

Jednostavno harmonijsko gibanje i elastičnost

**FIZIKA
PSS-GRAD
15. studenog 2023.**



WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Što je titranje?

- vrsta gibanja
- **periodično** gibanje

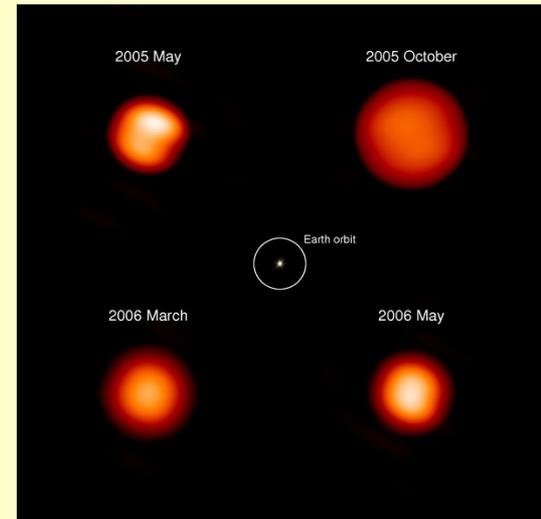
periodičan
koji se ponavlja u određenim
vremenskim razmacima

period T $[T] = s$

frekvencija f $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$

$$f = \frac{1}{T}$$

Primjeri titranja



Veza titranja i gibanja po kružnici



za jednoliko kruženje:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

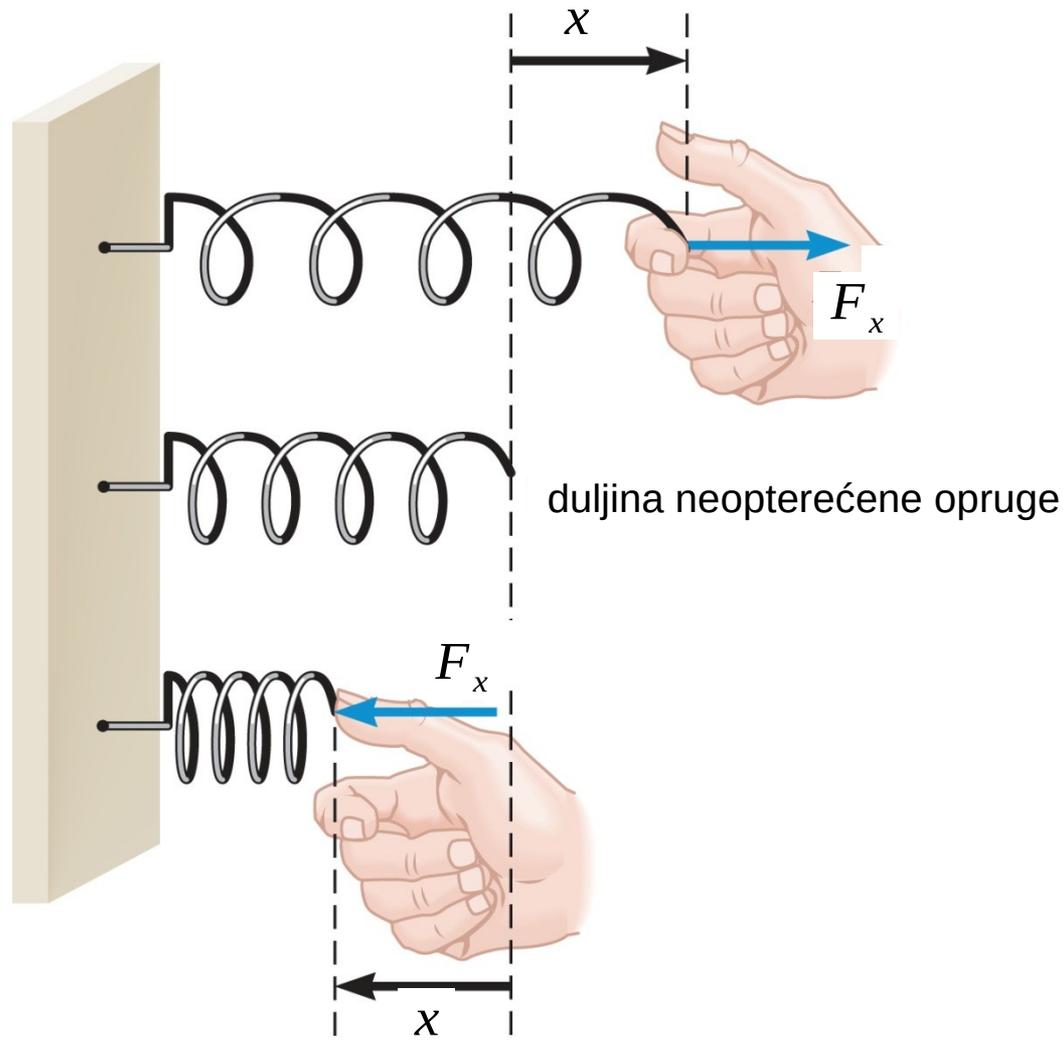
$$v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2\pi}{T} r = \omega r$$

10.1 Idealna opruga i jednostavno harmonijsko titranje

$$F = k x$$

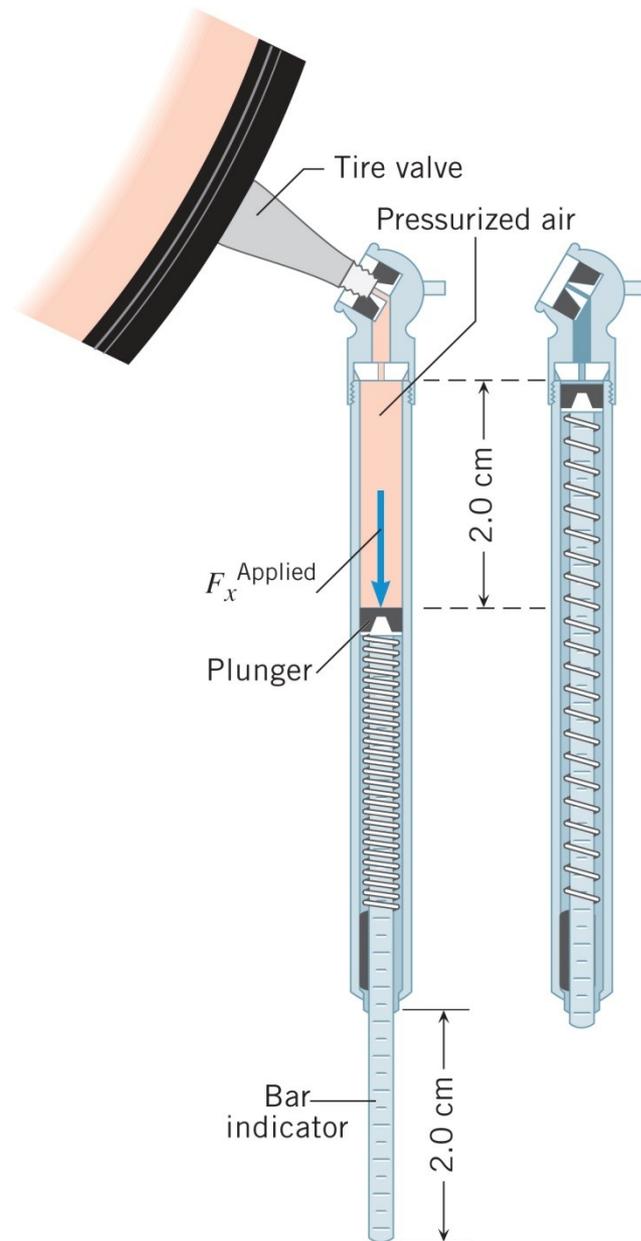
konstanta opruge

jedinica: N/m



Primjer 1 Tlakomjer za gume

Konstanta opruge iznosi 320 N/m , a indikator tlaka produlji se za $2,0 \text{ cm}$. Kojom silom zrak u gumi djeluje na oprugu?

