STABILNOST KONSTRUKCIJA

Analiza stabilnosti

OKVIRA

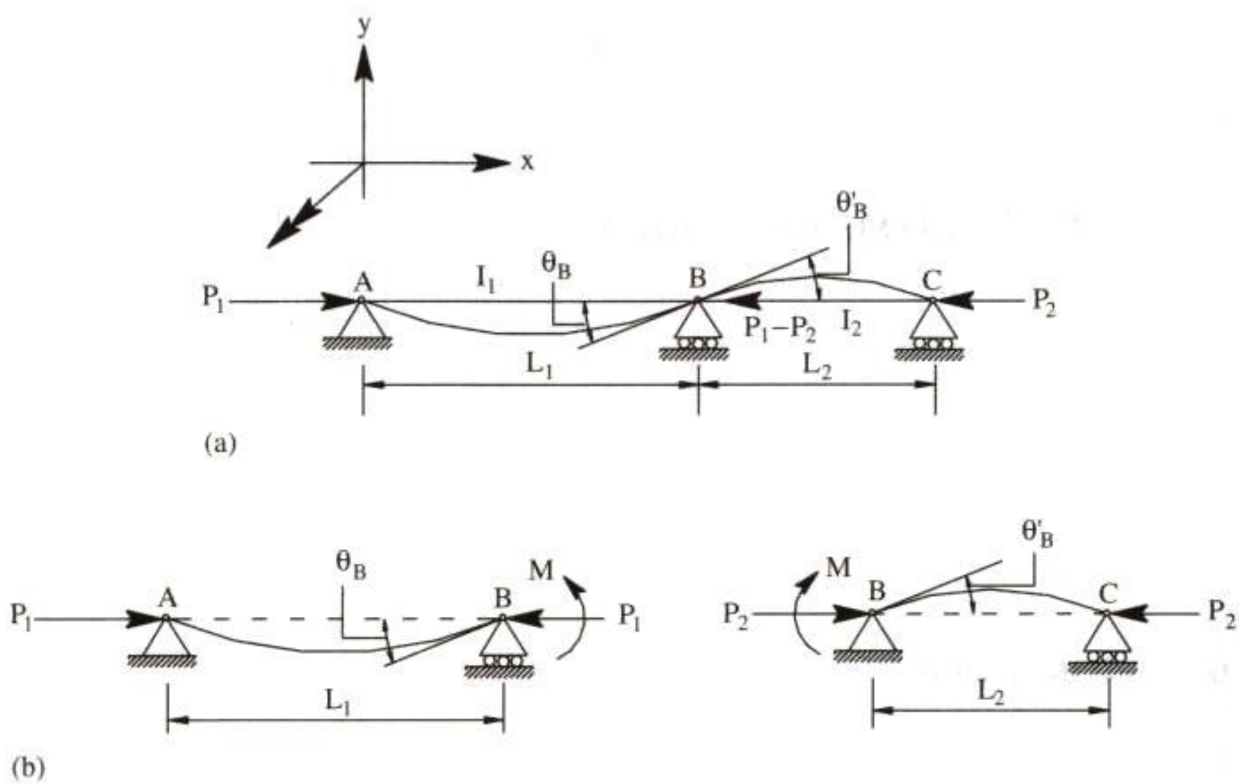
STABILNOST OKVIRA

- *Stupovi i grede najčešće su kruto spojeni elementi skeletne konstrukcije – OKVIRA;*
- *Rubni uvjeti elemenata okvira (i njihove duljine izvijanja) ovise o vlastitoj i relativnoj krutosti susjednih elemenata;*
- *Pomaci/progibi pojedinog elementa istovremeno uzrokuju iskrivljenje svih ostalih elemenata;*
- *Analiza stabilnosti okvira kao cjeline:*
  - *Klasične diferencijalne jednadžbe*
  - *Kvazi-geometrijska analiza*
  - *Matrični pristup (metoda krutosti)*
  - *Metoda raspodjele momenata, itd.*

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

- *Najjednostavniji oblik kruto spojenog okvira*



- *1x statički neodređen sustav*
- *Uzdužni tlak i krutost na savijanje konstantni su uunutar raspona*
- *Uvjeti kontinuiteta / kompatibilnosti:*

$$\theta_B = \theta'_B \quad tj. \quad \theta_B - \theta'_B = 0 \tag{5.1}$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

$$\theta_B = \left(\frac{ML_1}{3EI_1}\right)\varphi\left(\psi_1\right)$$

$$gdje\,su \quad \psi_1 = \left(\frac{\alpha_1 L_1}{2}\right), \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}}$$

$$\theta_B' = -\left(\frac{ML_2}{3EI_2}\right)\varphi\left(\psi_2\right)$$

$$gdje\,su \quad \psi_2 = \left(\frac{\alpha_2 L_2}{2}\right), \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}$$

