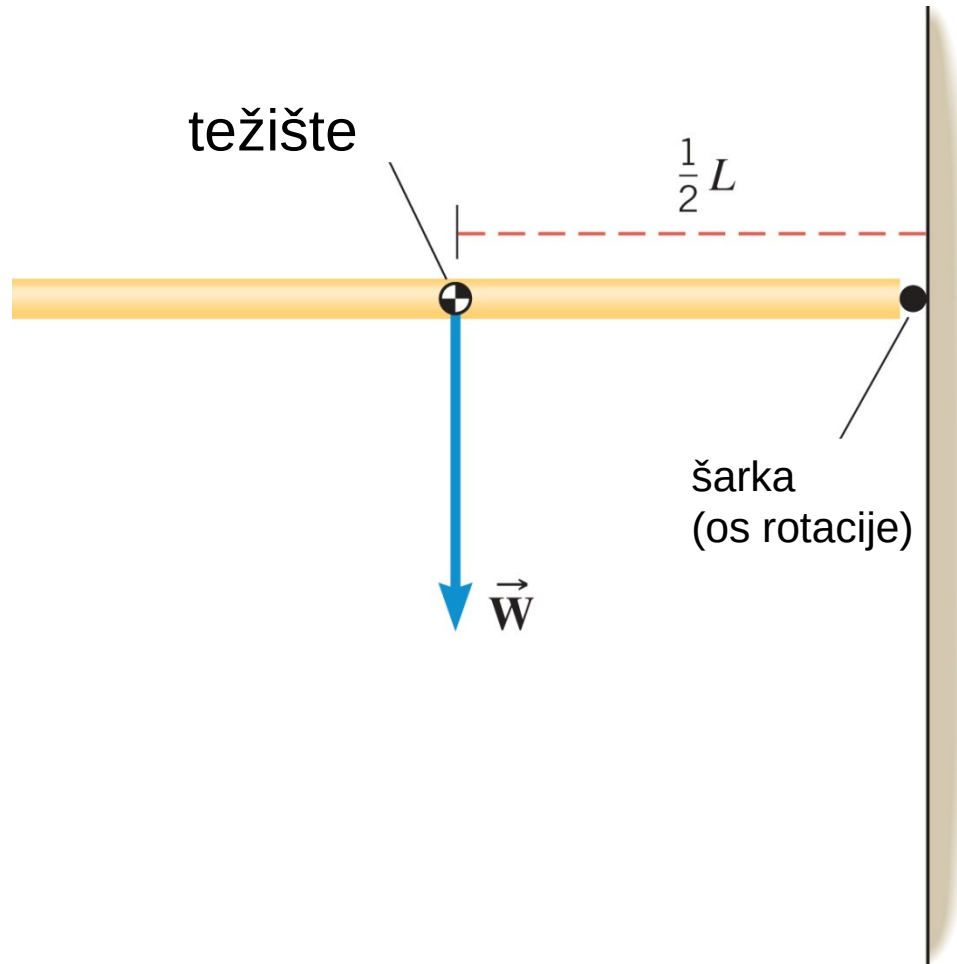


### DEFINICIJA TEŽIŠTA

Težište čvrstog tijela je **točka** koju, pri računanju momenta sile, možemo tretirati kao hvatište težine.

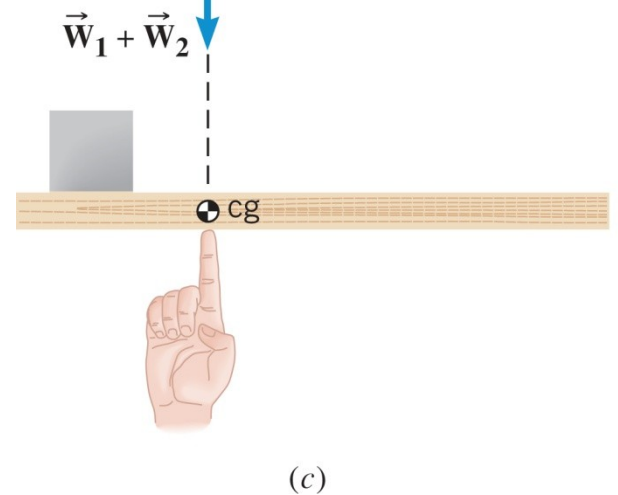
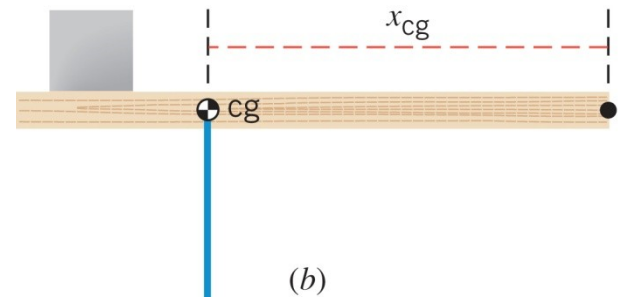
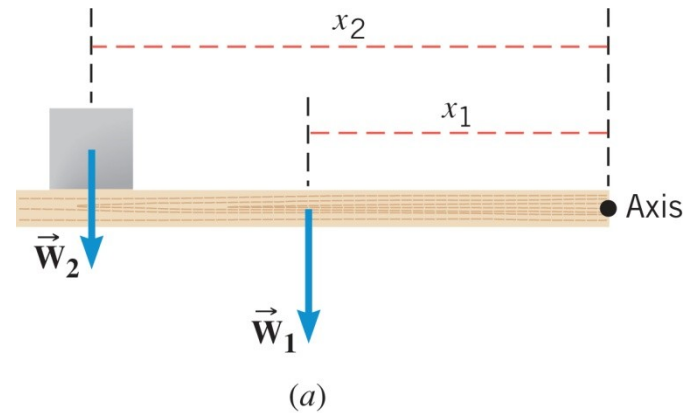
## 9.3 Težište

Kad je tijelo simetrično i njegova težina jednoliko raspoređena, težište se poklapa s geometrijskim središtem.



## 9.3 Težište

$$x_{cg} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \dots}{W_1 + W_2 + \dots}$$