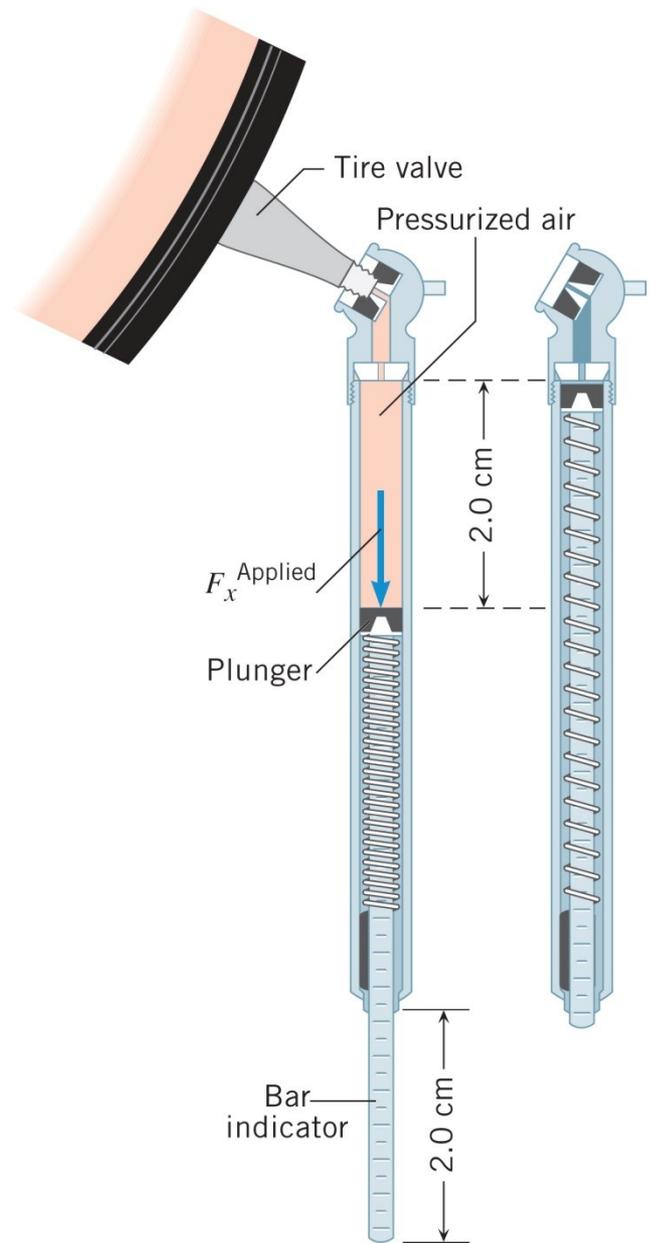


10.1 Idealna opruga i jednostavno harmonijsko titranje

$$F = kx$$

$$F = 320 \text{ N/m} \cdot 0,02 \text{ m}$$

$$F = 6,4 \text{ N}$$

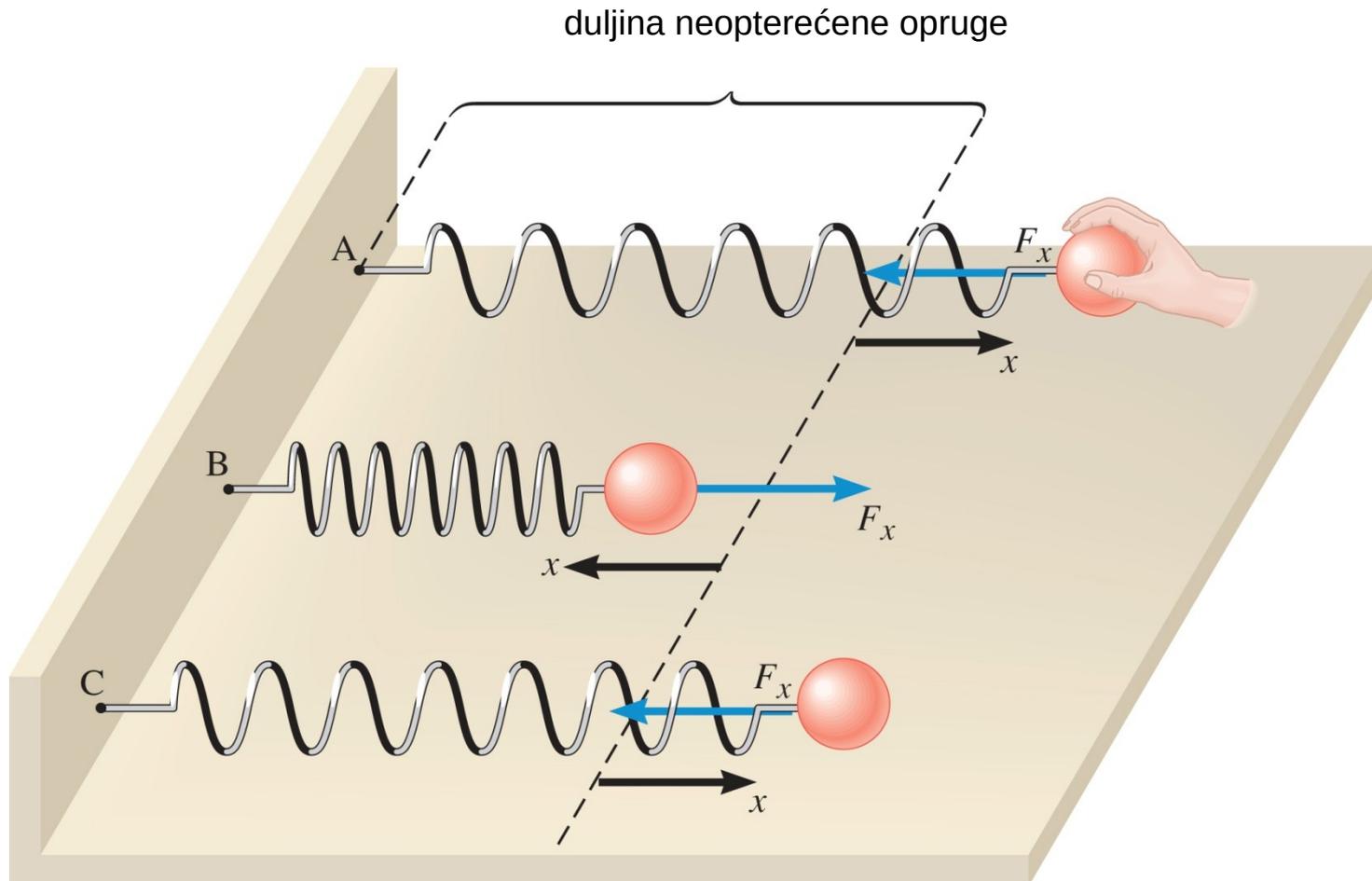


WILEY

10.1 Idealna opruga i jednostavno harmonijsko titranje

HOOKEOV ZAKON: POVRATNA SILA IDEALNE OPRUGE

Povratna sila idealne opruge ili **elastična sila** je $F_x = -k x$



WILEY

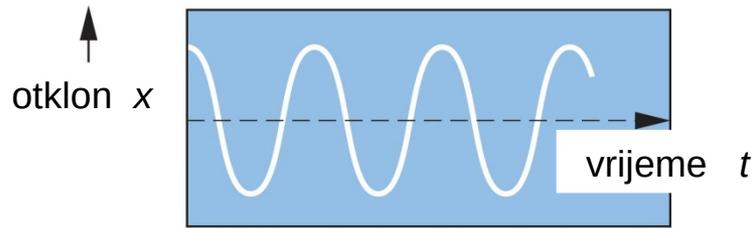
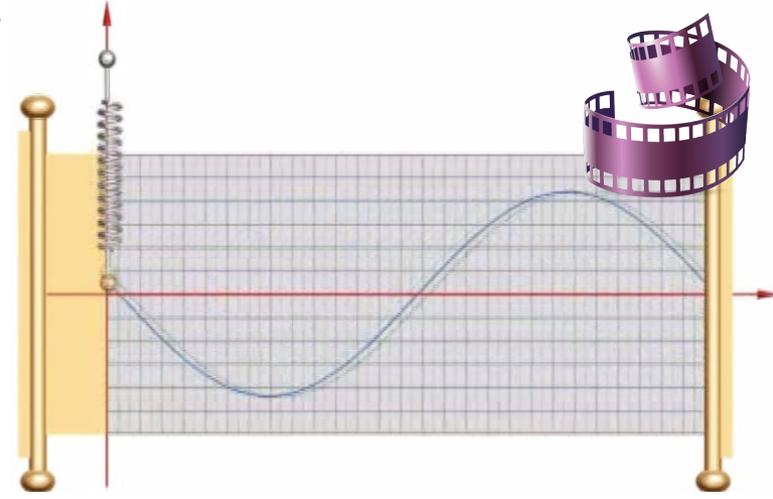
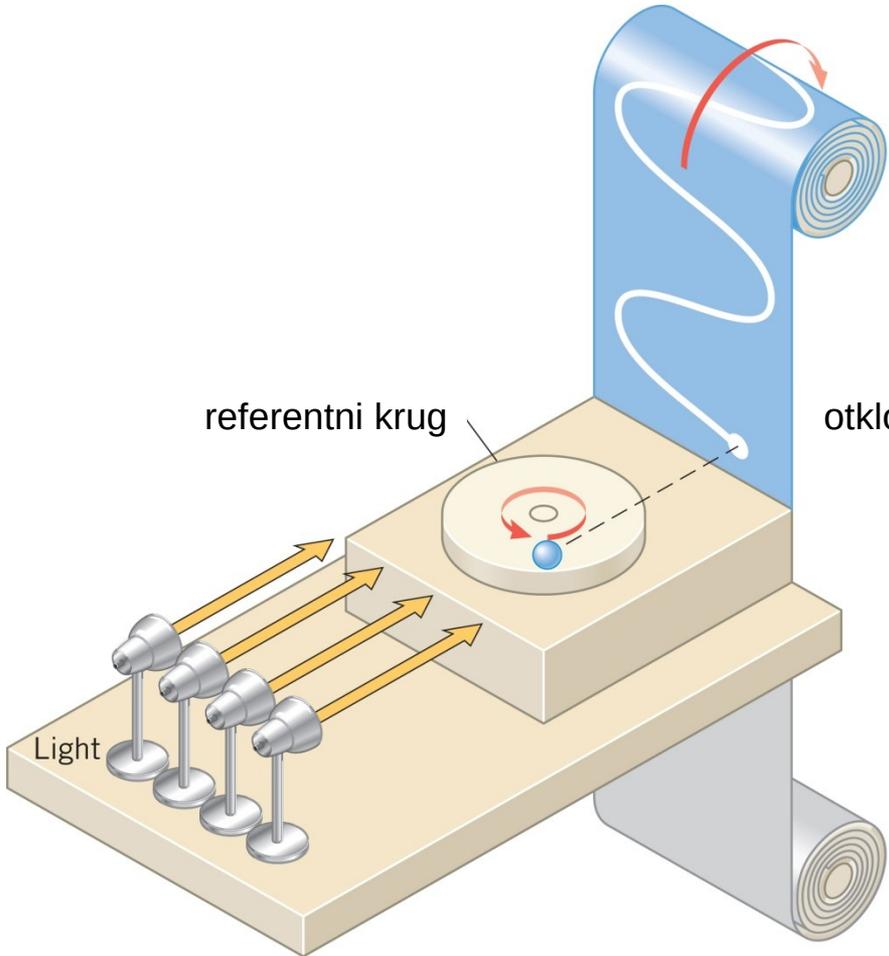
Harmonijsko titranje

- najjednostavnija vrsta titranja
- tijelo u ravnotežni položaj vraća **elastična sila**
- graf otklona je **sinusoida**



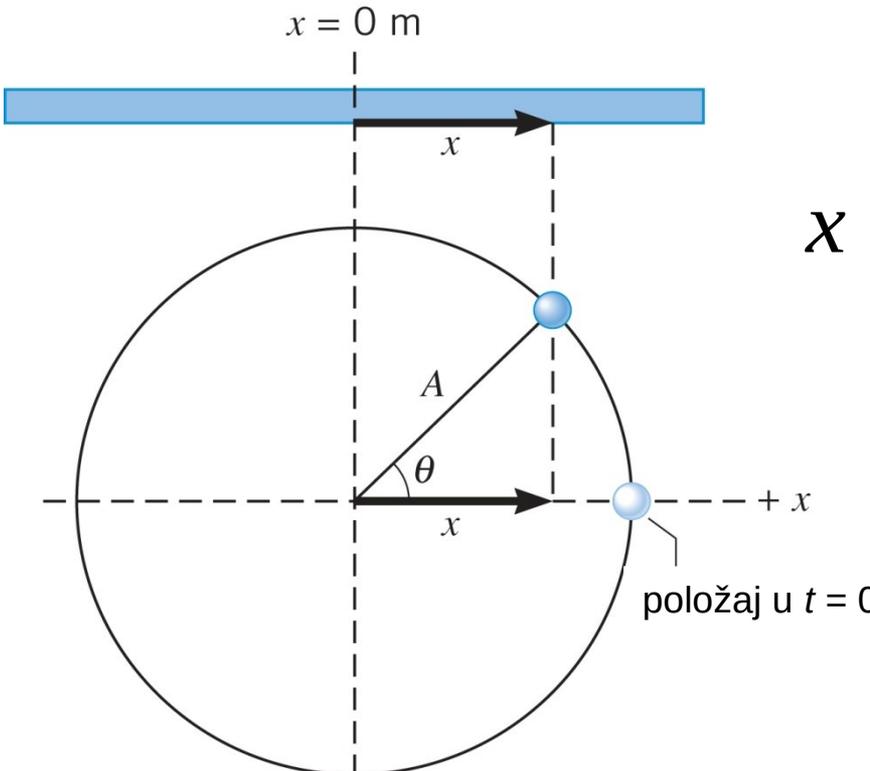
10.2 Jednostavno harmonijsko gibanje i referentni krug

OTKLON

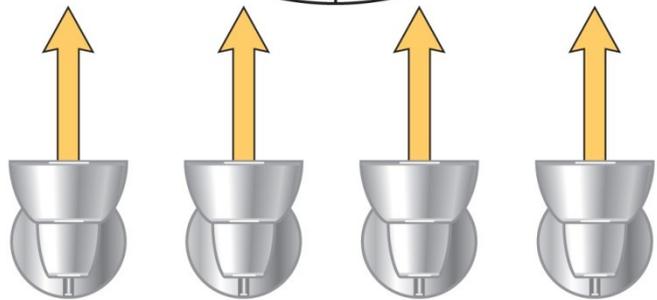


$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t)$$

10.2 Jednostavno harmonijsko gibanje i referentni krug

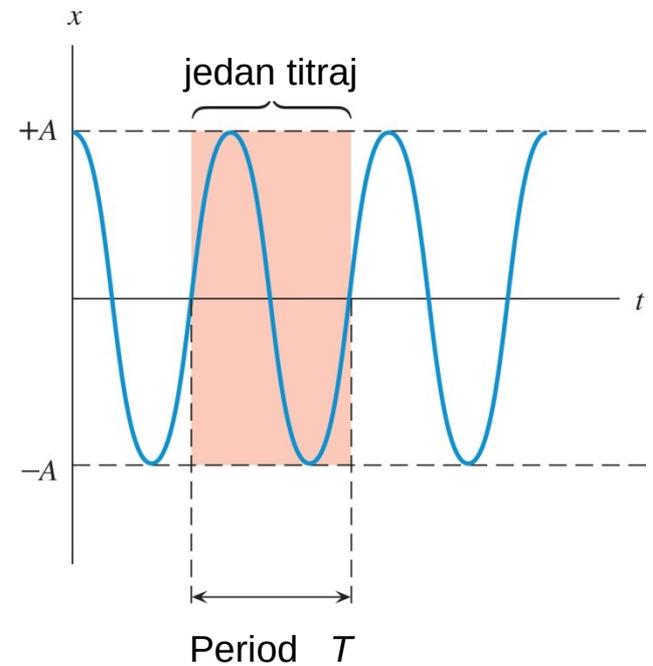
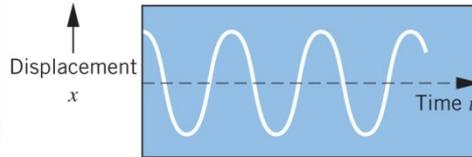
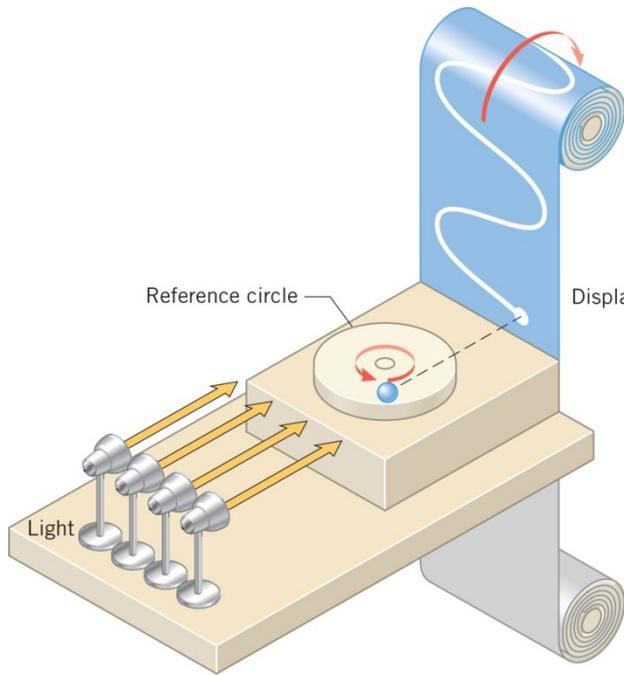