- *uvrštavanjem u jed. (5.1)* $\Rightarrow$

$$\left(\frac{ML_1}{3EI_1}\right)\left[\varphi\left(\psi_1\right) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\varphi\left(\psi_2\right)\right] = 0$$

- *Kako je* $\left(ML_1/\left(3EI_1\right)\right) \neq 0$
  karakteristična je jednadžba

$$\varphi\left(\psi_1\right) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\varphi\left(\psi_2\right) = 0 \qquad (5.2)$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

- *Neka je* $P_2 = \lambda P_1.$ *Tada je:*

$$\psi_2 = \gamma\psi_1 \quad gdje\ je \quad \gamma = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left[\lambda\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\right]^{1/2}.$$

- *Karakteristična jednadžba postaje*

$$\varphi(\psi_1) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\varphi(\gamma\psi_1) = 0 \qquad (5.3)$$

- *Korjeni ove jednadžbe daju kritične sile izvijanja pri savijanju kontinuirane grede s dva polja.*
- *Uobičajen je slijedeći primjer:*

$$L_2 = L_1 = L, \quad I_2 = I_1 = I, \quad P_2 = P_1 = P \ \ tj.\ \lambda = 1.$$

U ovom slučaju, štapovi se izvijaju kao što je to prikazano na početnoj slici, moment savijanja nad srednjim ležajem jednak je nuli te se svaki pojedinačni raspon može analizirati samostalno kao obostrano zglobno oslonjeni štap. Stoga je

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

- *Primjer s različitim rasponima:*

$$L_1 = (2/3)L_2 = L, \quad I_2 = I_1 = I, \quad \lambda = 1$$

Tada su:

$$\psi_1 = \frac{2}{3}\psi_2 = \psi \quad i \quad \gamma = \frac{3}{2}$$

$$\varphi(\psi) + \left(\frac{3}{2}\right)\varphi\left(\frac{3\psi}{2}\right) = 0$$

$$\left[\frac{3}{2\psi}\left(\frac{1}{2\psi} - \frac{1}{tg\,2\psi}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{3\psi}\right)\left(\frac{1}{3\psi} - \frac{1}{tg\,3\psi}\right)\right] = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{2\psi} - \frac{1}{tg\,2\psi}\right) + \left(\frac{1}{3\psi} - \frac{1}{tg\,3\psi}\right)\right] = 0$$

Metodom pokušaja, najmanji je korjen: 2ψ=2,427

Stoga je 2ψ=αL=2,427 $\Rightarrow$ $$P_{cr} = 5{,}89\,\frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1{,}294\,L)^2}.$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

- *Primjer s različitim rasponima:*

$$L_1 = (2/3)L_2 = L, \quad I_2 = I_1 = I, \quad P_2 = 0$$

tj. samo je prvi raspon AB tlačno opterećen

Tada su:

$$\theta_B = \left(\frac{ML_1}{3EI_1}\right)\varphi(\psi_1) \quad i \quad \theta_B' = -\left(\frac{ML_2}{3EI_2}\right)$$

$$\left(\frac{ML_1}{3EI_1}\right)\left[\varphi(\psi_1) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\right] = 0$$

Kako je M≠0, karakteristična je jednadžba oblika

$$\varphi(\psi_1) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = 0$$

$$2\psi_1 ctg\, 2\psi_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)(2\psi_1)^2 = 0$$

Za zadane odnose raspona: $2\psi_1 ctg 2\psi_1 = 1 + (1/2)(2\psi_1)^2$

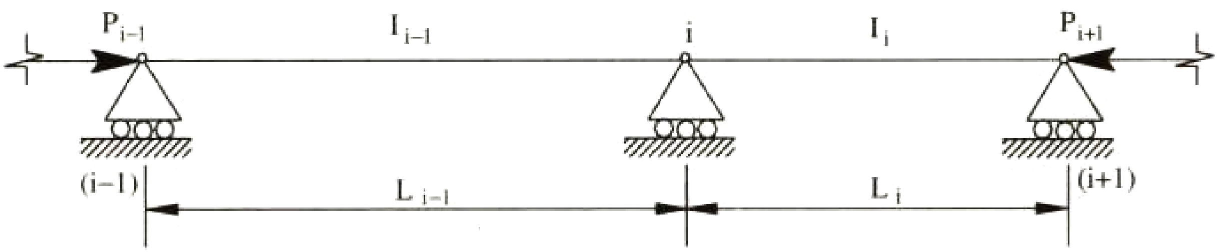
Metodom pokušaja, najmanji je korjen: 2ψ=3,5909