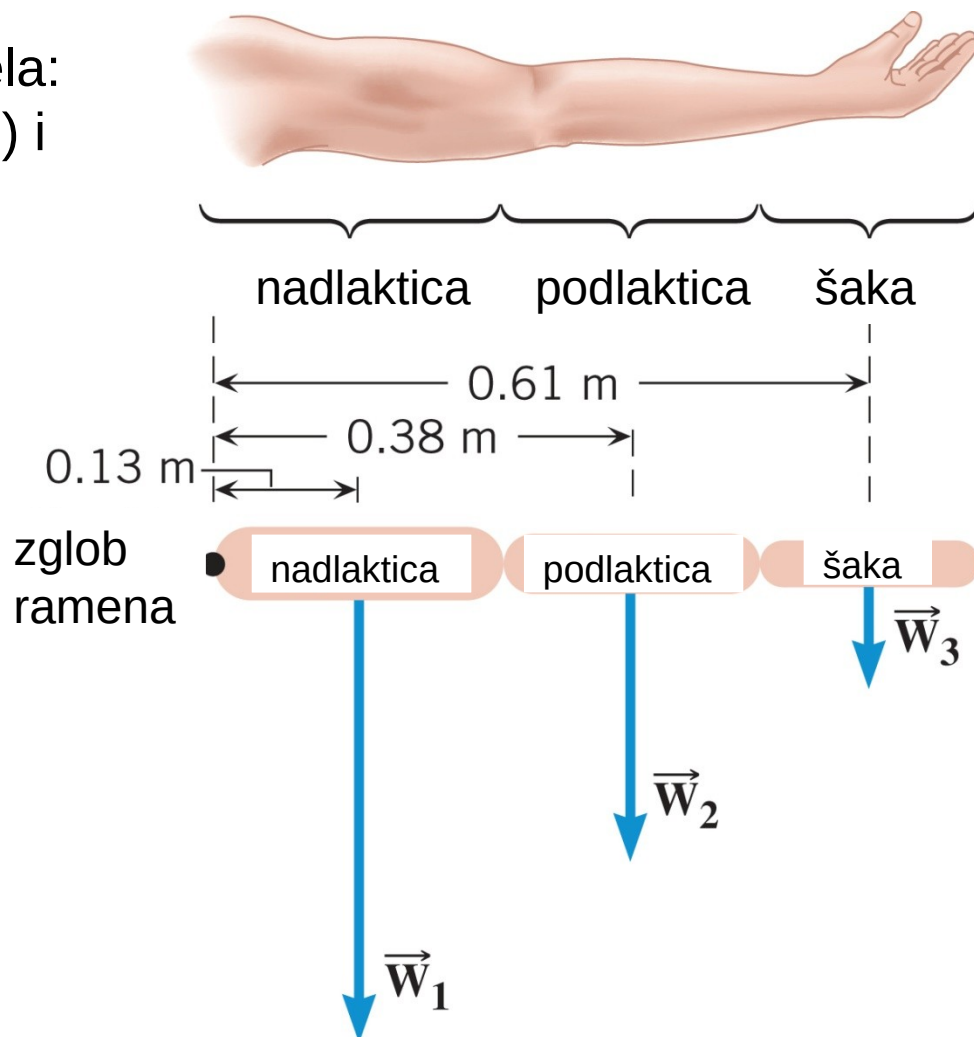


WILEY

### Primjer 6 Težište ruke

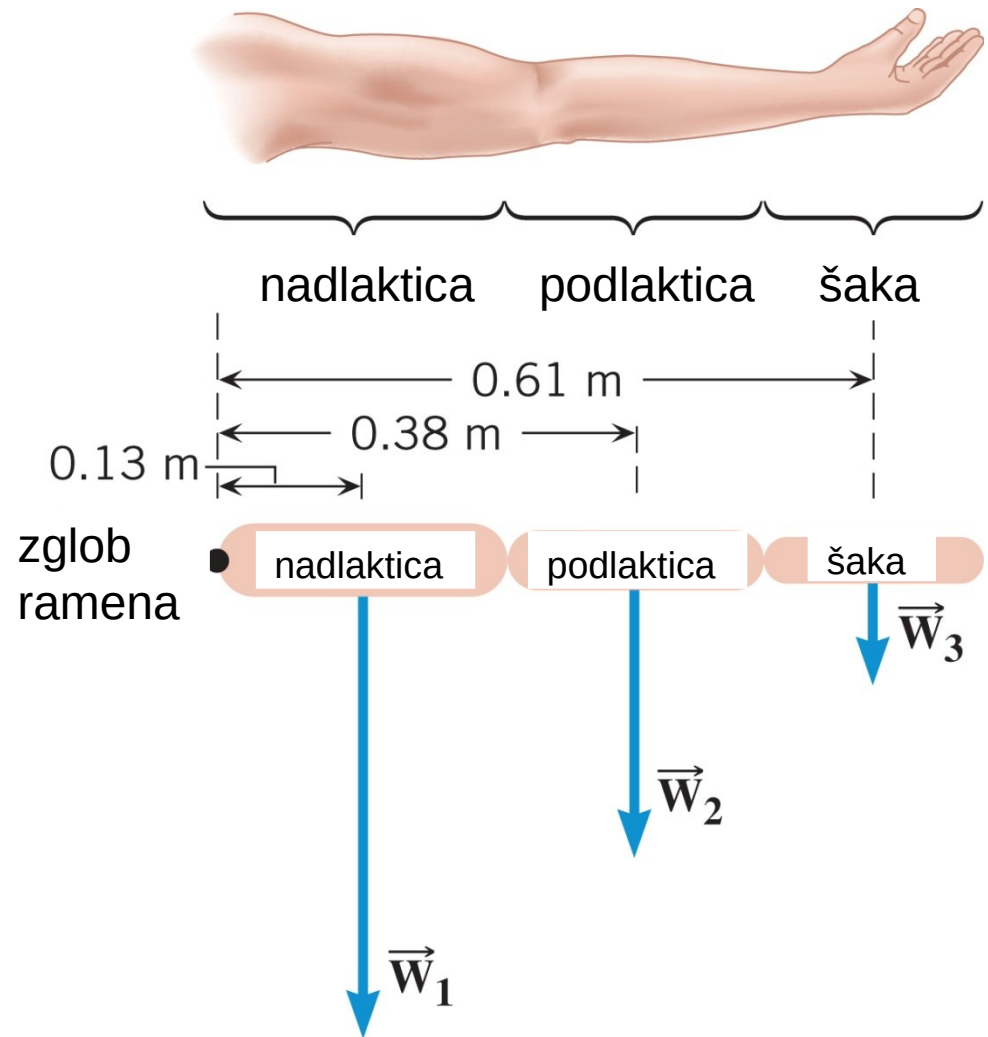
Ispružena ruka sastoji se od tri dijela: nadlaktice (17 N), podlaktice (11 N) i šake (4,2 N).

Odredite težište ruke s obzirom na zglob ramena.



## 9.3 Težište

$$x_{cg} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \dots}{W_1 + W_2 + \dots}$$



$$x_{cg} = \frac{17 \text{ N} \cdot 0,13 \text{ m} + 11 \text{ N} \cdot 0,38 \text{ m} + 4,2 \text{ N} \cdot 0,61 \text{ m}}{17 \text{ N} + 11 \text{ N} + 4,2 \text{ N}} = 0,28 \text{ m}$$

WILEY

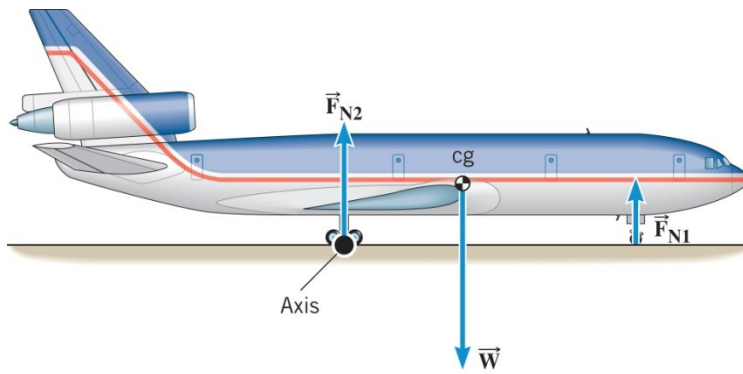
## Konceptualni primjer 7 Prekrncani teretni avion

Ova se nezgoda dogodila jer je stražnji dio aviona bio prekrncan. Kako je pomak težišta aviona doveo do nezgode?

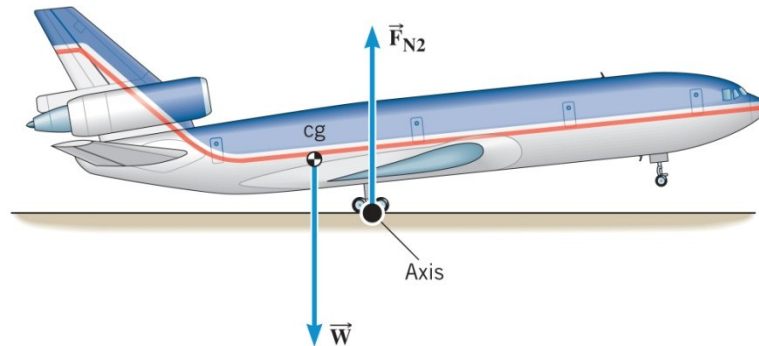


©AP/Wide World Photos

(a)

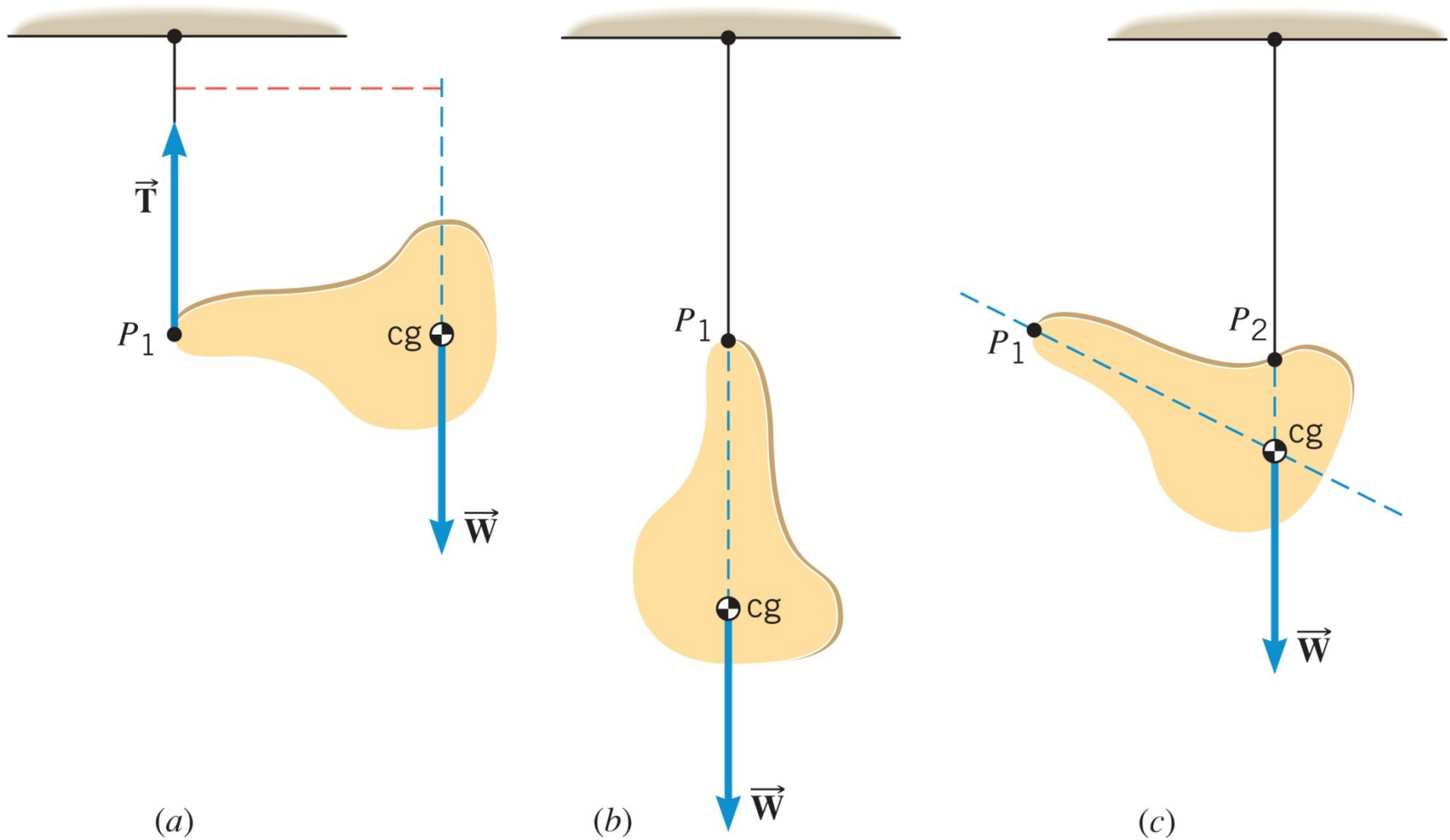


(b)



(c)

## 9.3 Težište



Određivanje težišta nepravilnog lika.