$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t)$$



svjetlost

10.2 Jednostavno harmonijsko gibanje i referentni krug



amplituda A : najveći otklon

period T : vrijeme potrebno za jedan titraj

frekvencija f : broj titraja u sekundi (mjerena u Hz)

$$f = \frac{1}{T}$$

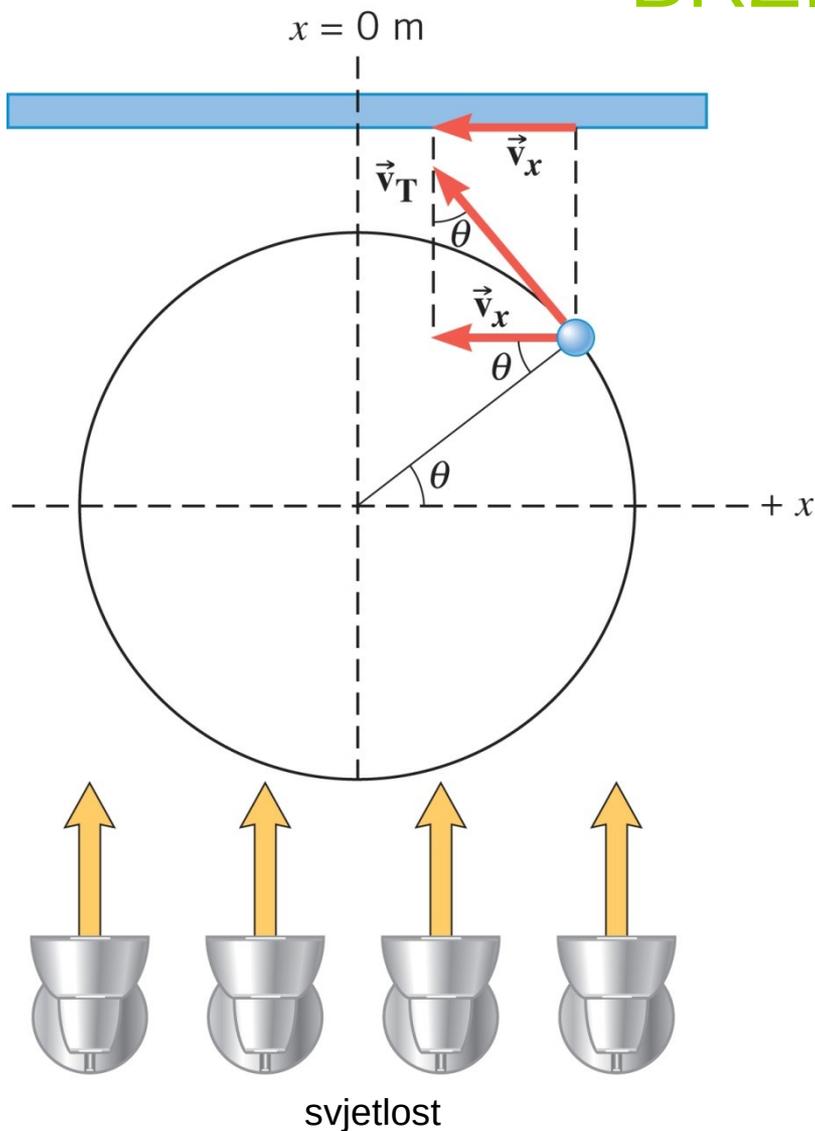
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

10.2 Jednostavno harmonijsko gibanje i referentni krug

BRZINA



$$v_x = -v_T \sin \theta$$

$$v_x = -A\omega \sin(\omega t)$$

v_{\max}

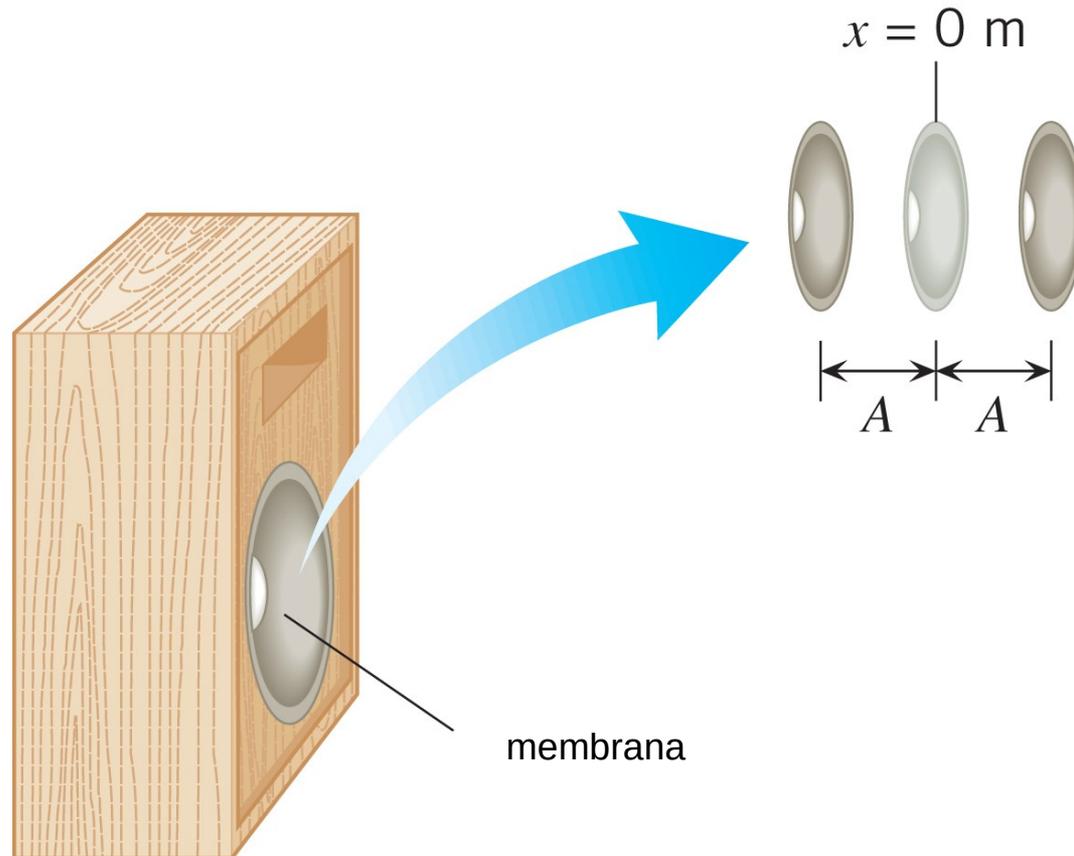
$$v_x = -v_{\max} \sin(\omega t)$$

WILEY

Primjer 3 Najveća brzina membrane zvučnika

Frekvencija gibanja je 1,0 kHz a amplituda 0,20 mm.

- (a) Koja je najveća brzina membrane?
(b) U kojem se dijelu gibanja ta brzina postiže?

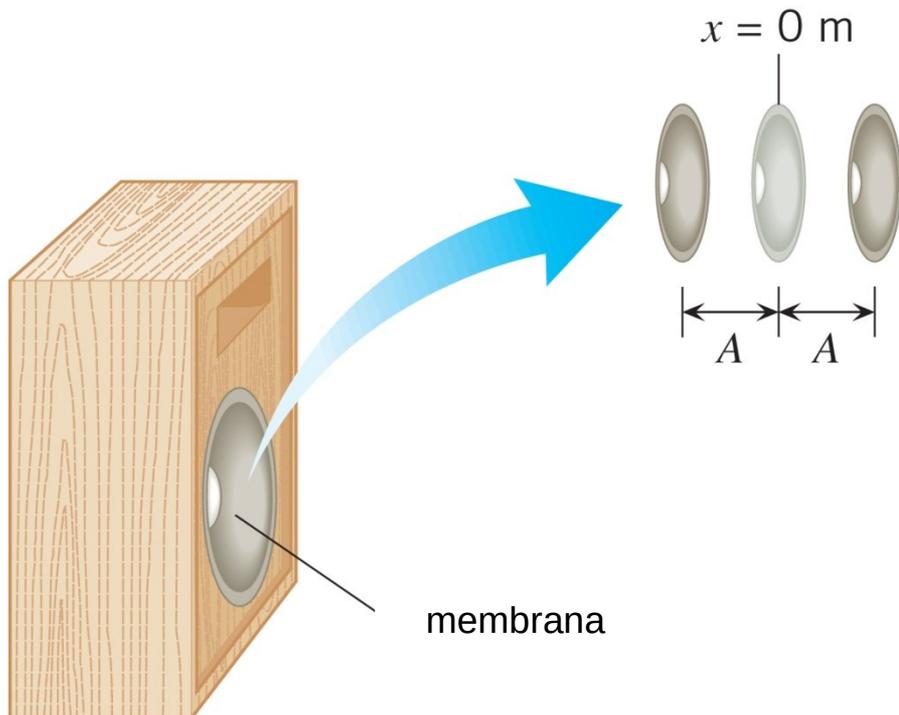


10.2 Jednostavno harmonijsko gibanje i referentni krug

$$v_x = -A\omega \sin(\omega t)$$

v_{\max}

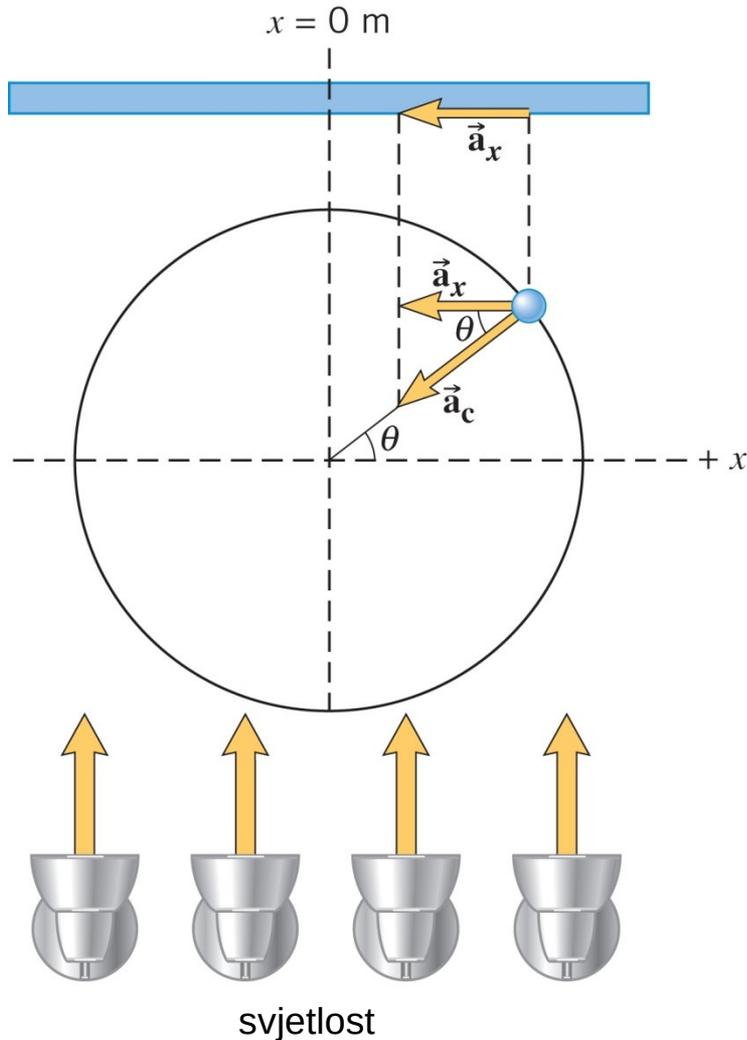
(a) $v_{\max} = A\omega = A(2\pi f) = 0,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}(2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}) = 1,3 \text{ ms}^{-1}$



(b) Membrana postiže najveću brzinu u sredini, između krajnjih točaka gibanja.