Stoga je $2\psi_1 = \alpha_1 L = 3{,}5909 \Rightarrow$ $P_{cr} = 12{,}895\,\frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}875\,L)^2}.$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KONTINUIRANI STUPOVI I GREDE

- *Postupak se može primijeniti i na kontinuirane grede s više raspona*



- *Kontinuitet/kompatibilnost na unutarnjim ležajevima "i" uvjetuje zajedničku tangentu progibne krivulje dvaju raspona, tj.* $\theta_i = \theta_i'$

$$\theta_i = \theta_{0i} + \left(\frac{M_{i-1}L_{i-1}}{6EI_{i-1}}\right)\varphi_2(\psi_{i-1}) + \left(\frac{M_iL_{i-1}}{3EI_{i-1}}\right)\varphi_1(\psi_{i-1})$$

$$\theta_i' = -\theta_{0i}' - \left(\frac{M_iL_i}{3EI_i}\right)\varphi_1(\psi_i) - \left(\frac{M_{i+1}L_i}{6EI_i}\right)\varphi_2(\psi_i)$$

gdje su θ_{0i} i θ'_{0i} rotacije na unutarnjem ležaju "i" dvaju susjednih raspona uslijed poprečnog opterećenja.

$$M_{i-1}\varphi_2(\psi_{i-1}) + 2M_i\left[\varphi_1(\psi_{i-1}) + \left(\frac{L_i}{L_{i-1}}\right)\left(\frac{I_{i-1}}{I_i}\right)\varphi_1(\psi_i)\right] + M_{i+1}\left[\left(\frac{L_i}{L_{i-1}}\right)\left(\frac{I_{i-1}}{I_i}\right)\varphi_2(\psi_i)\right]$$

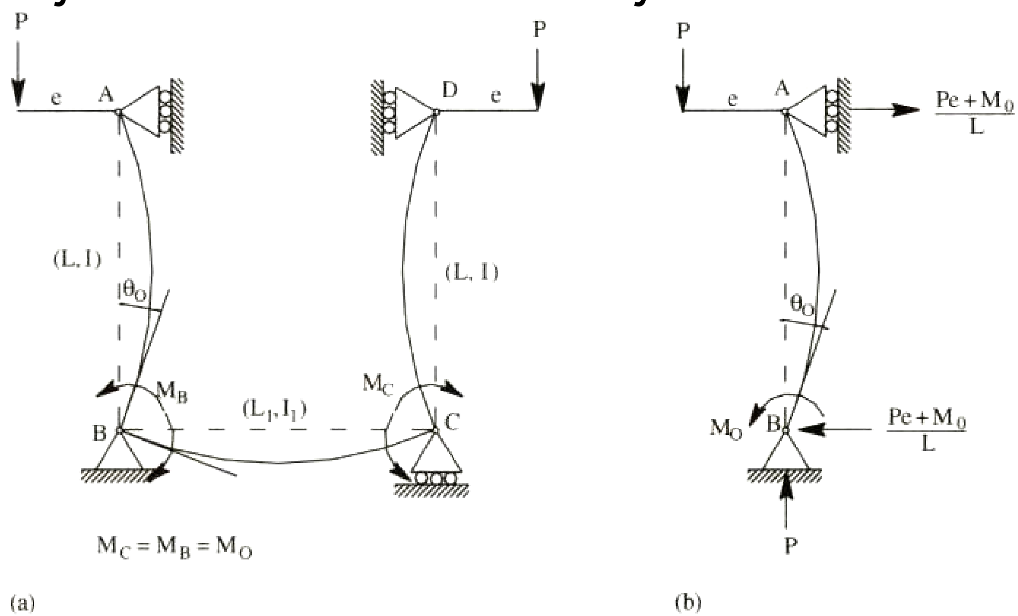
$$= -\left(\frac{6EI_{i-1}}{L_{i-1}}\right)(\theta_{0i} + \theta_{oi}')$$

OPĆI OBLIK TROMOMENTNE JEDNADŽE

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KRUTI OKVIRI

- *Izvijanje krutog okvira predstavlja zapravo izvijanje njegovih tlačnih elemenata*
- *Jednostavni slučaj: izoliranje kritičnog elementa s pripadajućim momentima na krajevima*



- *Rotacija θ_0 u čvoru B:*

$$\theta_0 = \frac{e}{L}(\alpha L\, cosec\alpha L - 1) + \frac{M_0}{PL}(\alpha L ctg\, \alpha L - 1).$$