**WILEY**

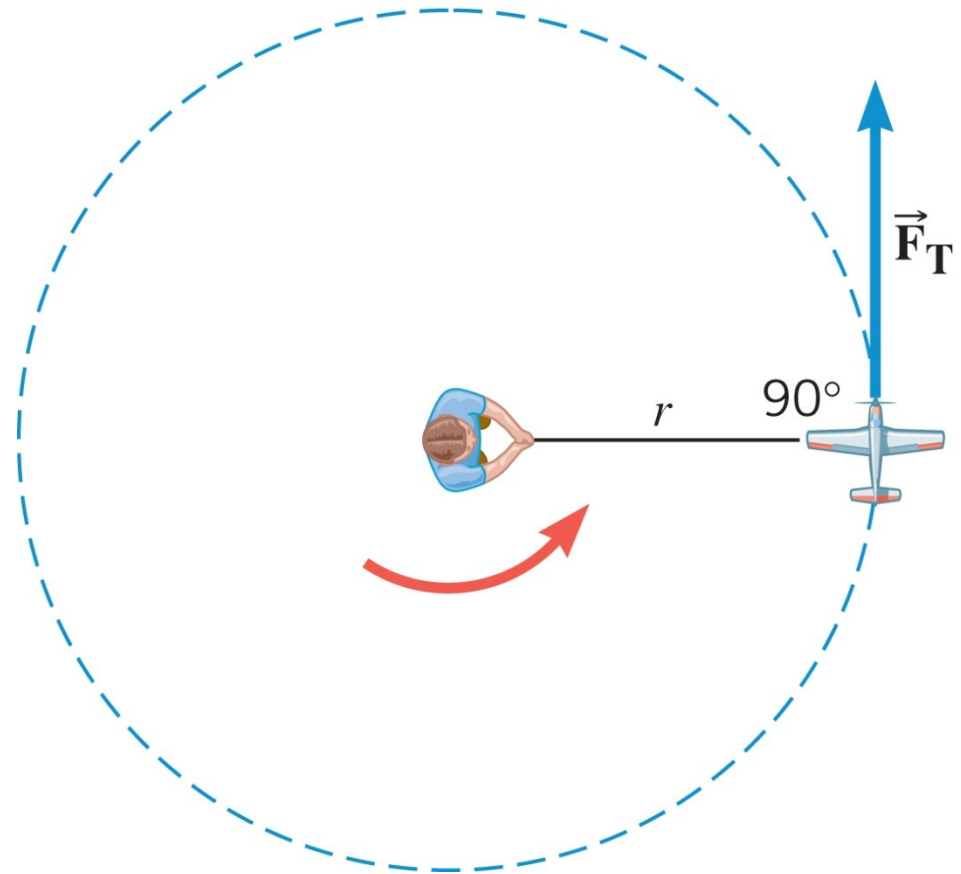
Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

$$F_T = m a_T$$

$$a_T = r \alpha$$

$$\tau = F_T r$$



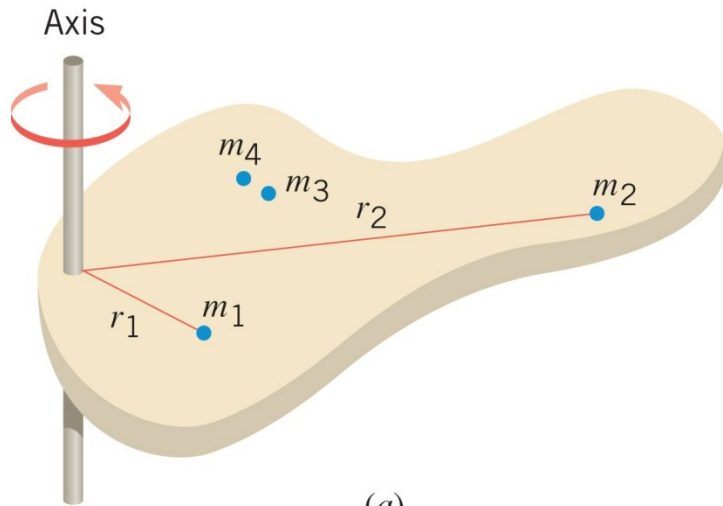
$$\tau = m a_T r = m r \alpha r = m r^2 \alpha = I \alpha$$

MOMENT TROMOSTI

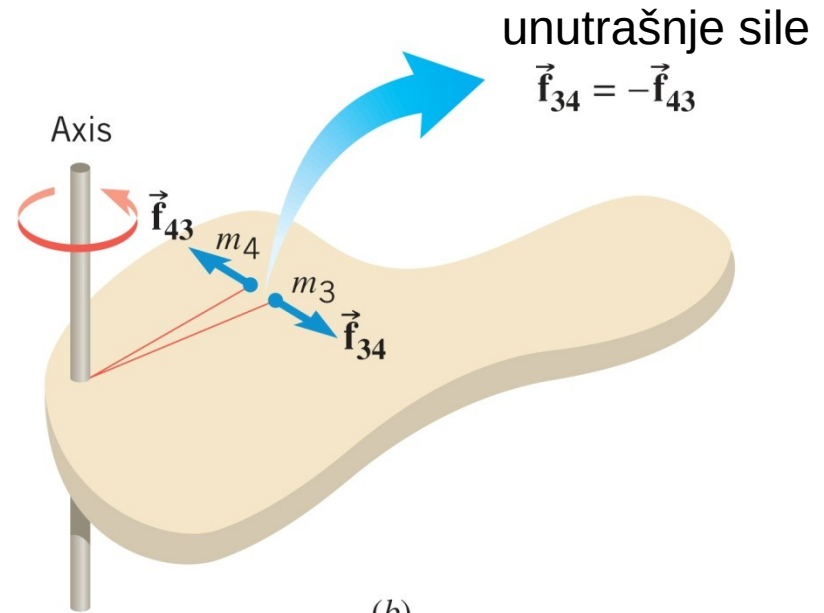
WILEY



## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi



(a)



(b)

$$\sum \tau = \sum (m r^2) \alpha$$

ukupni vanjski  
moment sile

moment  
tromosti

$$\tau_1 = (m_1 r_1^2) \alpha$$

$$\tau_2 = (m_2 r_2^2) \alpha$$

⋮

$$\tau_N = (m_N r_N^2) \alpha$$

WILEY

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

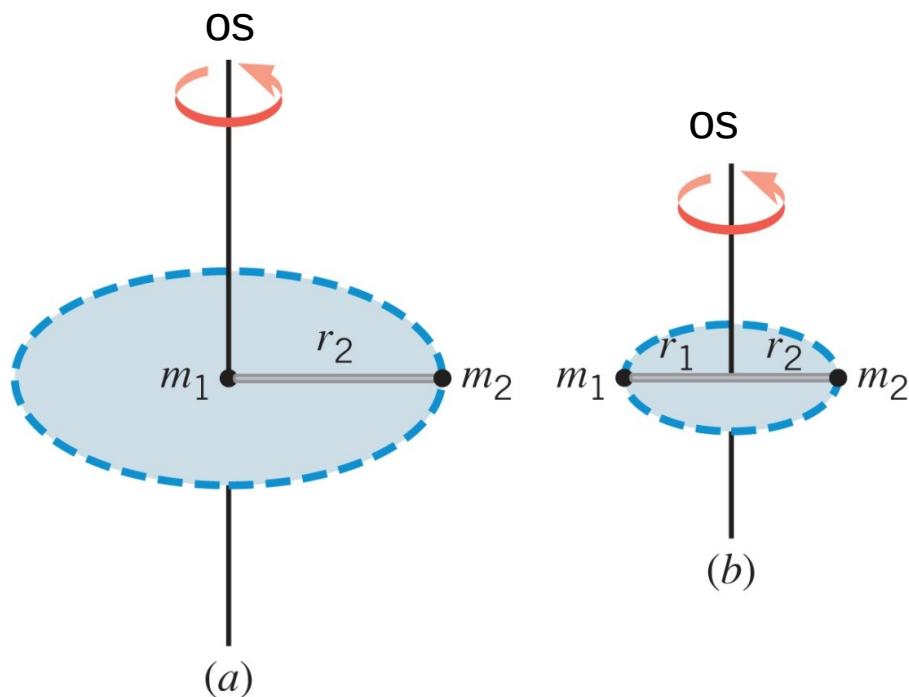
ROTACIJSKA ANALOGIJA NEWTONOVOG DRUGOG ZAKONA  
ZA ČVRSTO TIJELO KOJE ROTIRA OKO FIKSNE OSI

$$\sum \tau = I \alpha$$

$$\sum F = m a$$

### Primjer 9 Moment tromosti ovisi o položaju osi

Dvije čestice (svaka mase  $m$ ) pričvršćene su na krajeve čvrstog štapa (zanemarive mase). Duljina štapa je  $L$ . Odredite moment tromosti sustava ako je os rotacije okomita na štap i prolazi kroz: (a) jedan kraj; (b) središte.



## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

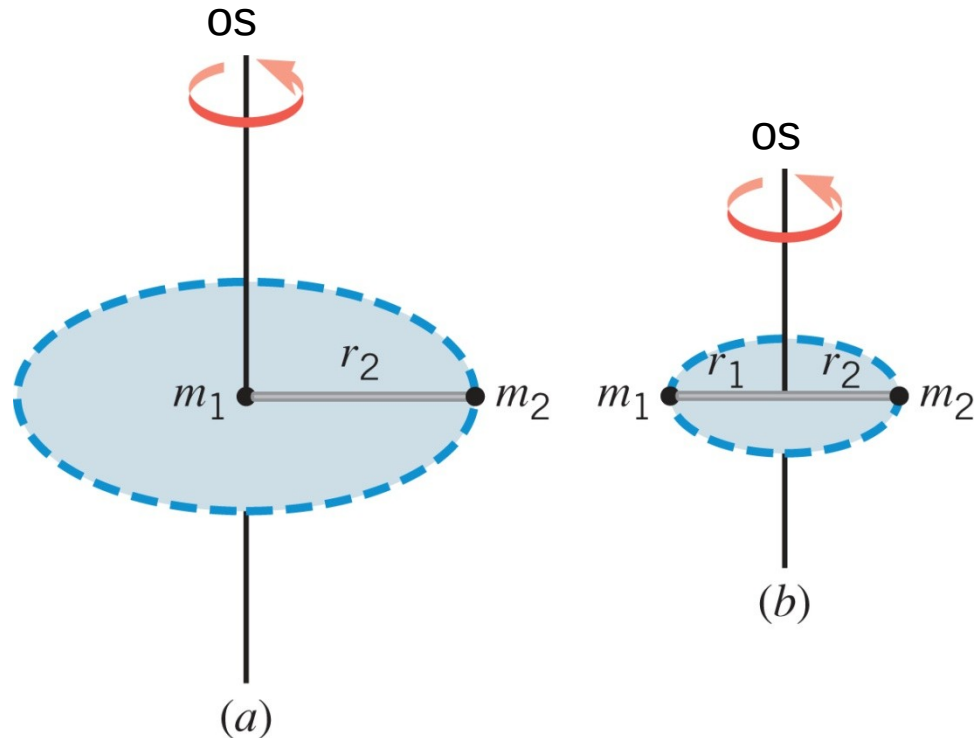
$$(a) \quad I = \sum_i^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = L$$