WILEY

AKCELERACIJA



$$a_x = -a_c \cos \theta$$

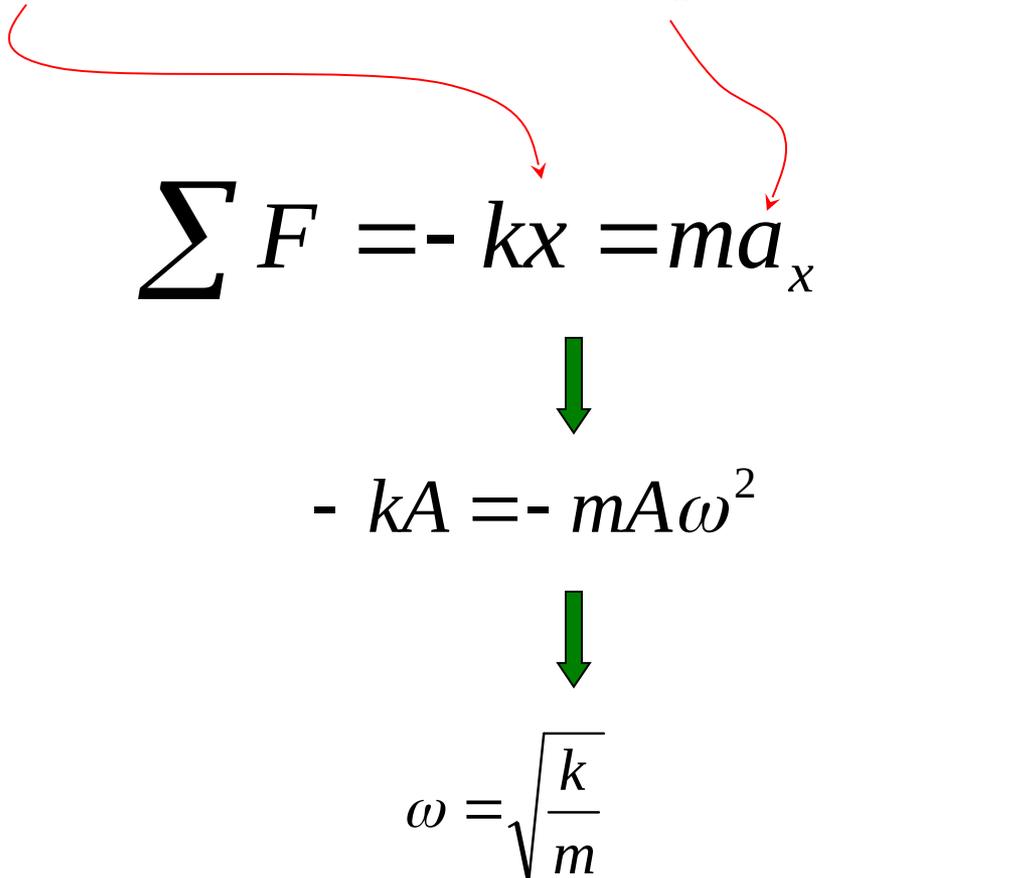
$$a_x = -A \omega^2 \cos(\omega t)$$

a_{\max}

FREKVENCIJA TITRANJA

$$x = A \cos \omega t$$

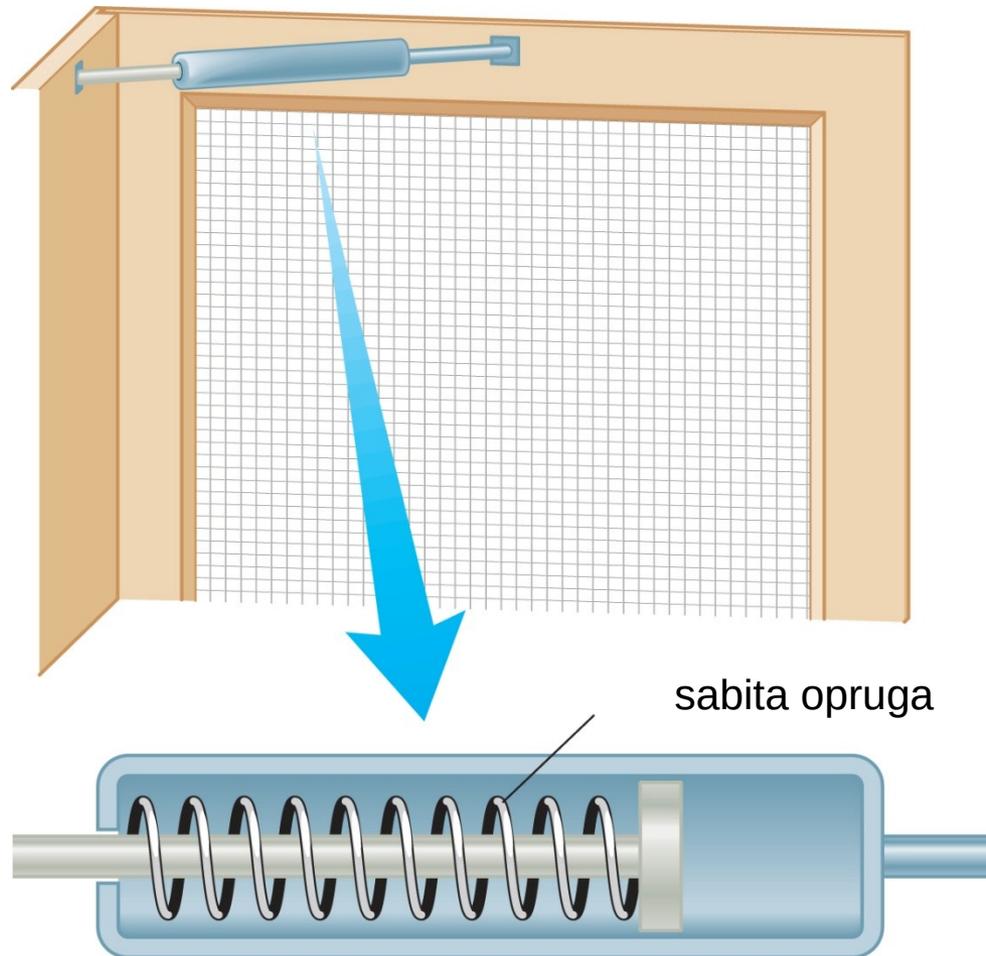
$$a_x = -A\omega^2 \cos \omega t$$


$$\sum F = -kx = ma_x$$

$$-kA = -mA\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

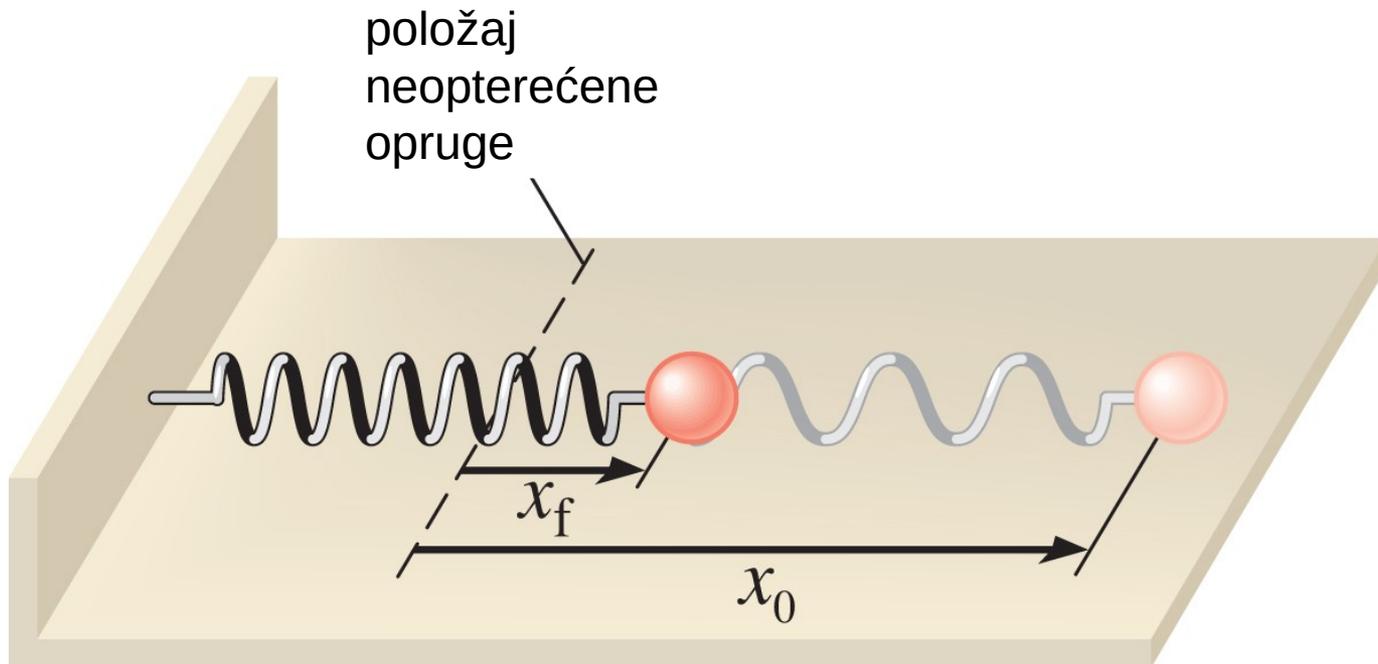
Sabita opruga može obaviti rad.



10.3 Energija i jednostavno harmonijsko gibanje

$$W_{\text{elastic}} = \bar{F} s = \frac{k x_0 + k x_f}{2} \cdot (x_0 - x_f)$$

$$W_{\text{elastic}} = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$



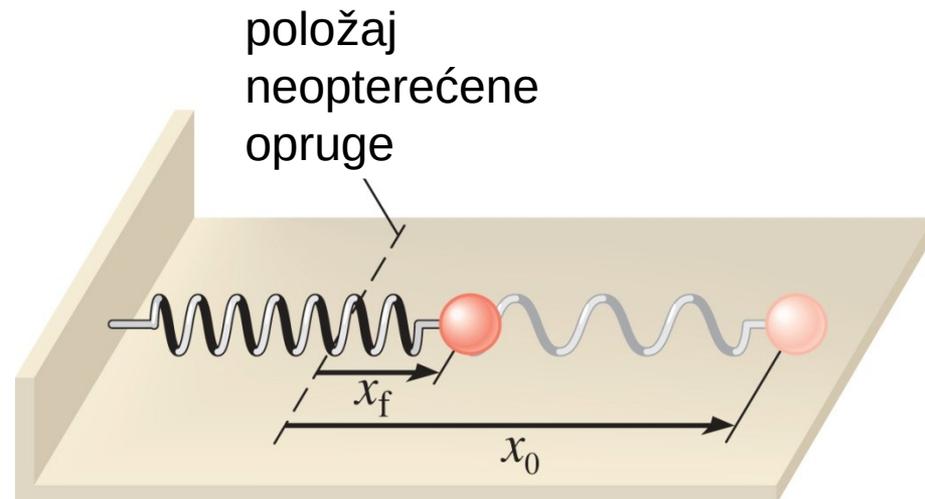
WILEY

DEFINICIJA ELASTIČNE POTENCIJALNE ENERGIJE

Elastična potencijalna energija je energija koju ima stisnuta ili rastegnuta opruga.

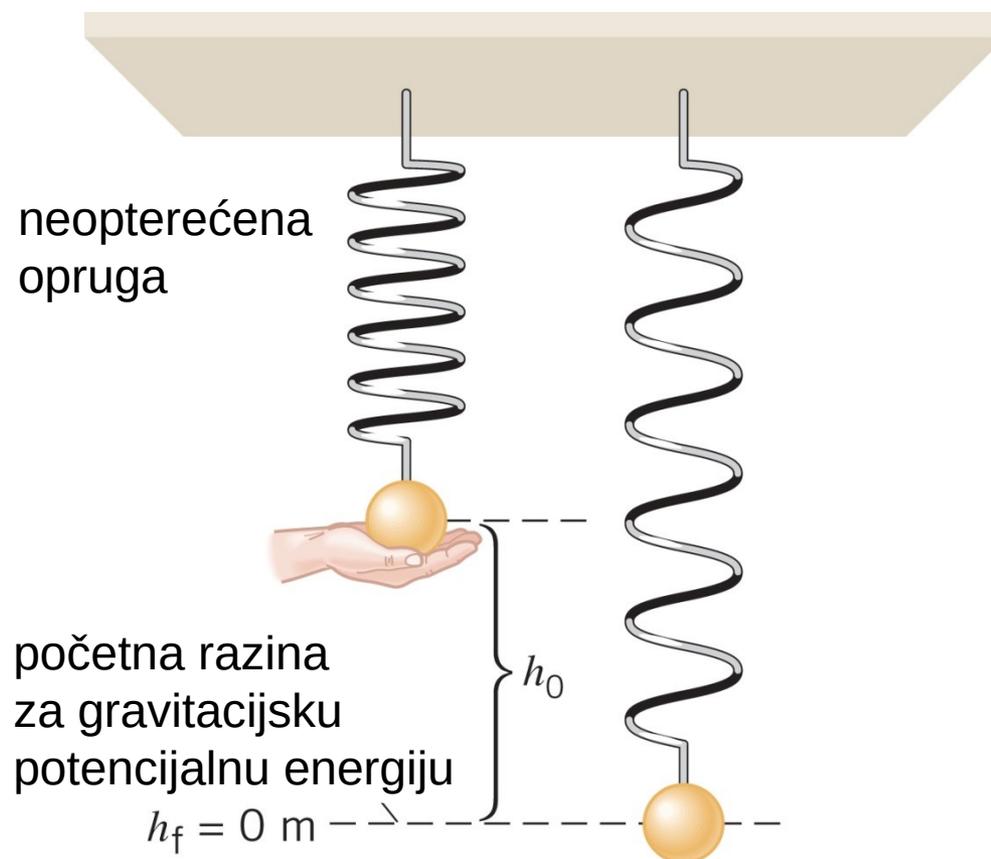
$$E_{\text{elastic}} = \frac{1}{2} k x^2$$

**Jedinica SI elastične
potencijalne energije: džul (J)**



Primjer 8 Dodavanje mase jednostavnom harmonijskom oscilatoru

Kugla mase 0,20 kg obješena je na okomitu oprugu. Konstanta opruge je 28 N/m. Koliko se kugla spusti, nakon oslobađanja, prije nego ju opruga zaustavi?