- *Za gredu BC vrijedi:* $M_0 = \frac{2EI_1}{L_1}\theta_0$

te je

$$\theta_0 = \frac{(e/L)(\alpha L\, cosec\alpha L - 1)}{(1/PL)(2EI_1/L_1)(1 - \alpha L ctg\alpha L) + 1}.$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KRUTI OKVIRI

- *Pri izvijanju okvira, rotacije teže k beskonačnom;*
- *Do toga dolazi kada nazivnik u prethodnom izrazu iščezava tj.*

$$\left(\alpha L ctg \alpha L - 1\right) = \frac{PLL_1}{2EI_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{EI}\right)\left[\left(\frac{I}{I_1}\right)\left(\frac{L_1}{L}\right)\right]L^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha L\right)^2\left[\left(\frac{I}{I_1}\right)\left(\frac{L_1}{L}\right)\right].$$

- *Uobičajeni primjer:*

  $I/L=I_1/L_1$, pri čemu je $ctg\alpha L = \frac{1}{\alpha L} + \frac{\alpha L}{2}.$

- *Metodom pokušaja, najniži je korjen: αL=3,59*

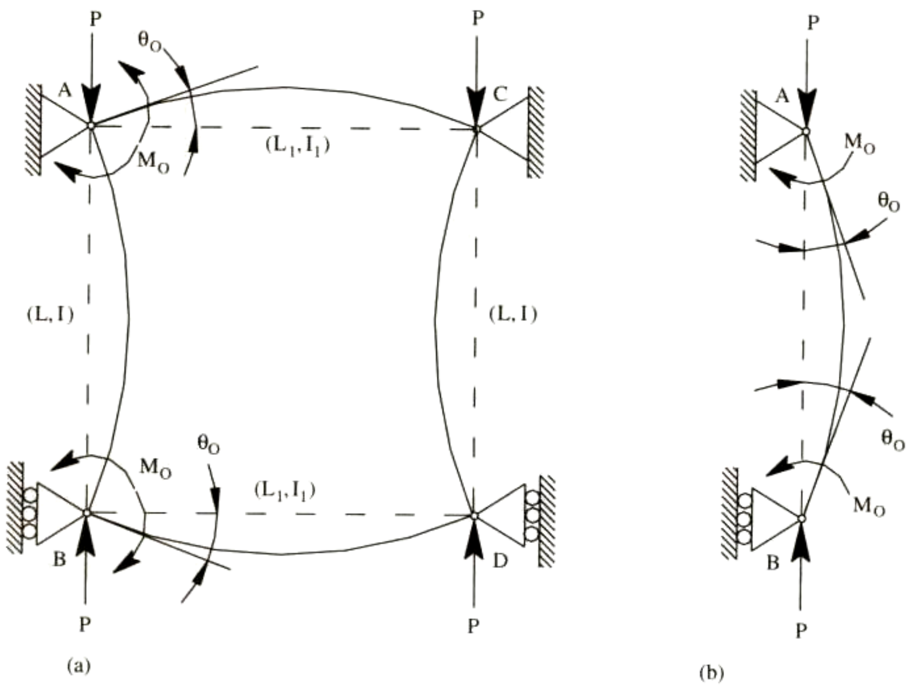
  te je

$$P_{cr} = \left(3{,}59\right)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(0{,}875\, L\right)^2}$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KRUTI OKVIRI

- *Slijedeći je uobičajeni primjer simetrični zatvoreni okvir sa spriječenim poprečnim pomacima čvorova*



- *Kada uzdužni tlak poprimi kritičnu vrijednost, stupovi se AB i CD nastoje poprečno prognuti što rezultira savijanjem greda AC i BD a što kao posljedicu ima elastično uklještenje krajeva stupova;*
- *Stoga su rotacije na krajevima stupova:*

$$\theta_A = \frac{M_A L}{3EI}\varphi_1(\psi) + \frac{M_B L}{6EI}\varphi_2(\psi)$$

$$\theta_B = \frac{M_A L}{6EI}\varphi_2(\psi) + \frac{M_B L}{3EI}\varphi_1(\psi)$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KRUTI OKVIRI