$$I = m \cdot 0^2 + m L^2$$

$$I = m L^2$$



WILEY

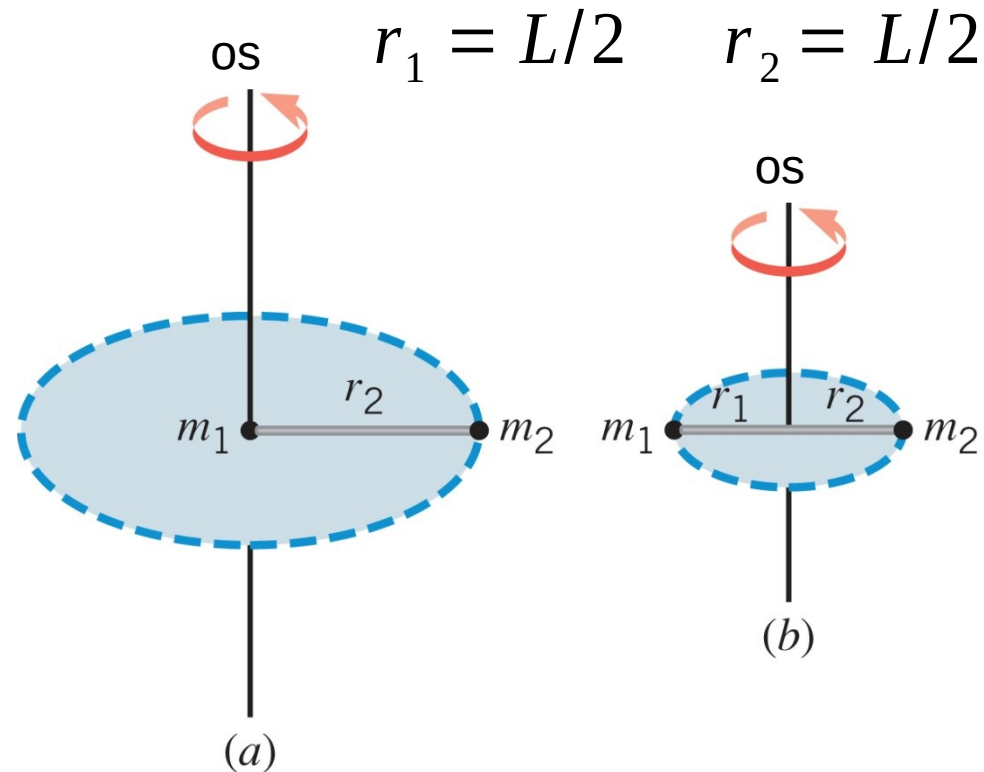
## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

$$(a) \quad I = \sum_i^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$I = m \left( \frac{L}{2} \right)^2 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{1}{2} m L^2$$

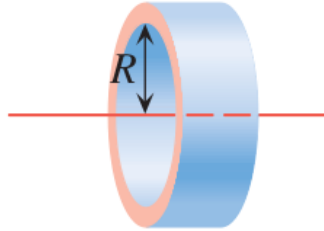


WILEY

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

---

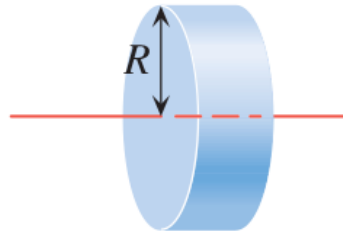
prsten



$$I = MR^2$$

---

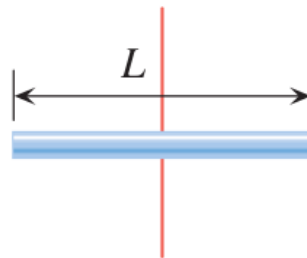
disk



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

---

tanki štap, os kroz središte



$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

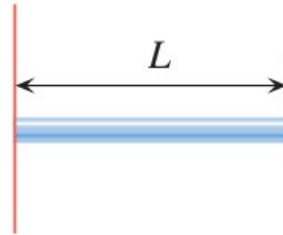
---

**WILEY**

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

---

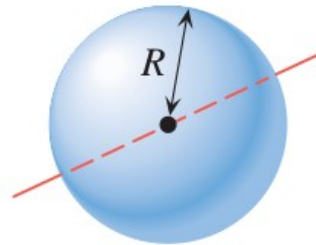
tanki štap, os kroz jedan kraj



$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

---

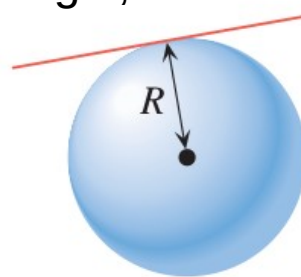
puna kugla, os kroz središte



$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

---

puna kugla, os kroz rub



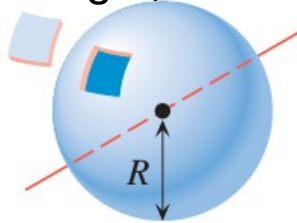
$$I = \frac{7}{5}MR^2$$

---

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

---

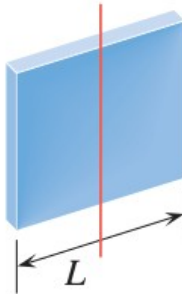
šuplja kugla, os kroz središte



$$I = \frac{2}{3}MR^2$$

---

tanka pravokutna ploča, os kroz središte



$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

---

tanka pravokutna ploča, os kroz rub



$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

---

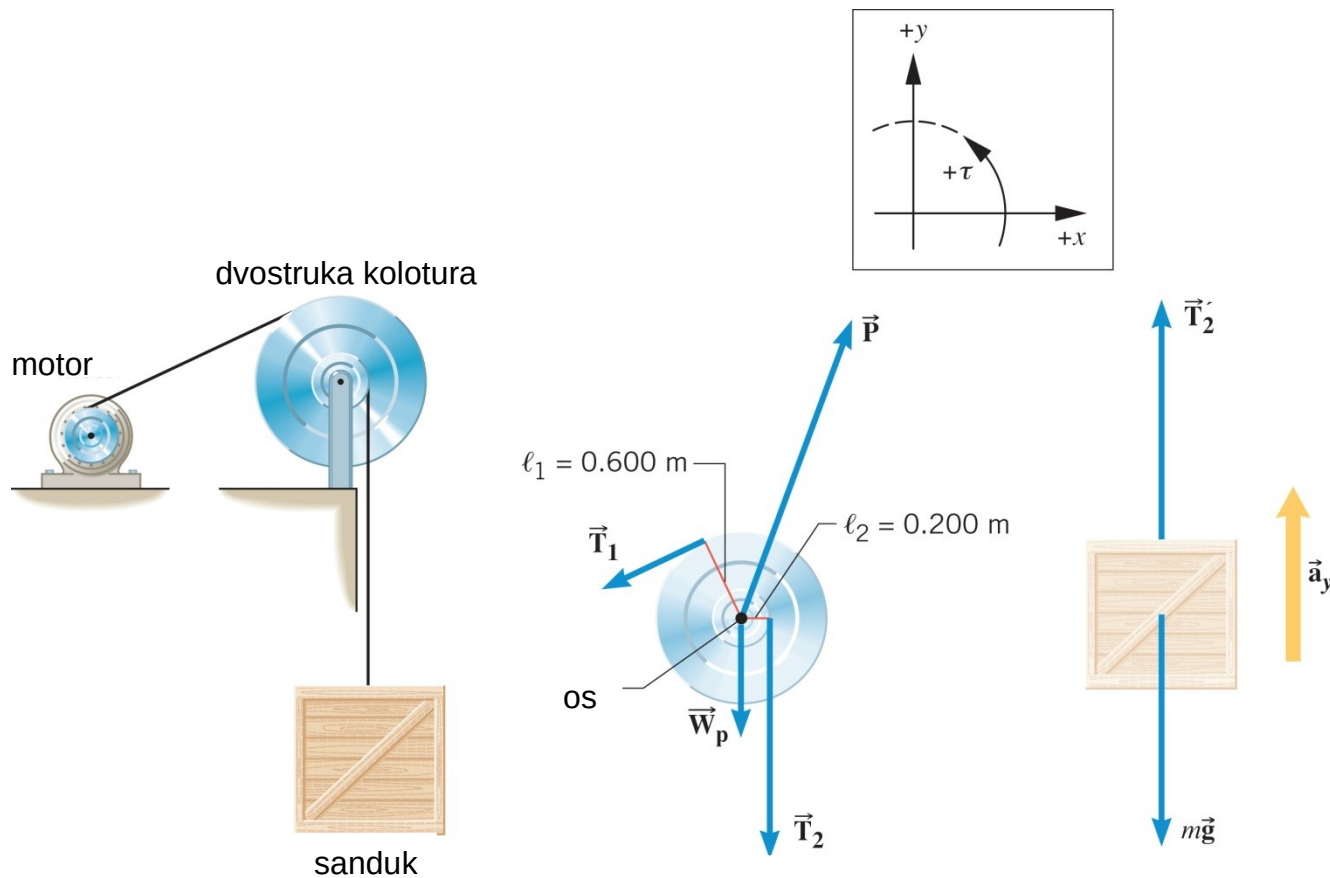
**WILEY**



## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

### Primjer 12 Dizanje sanduka

Ukupni moment tromosti dvostruke koloture je  $46,0 \text{ kg m}^2$ . Težina sanduka je  $4420 \text{ N}$ , a napetost kabla pričvršćenog za motor  $2150 \text{ N}$ . Odredite kutnu akceleraciju dvostruke koloture.