10.3 Energija i jednostavno harmonijsko gibanje

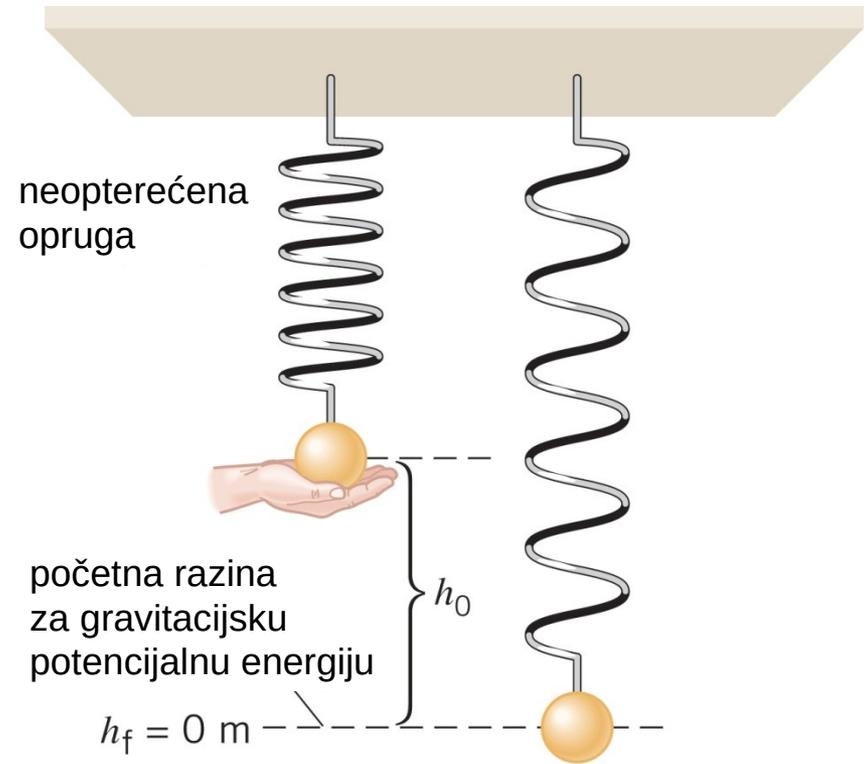
$$E_f = E_0$$

$$\cancel{\frac{1}{2} m v_f^2} + \cancel{m g h_f} + \frac{1}{2} k (h_f - h_0)^2 = \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} + \cancel{m g h_0} + \frac{1}{2} k (h_0 - h_0)^2$$

$$h_0 = \frac{2 m g}{k}$$

$$h_0 = \frac{2 \cdot 0,20 \text{ kg} \cdot 9,80 \text{ m/s}^2}{28 \text{ N/m}}$$

$$h_0 = 0,14 \text{ m}$$



WILEY

10.4 Njhalo

Jednostavno njhalo čini čestica
na niti zanemarive mase
pričvršćenoj u objesištu zanemarivog trenja.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\text{samo za male kutove})$$

Fizičko njhalo:

$$\omega = \sqrt{\frac{m g L}{I}} \quad (\text{samo za male kutove})$$



WILEY

Primjer 10 Držanje ritma

Odredite duljinu jednostavnog njihala koje se harmonijski giba s periodom od 1,00 s.

$$\begin{array}{ccc} \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} & \longrightarrow & \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{g}{L}}\right)^2 \\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} & & L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \end{array}$$

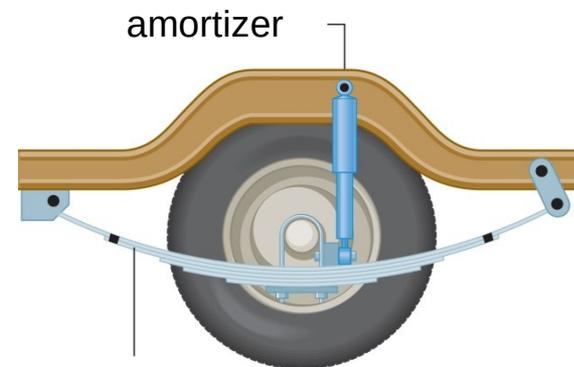
$$L = 9,80 \text{ ms}^{-2} \left(\frac{1,00 \text{ s}}{2\pi}\right)^2 = 0,248 \text{ m}$$

10.5 Prigušeno harmonijsko gibanje

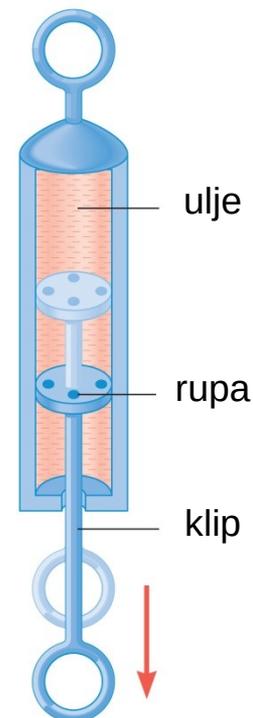
Pri jednostavnom harmonijskom gibanju, tijelo titra sa stalnom amplitudom.

U stvarnosti, uvijek je prisutno trenje ili drugi mehanizam rasipanja energije pa se amplituda s vremenom smanjuje.

Takvo gibanje nazivamo ***prigušenim harmonijskim gibanjem***.

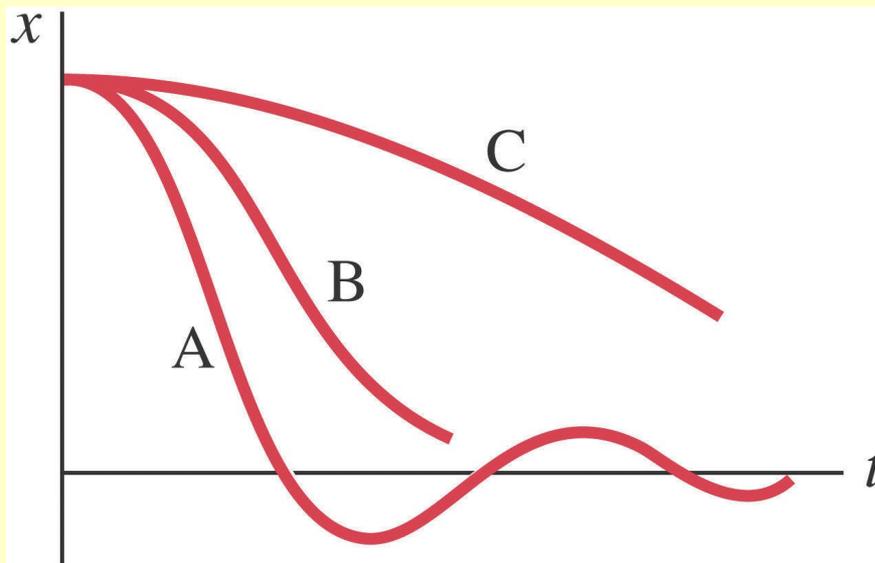


(a) ovjes



(b)

WILEY

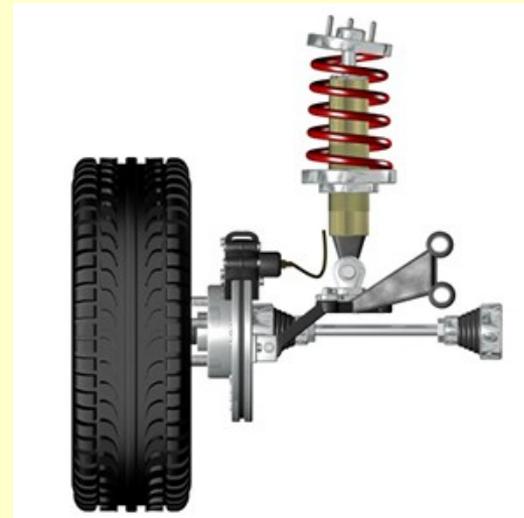


A) prigušeno
titranje

B) kritično
prigušenje

C) preveliko
prigušenje

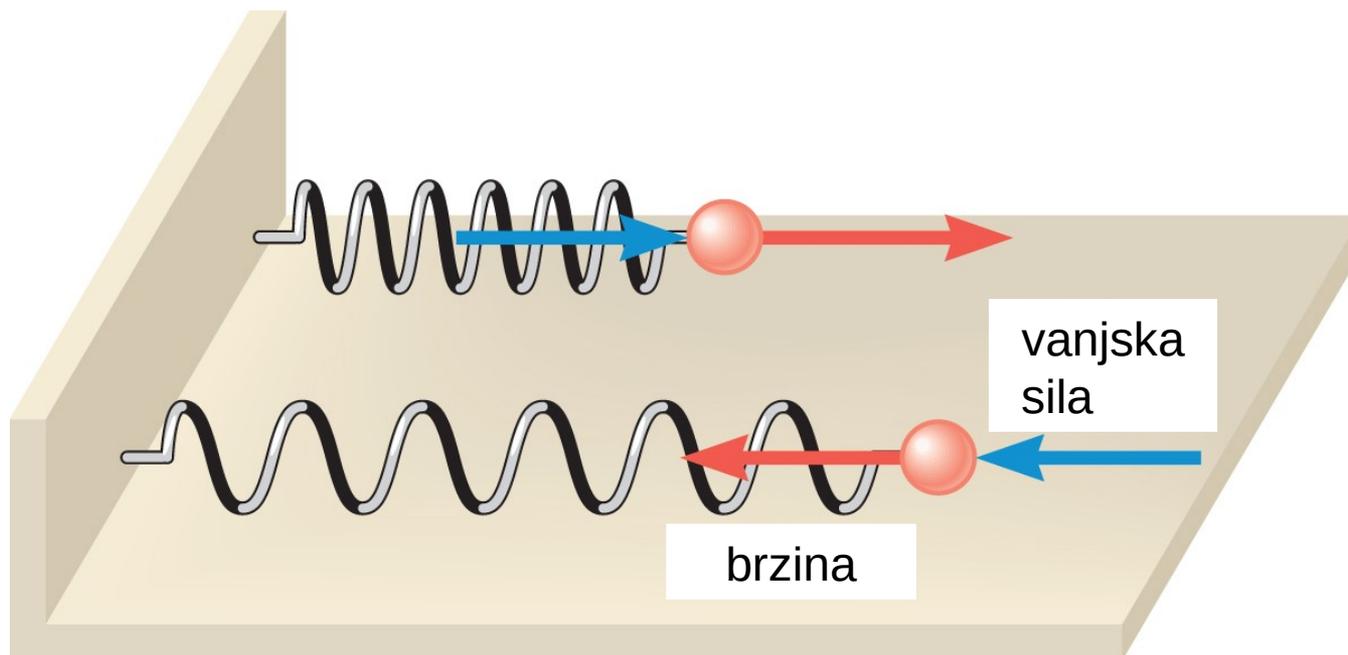
primjena kritičnog
prigušenja



10.6 *Prisilno harmonijsko gibanje i rezonancija*

Prisilno harmonijsko gibanje je gibanje pri kojem na titrajni sustav cijelo vrijeme djeluje peroidična vanjska sila.

U ovom slučaju vanjska sila ima istu frekvenciju kao i titrajni sustav te isti smjer i orijentaciju kao i brzina tijela koje titra.



WILEY

REZONANCIJA

Rezonancija je pojava pri kojoj periodična sila uzrokuje prijenos velike energije titrajnom sustavu, što se očituje velikim porastom amplitude.

Rezonancija nastaje kad se frekvencija vanjske sile slaže s vlastitom frekvencijom titrajnog sustava.