WILEY

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

$$\sum \tau = I \alpha$$

$$\sum F = m a$$

$$T_1 l_1 - T_2 l_2 = I \alpha$$

$$T_2 - m g = m a$$

$$a = l_2 \cdot \alpha$$

## 9.4 Drugi Newtonov zakon za rotacijsko gibanje oko čvrste osi

$$T_1 l_1 - T_2 l_2 = I \alpha \quad T_2 = mg + m l_2 \alpha$$

$$T_1 l_1 - (mg + m l_2 \alpha) l_2 = I \alpha$$

$$\alpha = \frac{T_1 l_1 - G l_2}{I + l_2^2 G / g}$$

$$\alpha = \frac{2150 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m} - 4420 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m}}{46 \text{ kgm}^2 + 4420 \text{ N} \cdot (0,2 \text{ m})^2 / (9,8 \text{ ms}^{-2})} = 6,34 \text{ rad s}^{-2}$$

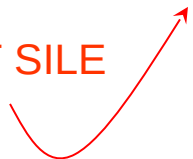
9.5 Rad i energija pri rotaciji

$$W = F s$$

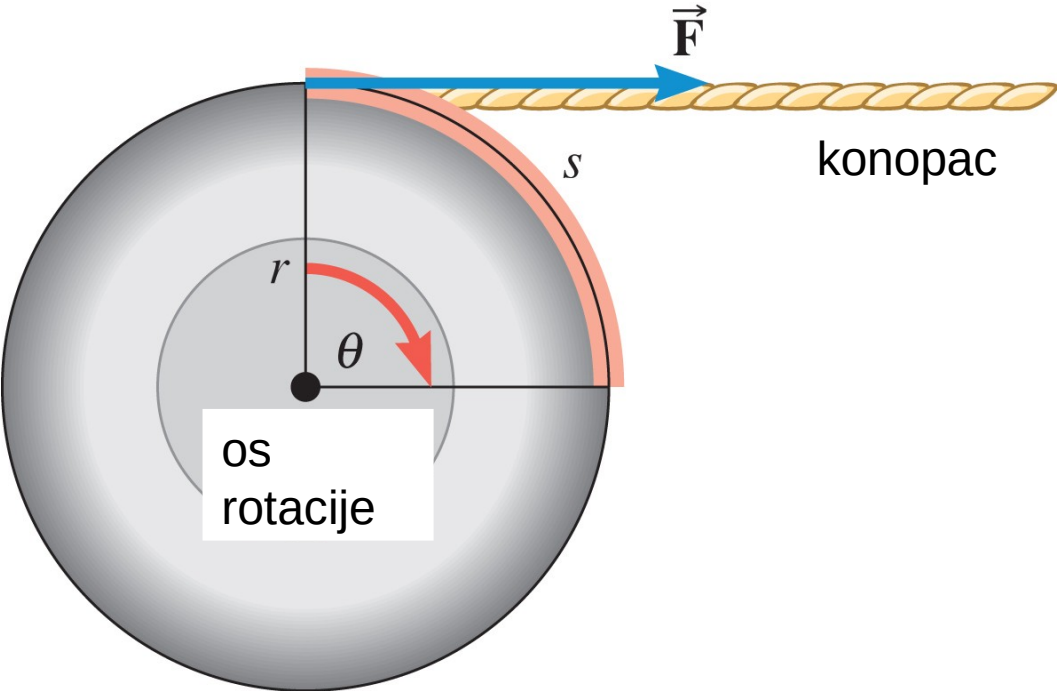
$$s = r \theta$$

$$W = Fr \theta$$

MOMENT SILE



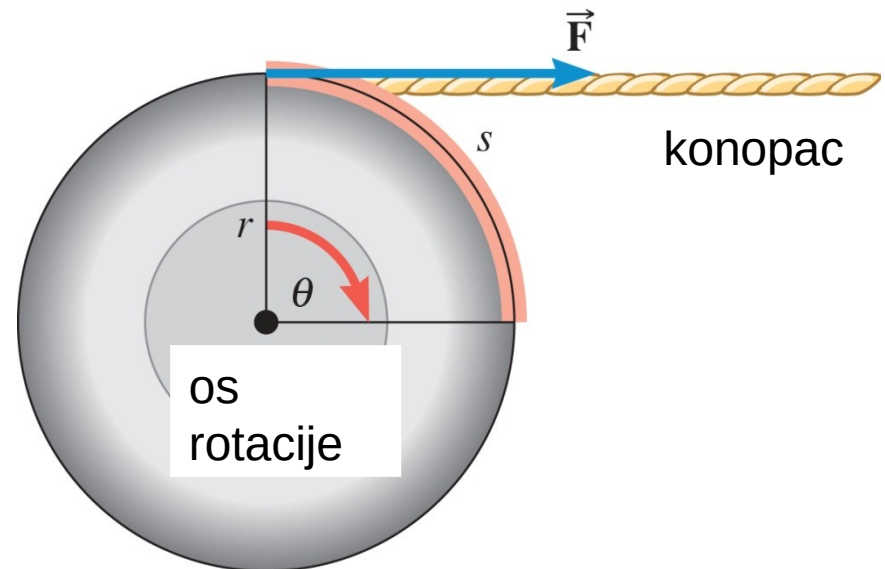
$$W = \tau \theta$$



### DEFINICIJA RADA PRI ROTACIJI

Rad koji izvrši stalni moment sile koji zakreće tijelo za neki kut jednak je umnošku momenta sile i tog kuta.

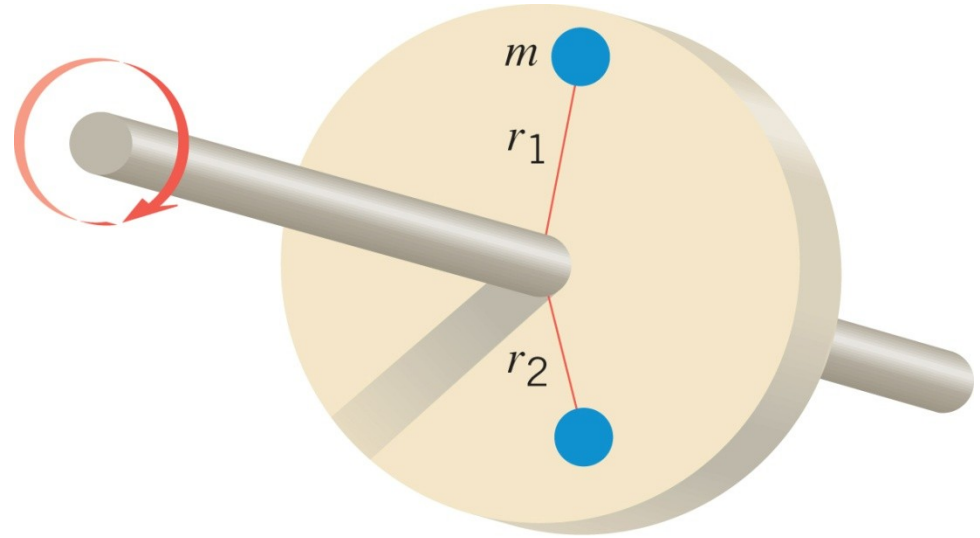
$$W_R = \tau \theta$$



## 9.5 Rad i energija pri rotaciji

$$E_K = \frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$v_T = r \omega$$



$$E_K = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

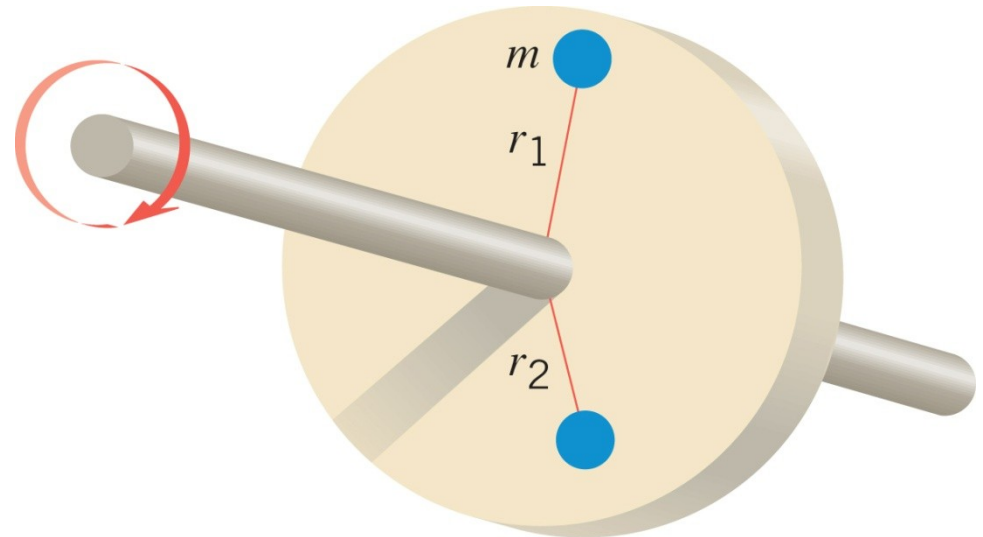
**WILEY**

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

# DEFINICIJA ROTACIJSKE KINETIČKE ENERGIJE

Rotacijska kinetička energija čvrstog tijela je

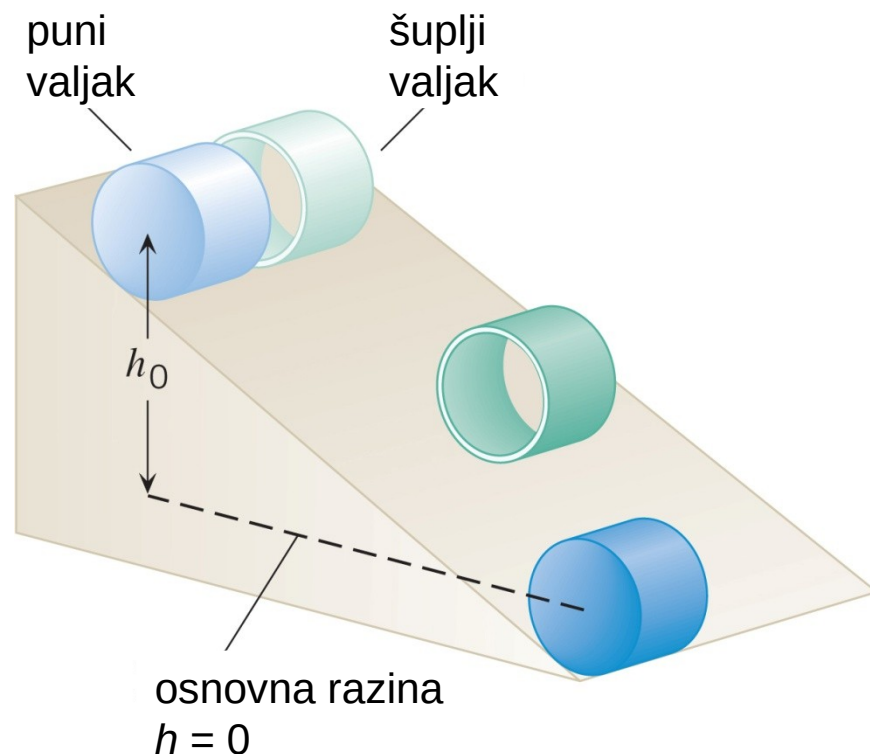
$$E_K^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$



## Primjer 13 Rotirajući valjci

Šupli valjak (mase  $m_s$  i polumjera  $r_s$ ) i puni valjak (mase  $m_p$  i polumjera  $r_p$ ) kreću, iz mirovanja, s vrha kosine.

Koji će valjak na dnu kosine imati veću translacijsku brzinu?





## 9.5 Rad i energija pri rotaciji

Svaki valjak ima translacijsku kinetičku energiju, rotacijsku kinetičku energiju i gravitacijsku potencijalnu energiju.

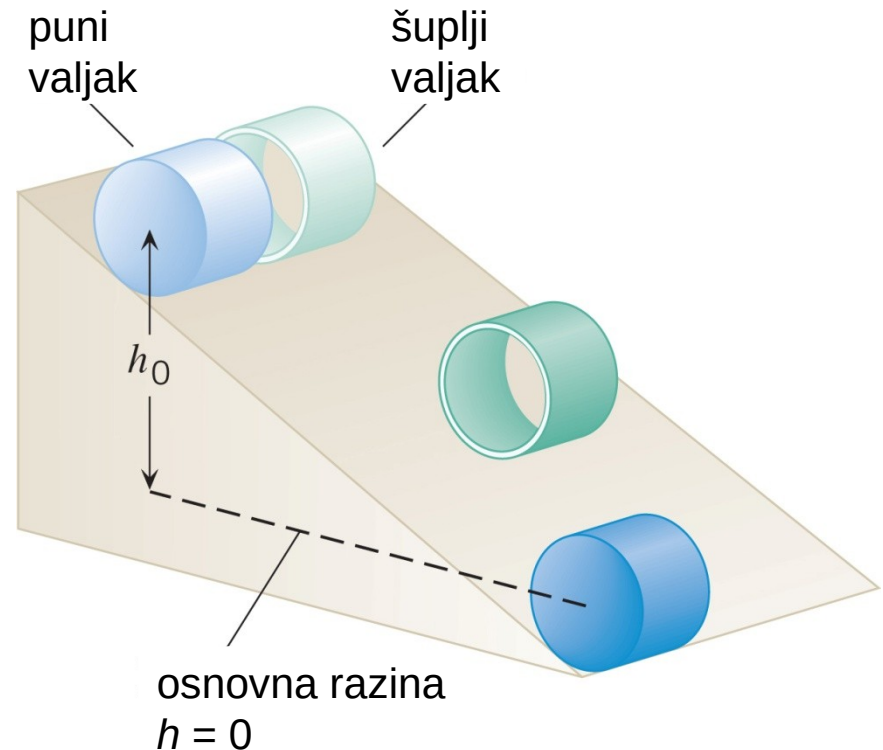
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m g h$$

### ZAKON OČUVANJA ENERGIJE

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 + m g h_0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = m g h_0$$

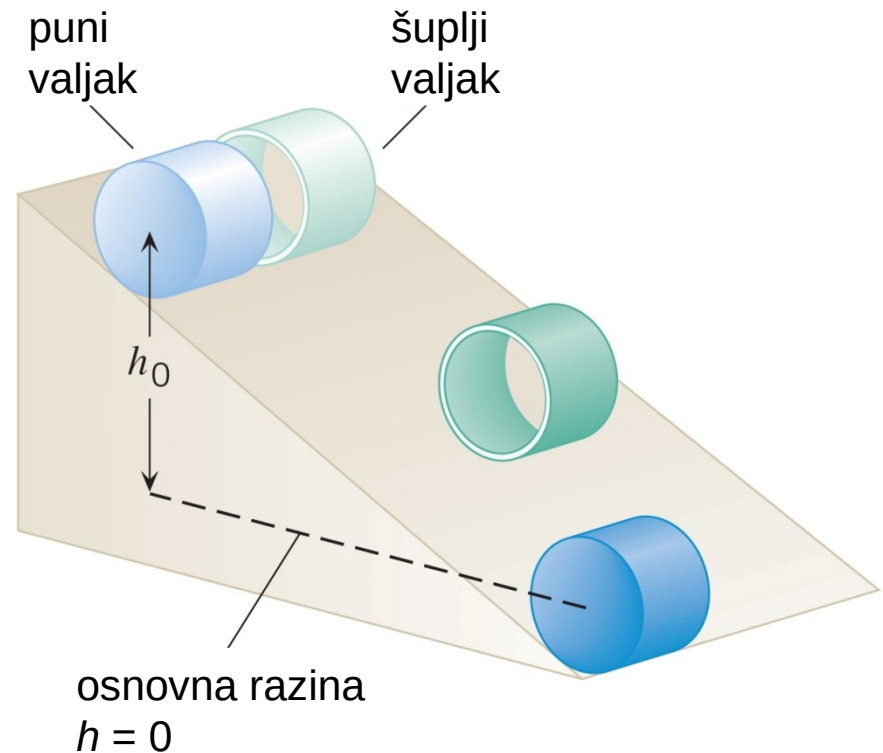
$$v = \omega r$$



## 9.5 Rad i energija pri rotaciji

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = mgh_0$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_0}{m + I/r^2}}$$



Veću konačnu translacijsku brzinu imat će valjak s manjim momentom tromosti.

### DEFINICIJA KUTNE KOLIČINE GIBANJA

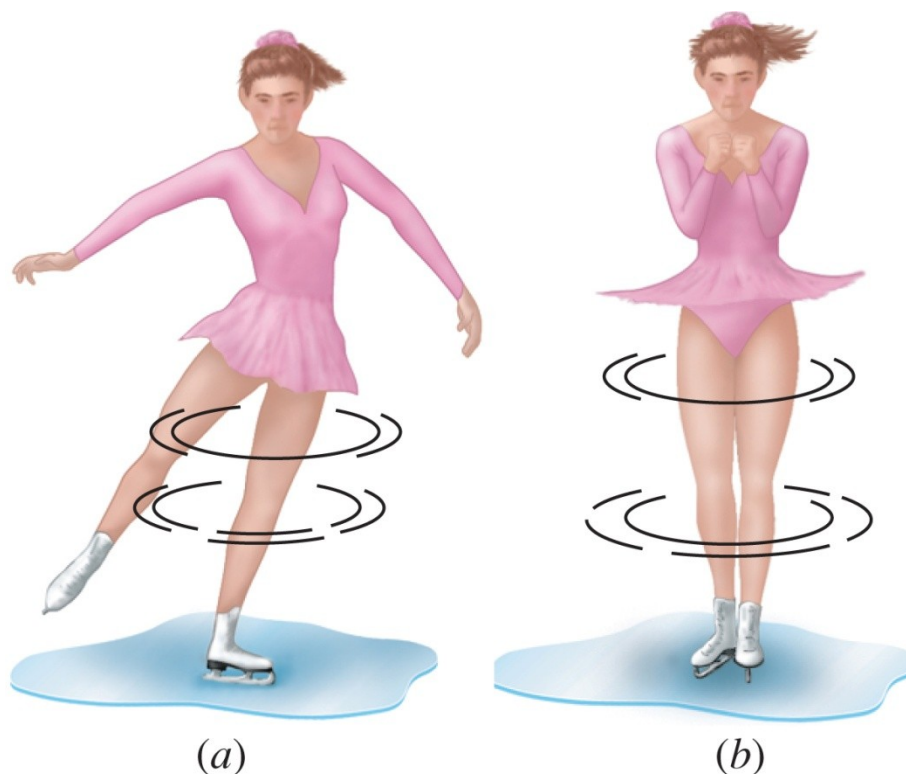
Kutna količina gibanja tijela koje rotira oko fiksne osi jednaka je umnošku momenta tromosti i kutne brzine  $S$  obzirom na tu os.

$$L = I \omega$$

***Jedinica SI za kutnu količinu gibanja:*** kg m<sup>2</sup>/s

### ZAKON OČUVANJA KUTNE KOLIČINE GIBANJA

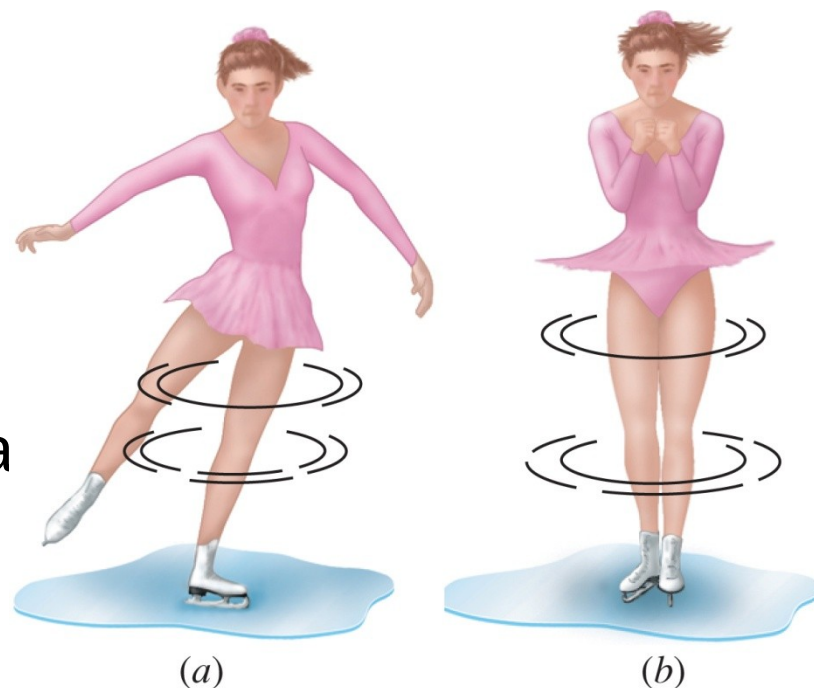
Ukupna kutna količina gibanja zatvorenog sustava ne mijenja se s vremenom ako je ukupni vanjski moment sile na sustav jednak nuli.