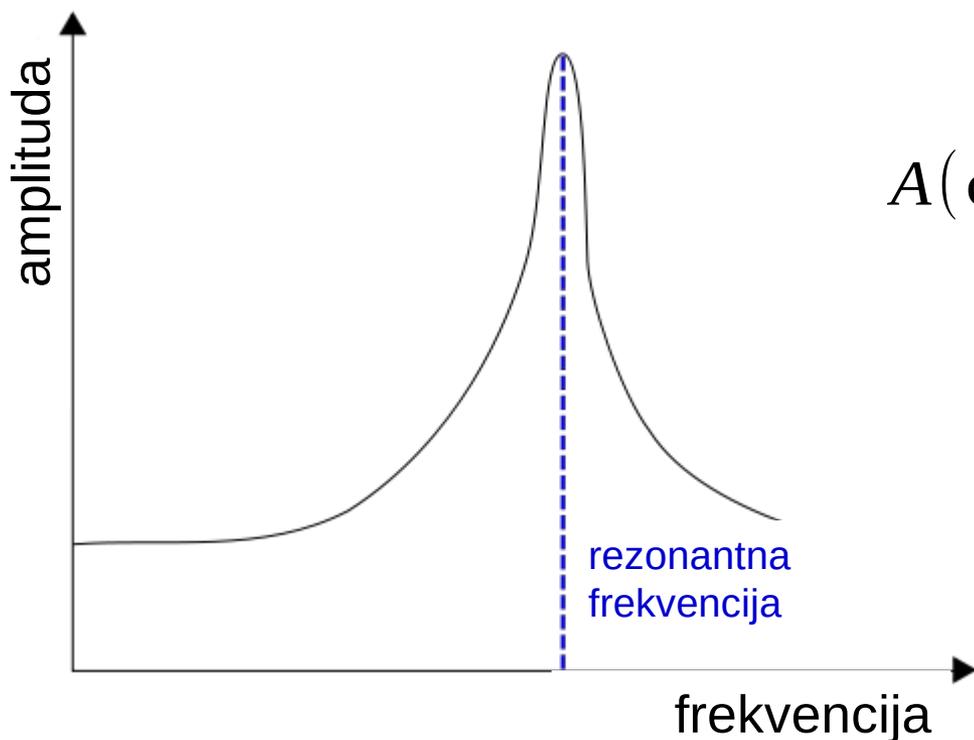
Tacoma, Washington, 7. studenoga 1940.

WILEY

REZONANCIJA

Rezonancija je pojava pri kojoj periodična sila uzrokuje prijenos velike energije titrajnom sustavu, što se očituje velikim porastom amplitude.

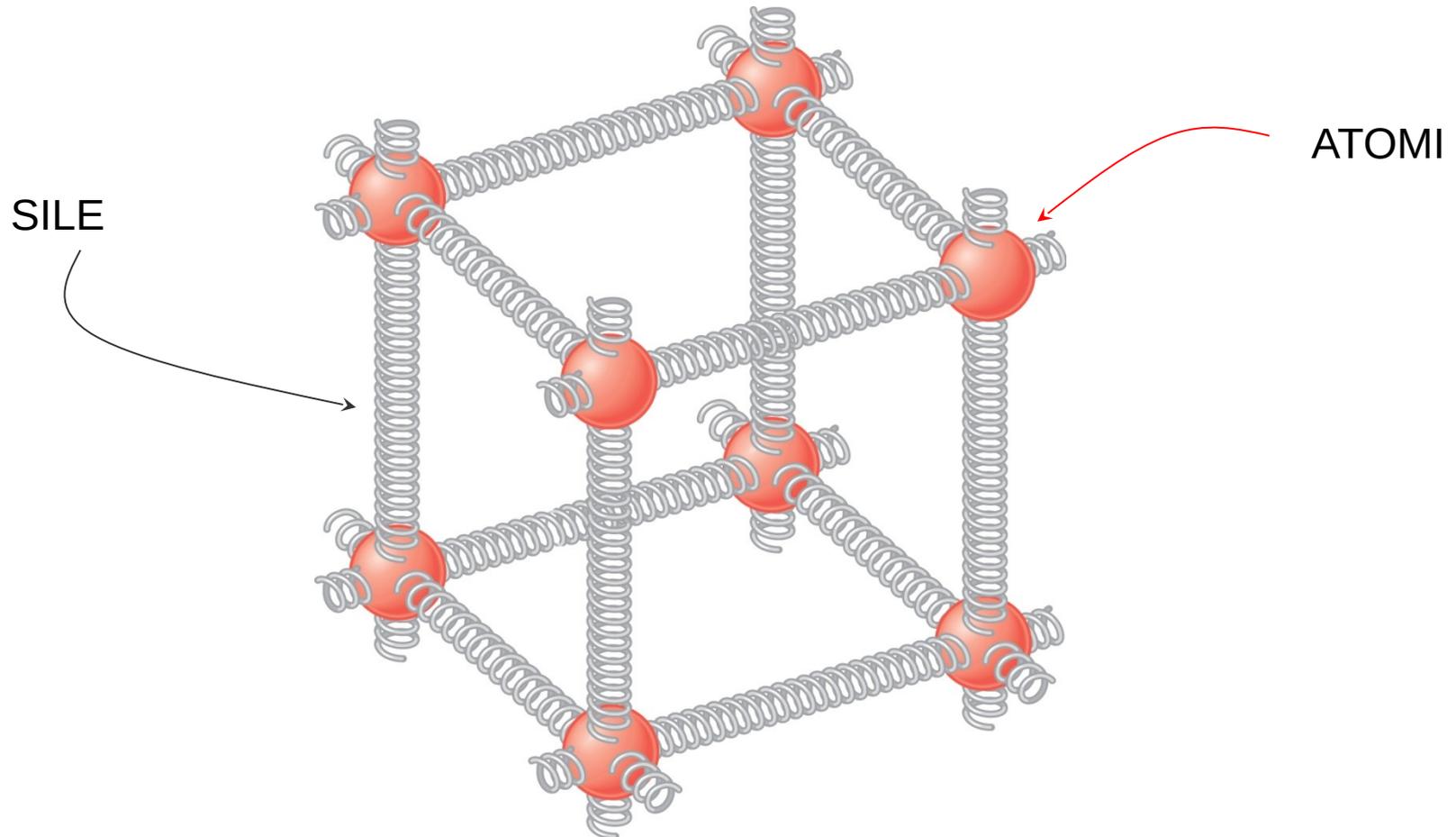
Rezonancija nastaje kad se frekvencija vanjske sile slaže s vlastitom frekvencijom titrajnog sustava.



$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

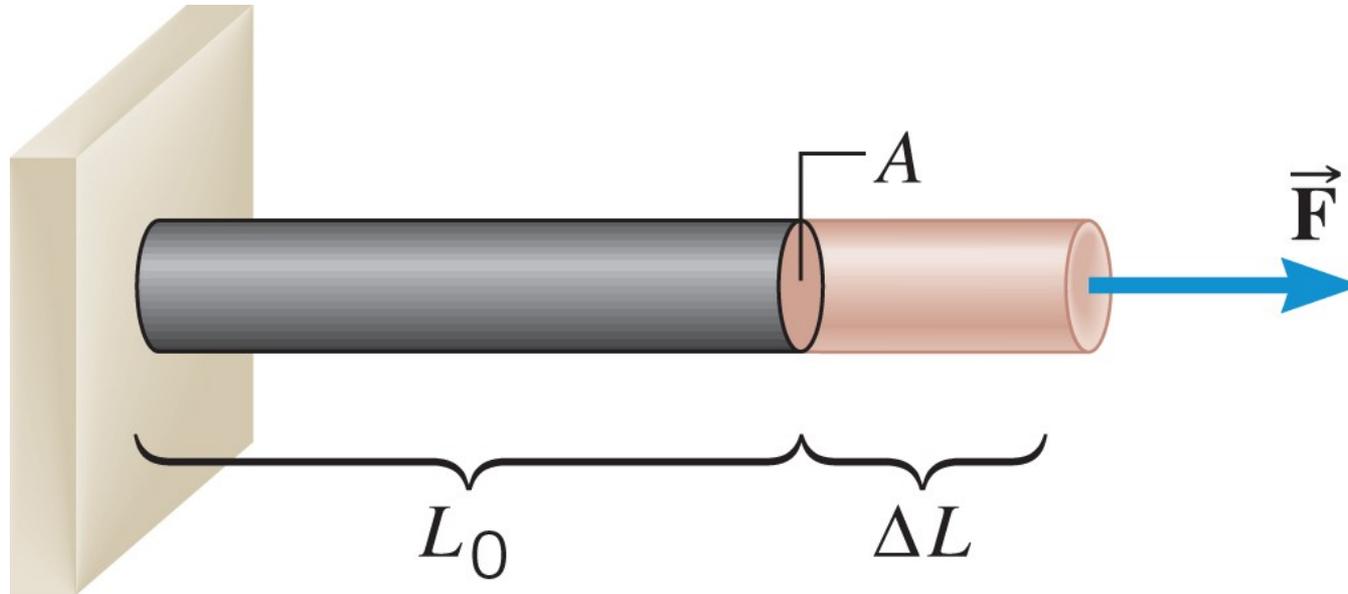
10.7 *Elastična deformacija*

Zbog ovih "opruga" na atomskom nivou, materijali se nastoje vratiti u početno stanje nakon što vanjska sila više ne djeluje.



WILEY

RASTEZANJE, STEZANJE I YOUNGOVI MODULI



$$F = Y \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right) A$$

Youngovi moduli imaju istu jedinicu kao i tlak: N/m^2

10.7 *Elastična deformacija*

Table 10.1 Values for the Young's Modulus of Solid Materials

Material	Young's Modulus Y (N/m ²)
Aluminum	6.9×10^{10}
Bone	
Compression	9.4×10^9
Tension	1.6×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}
Brick	1.4×10^{10}
Copper	1.1×10^{11}
Mohair	2.9×10^9
Nylon	3.7×10^9
Pyrex glass	6.2×10^{10}
Steel	2.0×10^{11}
Teflon	3.7×10^8
Titanium	1.2×10^{11}
Tungsten	3.6×10^{11}

WILEY

Primjer 12 Stezanje kostiju

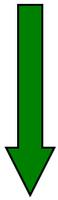
U cirkuskoj točki, akrobat nogama drži ukupnu težinu 1080 N. Svaka njegova bedrena kost ima duljinu 0,55 m i prosječni poprečni presjek $7,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Koliko se stisne svaka bedrena kost pod tom težinom?



Uwe Leim/©AP/Wide World Photos

10.7 Elastična deformacija

$$F = Y \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right) A$$



$$\Delta L = \frac{F L_0}{Y A} = \frac{1080 \text{ N} \cdot 0,55 \text{ m}}{9,4 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2} \cdot 2 \cdot 7,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,041 \text{ mm}$$