### Konceptualni primjer 14 Vrtnja klizačice

Klizačica se vrti s obje ispružene ruke i jednom ispruženom nogom. Kad skupi ruke i noge njezina se vrtnja dramatično promijeni.

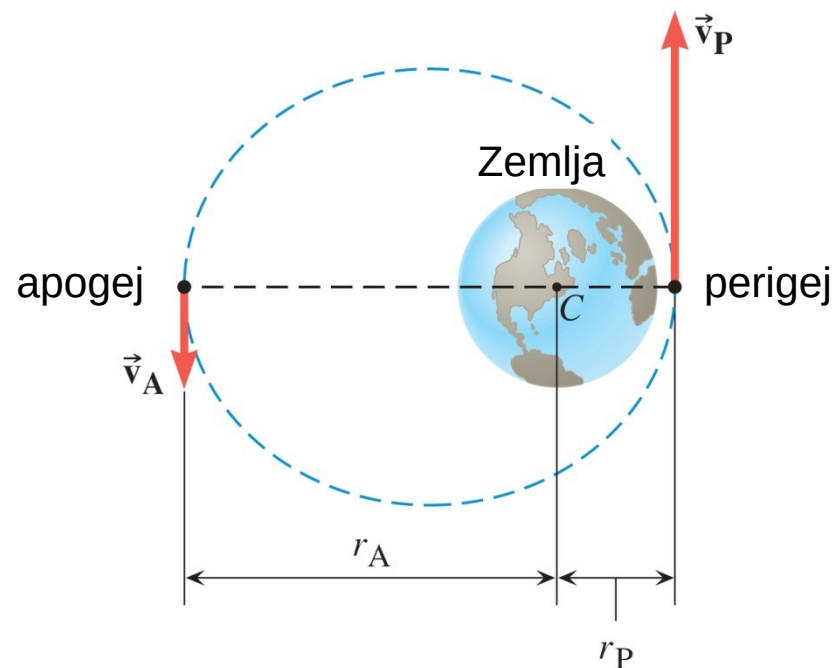
Objasnite, pomoću zakona očuvanja kutne količine gibanja, kako se i zašto njezina vrtnja promijeni.



### Primjer 15 Satelit u eliptičnoj orbiti

Umjetni satelit nalazi se u eliptičnoj orbiti oko Zemlje. U najbližoj točki (perigeju) udaljen je  $8,37 \cdot 10^6$  m od središta Zemlje, a u najdaljoj (apogeju)  $25,1 \cdot 10^6$  m od središta Zemlje.

Brzina satelita u perigeju je  $8450$  m/s. Odredite brzinu satelita u apogeju.



## 9.6 Kutna količina gibanja

$$L = I \omega$$

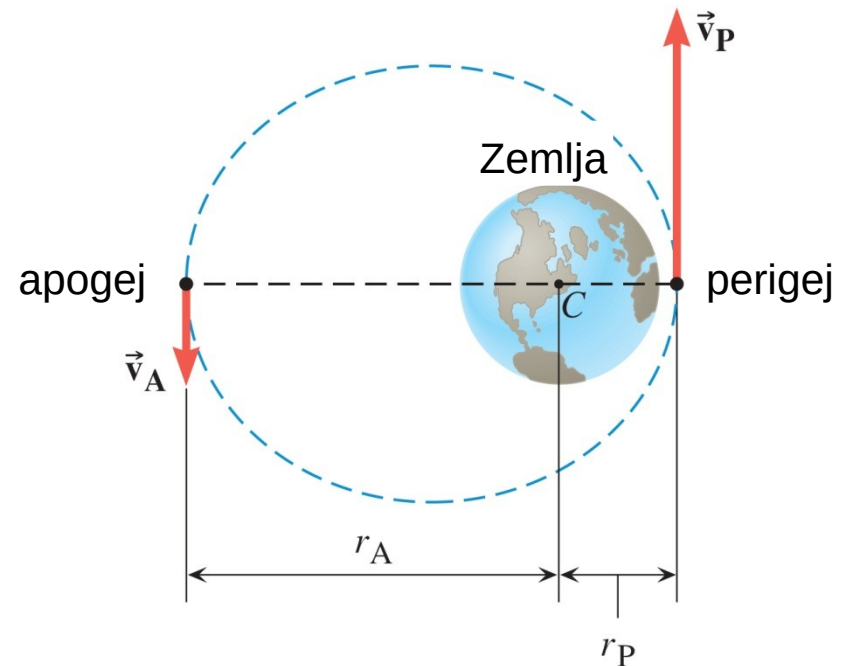
$$m r_A^2 \frac{v_A}{r_A} = m r_P^2 \frac{v_P}{r_P}$$

### ZAKON OČUVANJA KUTNE KOLIČINE GIBANJA

$$I_a \omega_a = I_p \omega_p$$

$$I = m r^2 \quad v = r \omega$$

$$m r_a^2 \frac{v_a}{r_a} = m r_p^2 \frac{v_p}{r_p}$$



**WILEY**

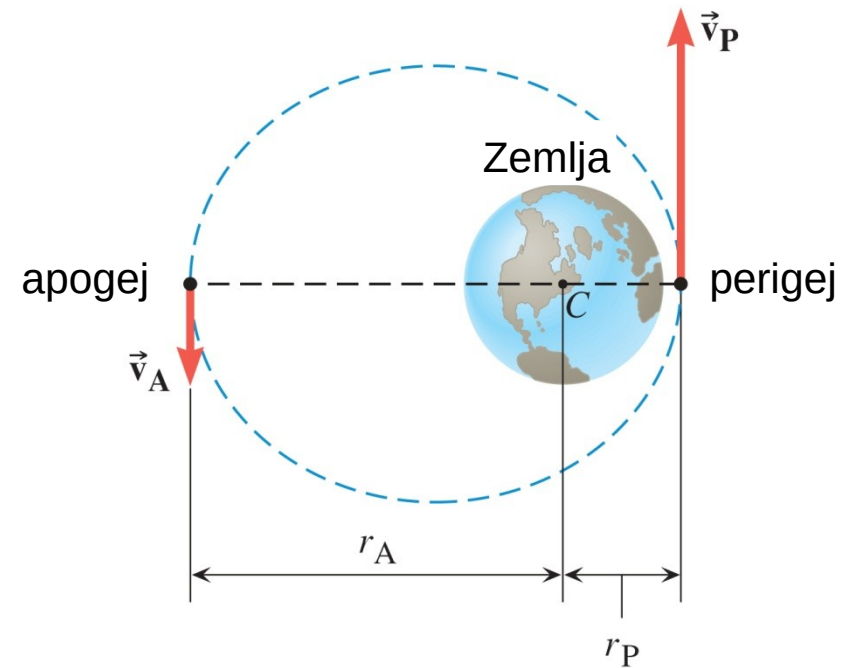
## 9.6 Kutna količina gibanja

$$m r_a^2 \frac{v_a}{r_a} = m r_p^2 \frac{v_p}{r_p}$$

$$r_a v_a = r_p v_p$$

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a}$$

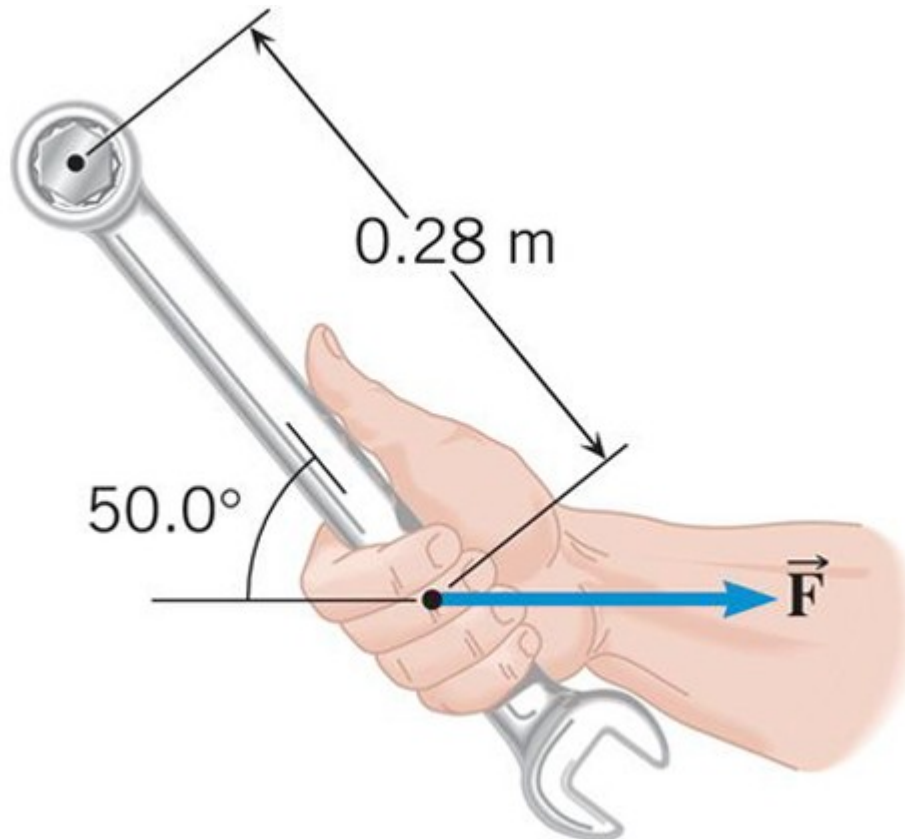
$$v_a = \frac{8,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 8450 \text{ m/s}}{25,1 \cdot 10^6 \text{ m}} = 2820 \text{ m/s}$$