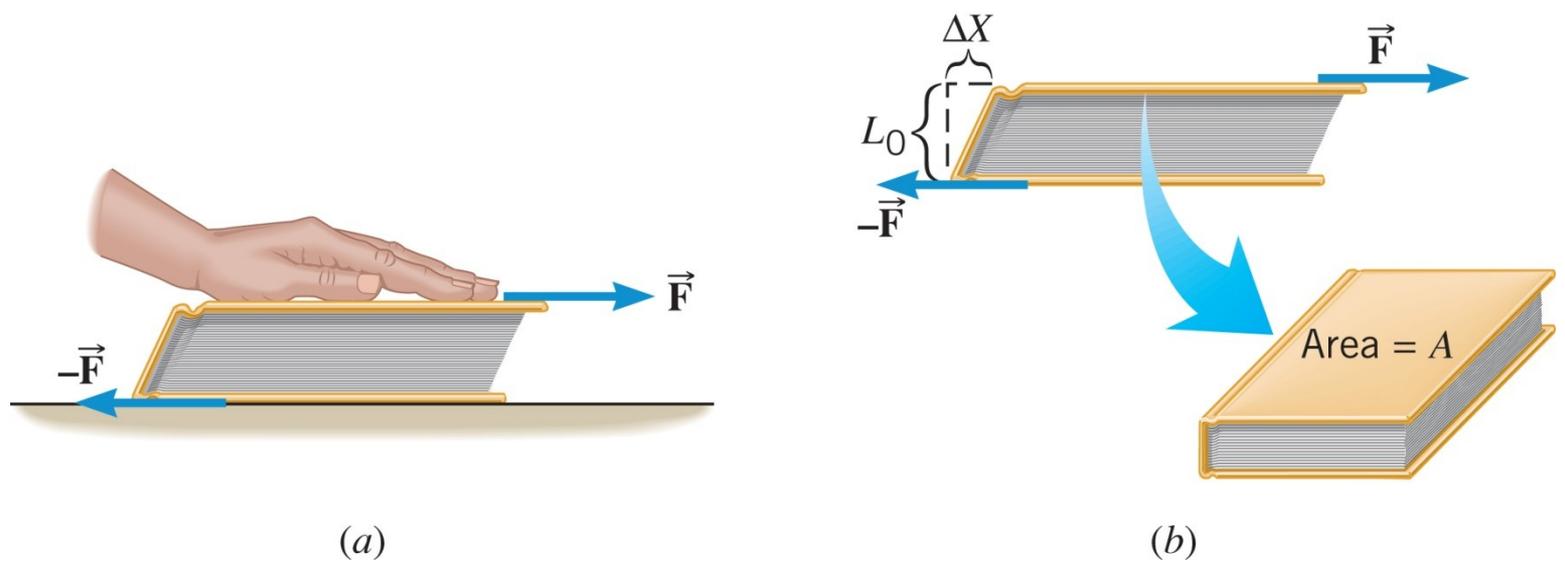


Uwe Lein/AP/Wide World Photos

WILEY

10.7 *Elastična deformacija*

SMICANJE I MODULI SMICANJA



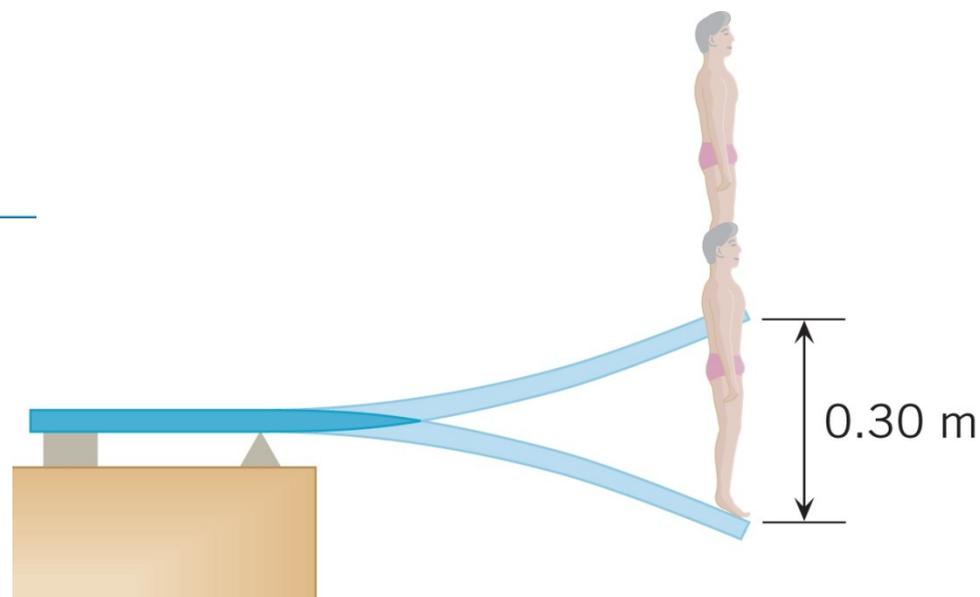
$$F = S \left(\frac{\Delta x}{L_0} \right) A$$

Moduli smicanja imaju istu jedinicu kao i tlak: N/m²

10.7 Elastična deformacija

Table 10.2 Values for the Shear Modulus of Solid Materials

Material	Shear Modulus S (N/m^2)
Aluminum	2.4×10^{10}
Bone	1.2×10^{10}
Brass	3.5×10^{10}
Copper	4.2×10^{10}
Lead	5.4×10^9
Nickel	7.3×10^{10}
Steel	8.1×10^{10}
Tungsten	1.5×10^{11}

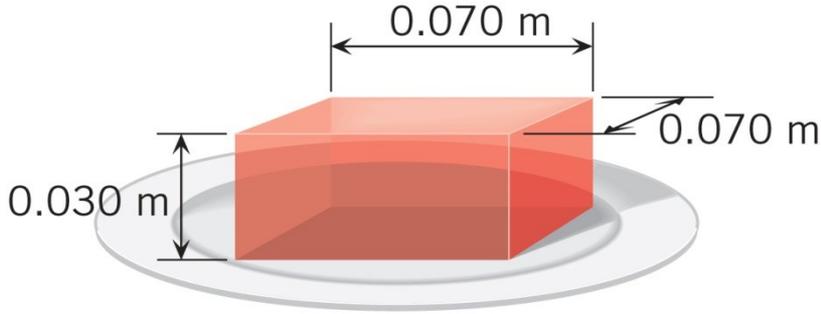


WILEY

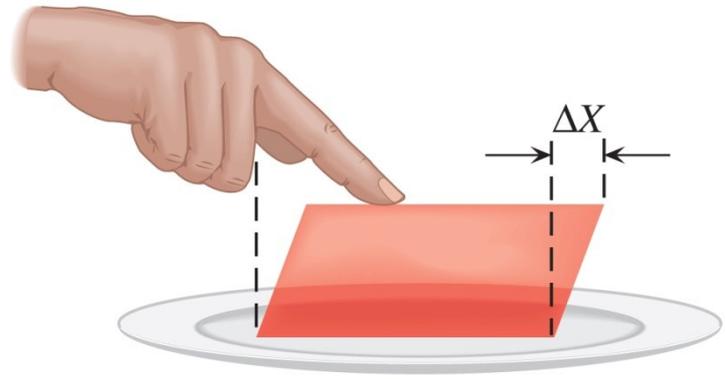
10.7 *Elastična deformacija*

Primjer 14 J-E-L-L-O

You push tangentially across the top surface with a force of 0.45 N. The top surface moves a distance of 6.0 mm relative to the bottom surface. What is the shear modulus of Jell-O?



(a)



(b)

Jell-O /'dʒeləʊ/



Cherry flavor, produced by Kraft Foods

Type	Gelatin desserts, puddings
Course	Dessert
Place of origin	United States
Region or state	LeRoy, New York
Creator	Pearle Wait
Invented	1897

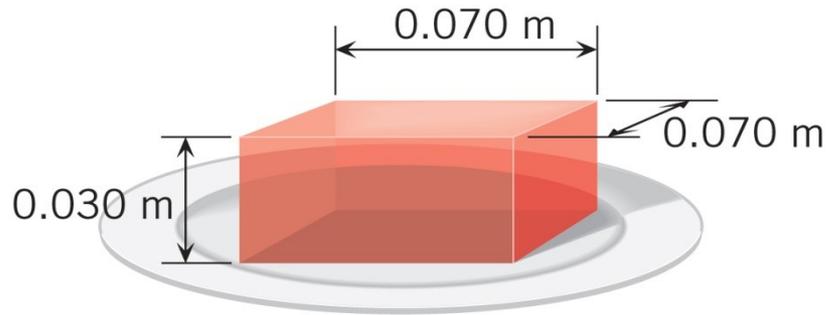
$$F = S \left(\frac{\Delta x}{L_0} \right) A$$



$$S = \frac{F L_0}{A \Delta x}$$

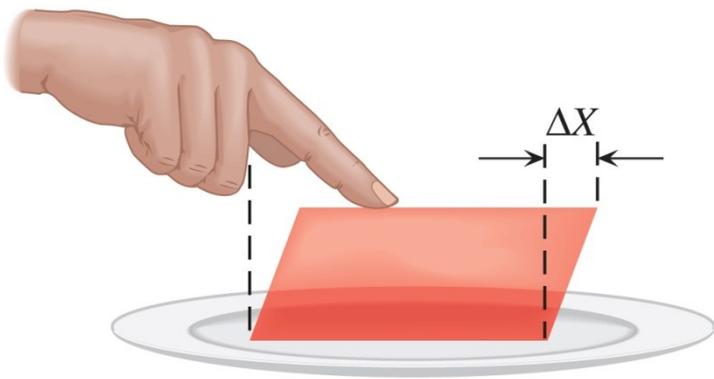
WILEY

10.7 *Elastična deformacija*



(a)

$$S = \frac{F L_0}{A \Delta x}$$

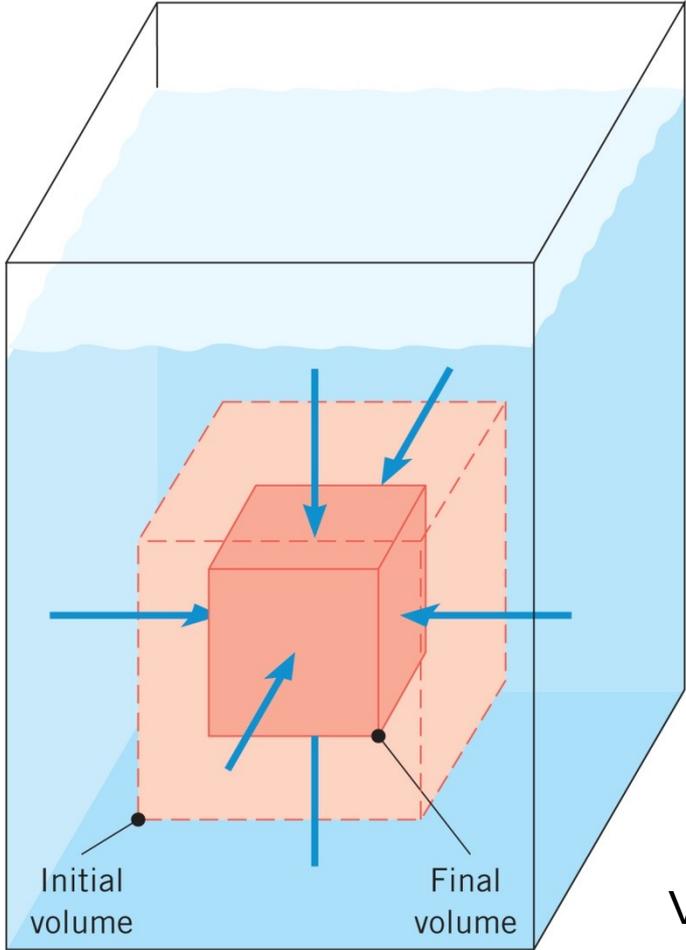


(b)

$$S = \frac{F L_0}{A \Delta x} = \frac{0,45 \text{ N} \cdot 0,03 \text{ m}}{(0,07 \text{ m})^2 \cdot 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 460 \text{ Nm}^{-2}$$

10.7 *Elastična deformacija*

VOLUMNE DEFORMACIJE I VOULMNI MODULI



$$\Delta P = -B \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)$$

Volumni moduli imaju istu jedinicu kao i tlak: N/m²

Table 10.3 Values for the Bulk Modulus of Solid and Liquid Materials

Material	Bulk Modulus B [N/m ² (=Pa)]
<i>Solids</i>	
Aluminum	7.1×10^{10}
Brass	6.7×10^{10}
Copper	1.3×10^{11}
Diamond	4.43×10^{11}
Lead	4.2×10^{10}
Nylon	6.1×10^9
Osmium	4.62×10^{11}
Pyrex glass	2.6×10^{10}
Steel	1.4×10^{11}
<i>Liquids</i>	
Ethanol	8.9×10^8
Oil	1.7×10^9
Water	2.2×10^9

10.8 Naprezanje, relativna deformacija i Hookeov zakon

Općenito, veličinu $\frac{F}{A}$ nazivamo **naprežanjem**.

Promjenu veličine podijeljenu s početnom veličinom nazivamo **relativnom deformacijom**:

$$\frac{\Delta V}{V_0} \quad \frac{\Delta L}{L_0} \quad \frac{\Delta x}{L_0}$$

HOOKEOV ZAKON

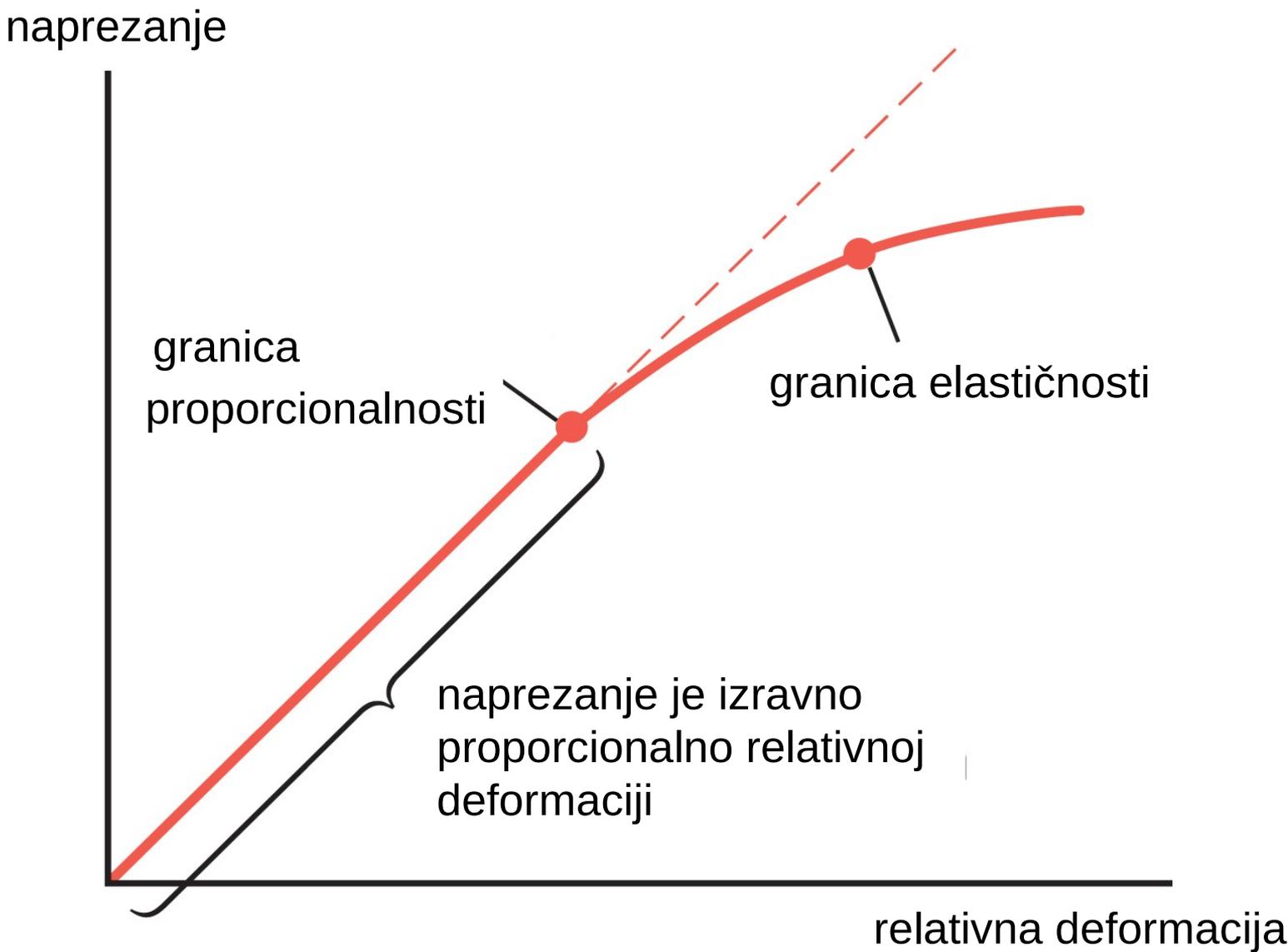
Naprezanje je proporcionalno relativnoj deformaciji.