# ZADACI ZA VJEŽBU

1. Mijenjate svjećicu u autu. Prema uputama, svjećica treba biti stegnuta momentom sile iznosa 45 Nm. Prema podacima sa slike, odredite silu na ključ.  
**RJEŠENJE: 210 N**



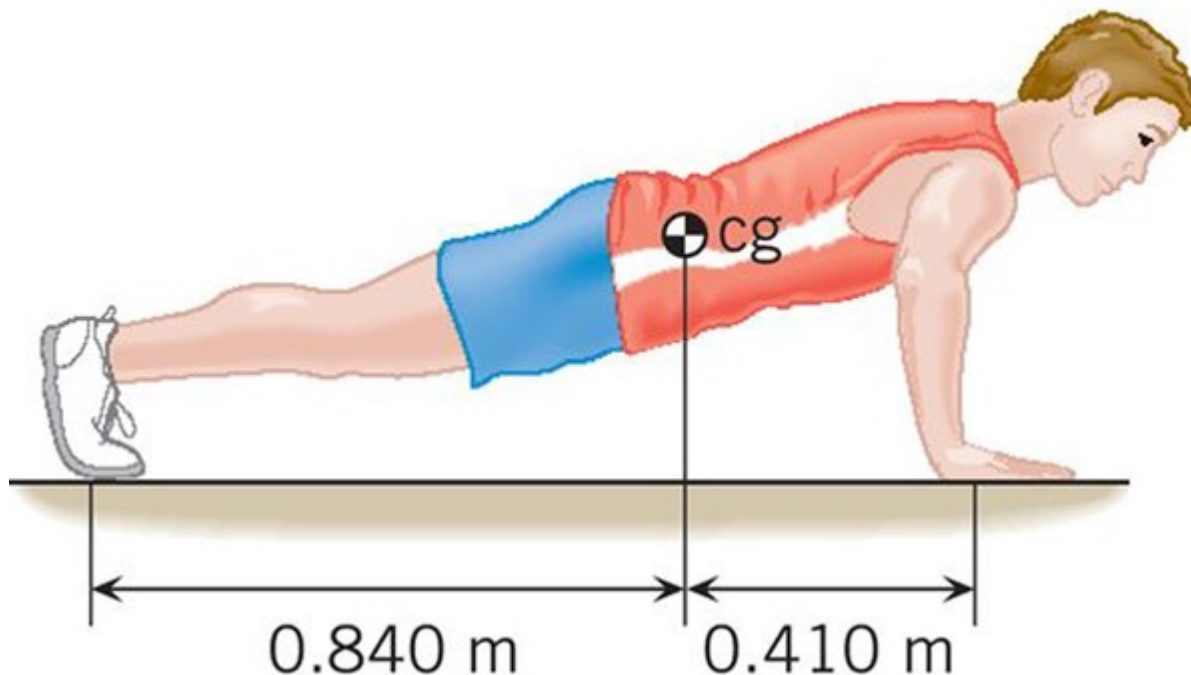
WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

## ZADACI ZA VJEŽBU

2. Crtež prikazuje osobu (težine 584 N) koja radi sklekove. Odredite normalnu silu kojom pod djeluje na svaku ruku i svaku nogu osobe kad je u prikazanom položaju.

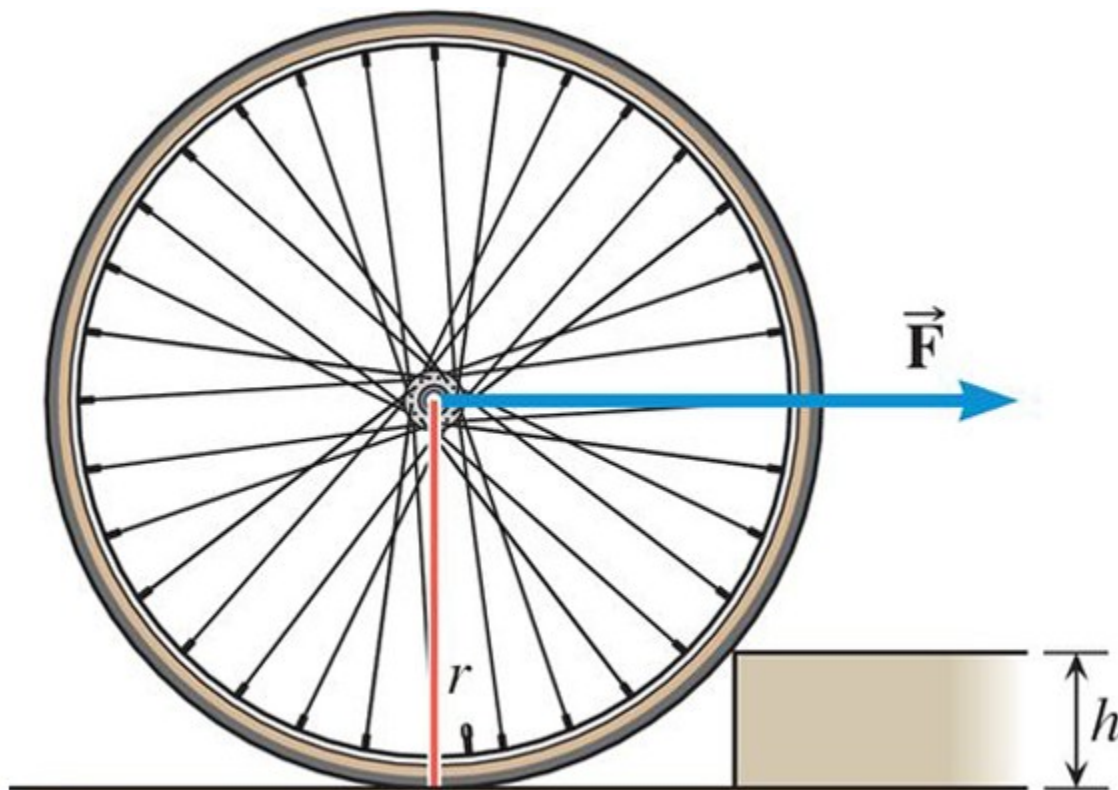
**RJEŠENJE: svaka ruka 196 N; svaka noga 96 N**



## ZADACI ZA VJEŽBU

3. Kotač bicikla miruje ispred prepreke visoke 0,120 m, kao što je prikazano na slici. Težina kotača je 25,0 N, a polumjer 0,340 m. Na os kotača djeluje vodoravna sila čiji iznos raste s vremenom. U jednom se trenutku kotač odvaja od tla i uspinje na prepreku. Pri kojem iznosu sile se to događa?

**RJEŠENJE: 29,5 N**



**WILEY**

# ZADACI ZA VJEŽBU

4. Kad se stropni ventilator uključi na njegove lopatice djeluje moment sile 1,8 Nm. Moment tromosti lopatica je  $0,22 \text{ kg m}^2$ . Koje je kutno ubrzanje lopatica?

**RJEŠENJE:  $8,2 \text{ rad/s}^2$**

5. U svakom vrhu zamišljene kocke smještena je čestica. Duljina brida kocke je 0,25 m, a masa svake čestice je 0,12 kg. Koji je moment tromosti tih čestica s obzirom na os koja prolazi jednim rubom kocke?

**RJEŠENJE:  $0,060 \text{ kg m}^2$**

6. Izračunajte kinetičku energiju koju Zemlja ima zbog: (a) rotacije oko vlastite osi, (b) gibanja oko Sunca. Pretpostavite da je Zemlja savršena kugla i da se oko Sunca giba po kružnoj putanji. Za usporedbu, godišnja ukupna energija potrebna SAD-u je  $1,1 \cdot 10^{20} \text{ J}$ .

**RJEŠENJE:  $2,56 \cdot 10^{29} \text{ J}$ ;  $2,67 \cdot 10^{33} \text{ J}$**

7. Puna kugla kotrlja se po ravnoj plohi. Koji dio njezine ukupne kinetičke energije pripada rotacijskoj kinetičkoj energiji oko težišta?

**RJEŠENJE:  $2/7$**

## ZADACI ZA VJEŽBU

8. Kad neke zvijezde potroše svoje gorivo eksplodiraju kao supernove. U tim se eksplozijama u okolni međuzvjezdani prostor izbacuje većina mase, u obliku kuglaste ljuske koja se brzo širi. Kao jednostavni model supernove, uzmite da je zvijezda puna kugla polumjera  $R$  koja napravi dva okreta na dan. Koliko okreta na dan napravi ekspandirajuća ljuska kad je njezin polumjer  $4,0 R$ ? Pretpostavite da je sva izvorna masa zvijezde sadržana u ljusci.

**RJEŠENJE: 0,075 okreta na dan**

9. Tanki štap duljine  $0,25$  m rotira na ravnom stolu, bez trenja. Os je okomita na štap i prolazi jednim njegovim krajem. Štap ima kutnu brzinu  $0,32$  rad/s moment tromosti  $1,1 \cdot 10^{-3}$  kg m<sup>2</sup>. Kukac koji stoji na osi rotacije krene puzati prema kraju štapa. Masa kukca je  $4,2$  g. Kolika je kutna brzina štapa kad kukac dođe do njegovog kraja?

**RJEŠENJE: 0,26 rad/s**

10. Puni disk rotira u vodoravnoj ravnini kutnom brzinom  $0,067$  rad/s oko osi koja je okomita na ravninu diska i prolazi kroz njegovo središte. Moment tromosti diska je  $0,10$  kg m<sup>2</sup>. Odozgo sipi pijesak i oblikuje tanki prsten na disku, polumjera  $0,40$  m. Pijesak ima masu  $0,50$  kg. Kolika je kutna brzina diska nakon što sav pijesak padne na disk?

**RJEŠENJE: 0,037 rad/s**

**WILEY**

# PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Krak sile
2. Moment sile
3. Uvjeti ravnoteže krutog tijela
4. Težište
5. Moment tromosti
6. Drugi Newtonow zakon za rotacijsko gibanje
7. Rad pri rotaciji
8. Rotacijska kinetička energija
9. Kutna količina gibanja
10. Zakon očuvanja kutne količine gibanja