Relativna deformacija je bezdimenzijska veličina.

Jedinica SI naprežanja: N/m²

WILEY

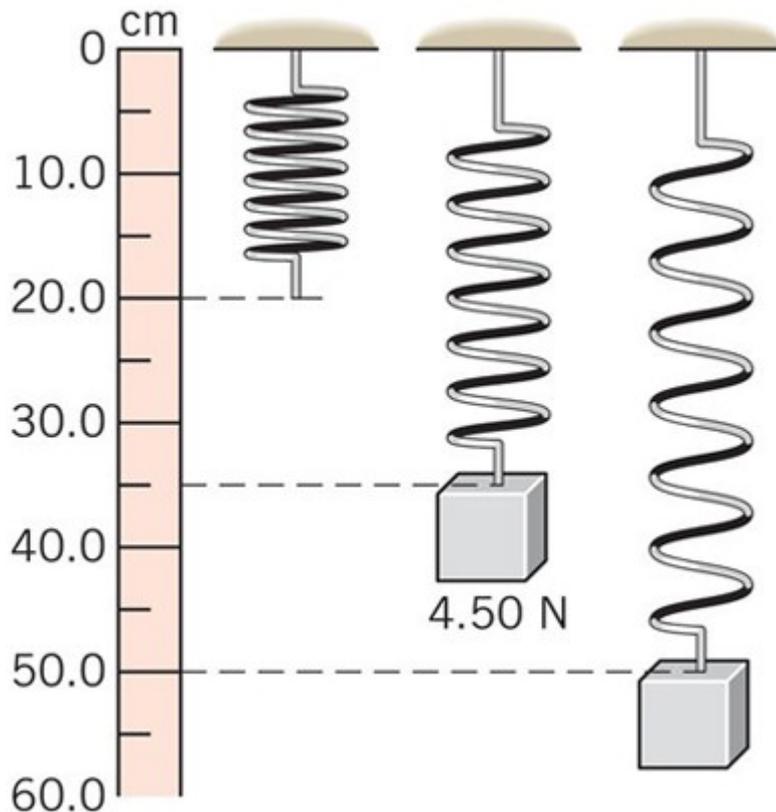
10.8 Naprezanje, relativna deformacija i Hookeov zakon



ZADACI ZA VJEŽBU

1. Slika prikazuje tri identične opruge koje vise sa stropa. Prva je neopterećena, a na drugoj visi teret težine 4,50 N. Teret nepoznate težine obješen je na treću oprugu. Odredite: (a) konstantu opruge; (b) težinu tereta na trećoj opruzi.

RJEŠENJE: (a) 30,0 N/m; (b) 9,00 N



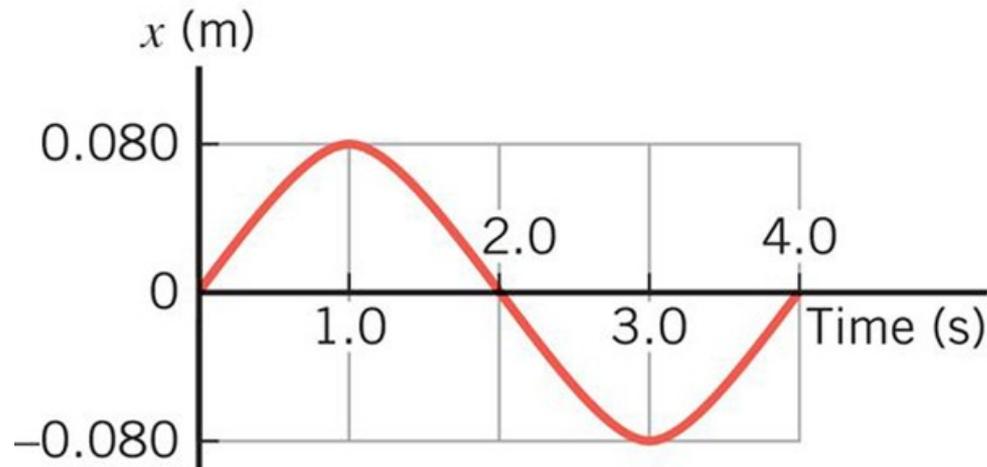
ZADACI ZA VJEŽBU

2. Kad osoba težine 670 N stane na kućnu vagu opruga te vage sabije se 0,79 cm. (a) Koliko iznosi konstanta opruge? (b) Koliko je teška druga osoba koja oprugu te vage sabije 0,34 cm?

RJEŠENJE: $8,5 \cdot 10^4$ N/m; 290 N

3. Tijelo mase 0,80 kg visi na opruzi i harmonijski titra. Slika prikazuje otklon kao funkciju vremena. Odredite: (a) amplitudu; (b) kutnu frekvenciju; (c) konstantu opruge; (d) brzinu tijela za $t = 1,0$ s; (e) iznos akceleracije tijela za $t = 1,0$ s.

RJEŠENJE: (a) 0,080 m; (b) 1,6 rad/s; (c) 2,0 N/m; (d) 0; (e) 0,20 m/s²



WILEY

ZADACI ZA VJEŽBU

4. Kad se objekt mase 2,8 kg objesi na kraj opruge opruga se istegne 0,018 m. Koliku masu treba objesiti na tu oprugu da bi ona titrala frekvencijom od 3,0 Hz?

RJEŠENJE: 4,4 kg

5. Metalna kuglica mase 0,60 kg titra obješena na oprugu. Kad se opruga rastegne od 0,12 m do 0,23 m (s obzirom na duljinu neopterećene opruge), brzina se smanji s 5,70 na 4,80 m/s. Koliko iznosi konstanta opruge?

RJEŠENJE: 180 N/m

6. Astronauti na nekom dalekom planetu koriste njihalo duljine 1,2 m. Njihalo harmonijski titra i napravi 100 titraja za 280 s. Odredite iznos gravitacijskog ubrzanja na tom planetu.

RJEŠENJE: 6,0 m/s²

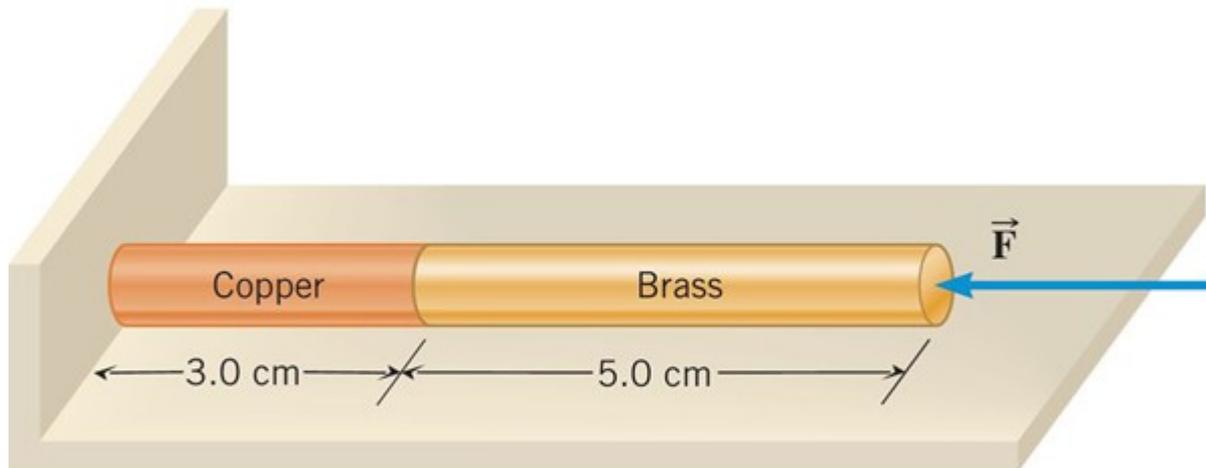
7. Puni čelični valjak postavljen je, jednom svojom bazom, na pod. Visina valjka je 3,6 m, a polumjer 65 cm. Kad se na gornju bazu valjka stavi teret, valjak se stisne za iznos $5,7 \cdot 10^{-7}$ m. Koliko je težak teret?

RJEŠENJE: $4,2 \cdot 10^4$ N

ZADACI ZA VJEŽBU

8. Bakreni i mjedeni valjak postavljeni su jedan do drugog, kao na slici. Svaki od valjaka ima polumjer 0,25 cm. Slobodni kraj mjedenog valjka pritisnut je silom od 6500 N. Za koji se iznos cijeli sustav skrati?

RJEŠENJE: $2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$



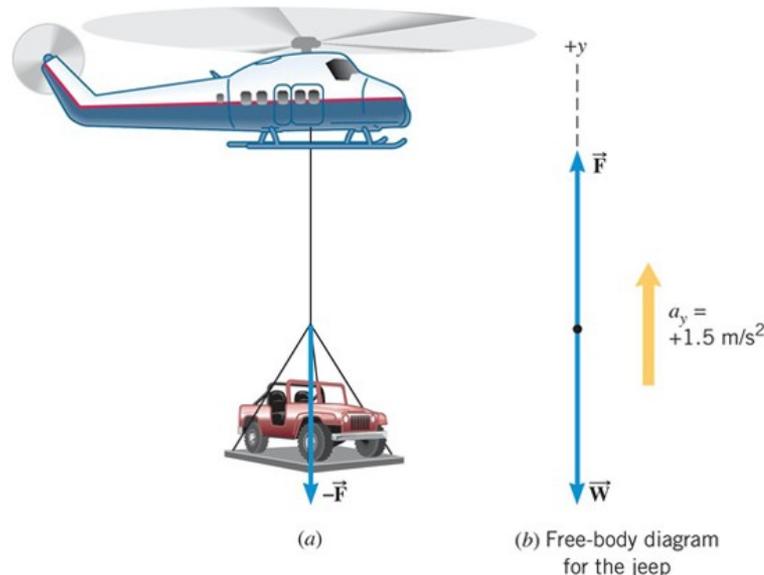
ZADACI ZA VJEŽBU

9. Pauk mase $1,0 \text{ g}$ visi na svojoj niti koja ima Youngov modul $4,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ i polumjer $13 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pretpostavite da čovjek mase 95 kg visi na aluminijskoj žici. Koji polumjer mora imati ta žica da bi njezina relativna deformacija bila ista kao kod paukove niti?

RJEŠENJE: 1,0 mm

10. Helikopter, pomoću čelične sajle, podiže terenca mase 2100 kg . Neopterećena sajla dugačka je 16 m , a njezin je polumjer 5 mm . Koliko je produljenje sajle ako se helikopter podiže ubrzanjem od $1,5 \text{ m/s}^2$?

RJEŠENJE: 2,4 cm



WILEY

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Titranje
2. Elastična sila
3. Jednostavno harmonijsko gibanje
4. Amplituda, period i frekvencija
5. Elastična potencijalna energija
6. Period matematičkog njihala i period fizičkog njihala
7. Prigušeno titranje
8. Prisilno titranje
9. Rezonancija
10. Hookeov zakon