- Pri tome su

$$\varphi_1(\psi)=\frac{3}{2\psi}\left(\frac{1}{2\psi}-\frac{1}{tg2\psi}\right)$$

$$\varphi_2(\psi)=\frac{6}{2\psi}\left(\frac{1}{\sin 2\psi}-\frac{1}{2\psi}\right)$$

$$2\psi=\alpha L=\pi\sqrt{P/P_e},\quad P_e=\pi^2 EI/L^2.$$

- S obzirom na simetriju, vrijedi: M_B=-M_A=M_0 i θ_B=-θ_A=θ_0.
- Uslijed uvjeta kompatibilnosti, rotacija θ_0 stupa mora biti jednaka rotaciji horizontalnog elementa

$$\theta_0=-\frac{M_0 L_1}{2EI_1}.$$

- Tada je

$$\theta_0=-\frac{M_0 L_1}{2EI_1}=\frac{M_0 L}{6EI}\left[2\varphi_1(\psi)+\varphi_2(\psi)\right]=$$

$$=\left(\frac{M_0 L}{6EI}\right)\left(\frac{6}{2\psi}\right)\left(\frac{1}{\sin 2\psi}-\frac{1}{tg2\psi}\right)$$

$$\frac{1}{2\psi}\left(\frac{1}{\sin 2\psi}-\frac{1}{tg2\psi}\right)=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L_1}{L}\right)\left(\frac{I}{I_1}\right)\right].$$

Analiza pomoću diferencijalnih jednadžbi

KRUTI OKVIRI

- *Za karakteristični slučaj: L_1=L i I_1=I:*

$$\frac{1}{2\psi}\left(\frac{1}{\sin 2\psi}-\frac{1}{tg2\psi}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$odnosno \quad tg\psi=-\psi.$$

- *Najniži je korjen ove transcendentalne jednadžbe*

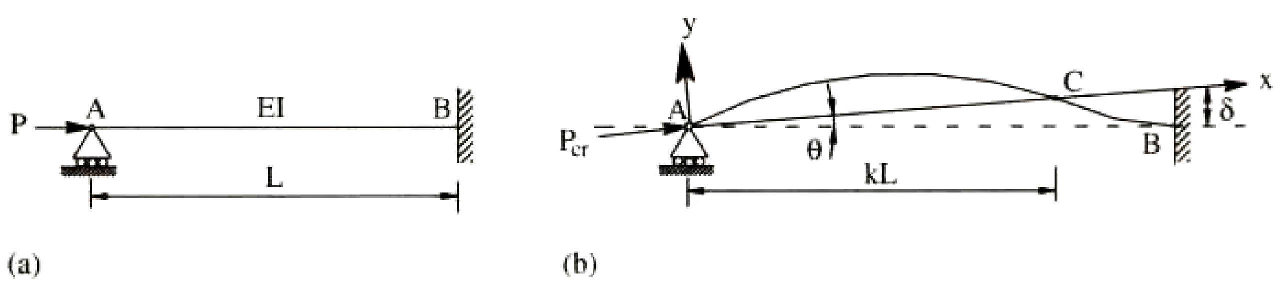
$$\psi=\alpha L/2=2{,}02916$$

- *Stoga je*

$$P_{cr}=\frac{(4{,}0583)^2 EI}{L^2}=\frac{16{,}47EI}{L^2}=\frac{\pi^2 EI}{(0{,}774L)^2}.$$

“Kvazi” - geometrijski pristup (Haarman)

- *Ova se metoda temelji na pretpostavci kojom se elastična krivulja uzdužno opterećenog, početno ravnog štapa opisuje sinusnom krivuljom s obzirom na pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u jednoj i apscisom koja prolazi drugom točkom infleksije.*
- *Kritična vrijednost opterećenja koja može dovesti do izvijanja konstrukcije određuje se uz pomoć rubnih uvjeta i uvjeta kompatibilnosti.*



- *S povećanjem uzdužne sile P, pri izvijanju štapa, rezultantna sila P_{cr} dobiva nagib s obzirom da linija djelovanja sile mora prolaziti dvjema točkama infleksije*
- *Za infinitezimalno male deformacije $P \sim P_{cr}$, jednadžba elastične krivulje između točaka A i C oblika je*

$$y(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{kL}\right) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \left(\frac{A\pi}{kL}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{kL}\right).$$

“Kvazi” - geometrijski pristup (Haarman)

- *Geometrijski rubni uvjeti daju:*

$$y(L) = -\delta = A\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \Rightarrow A = -\frac{\delta}{\sin(\pi/k)}$$

$$y'(L) = -\theta = -\left(\frac{\delta}{L}\right) = \left(\frac{A\pi}{kL}\right)\cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

što dovodi do karakteristične jednadžbe oblika

$$\frac{\delta}{L} = -\left(\frac{A\pi}{kL}\right)\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\delta}{\sin(\pi/k)}\left(\frac{\pi}{kL}\right)\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

odnosno $$tg\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi}{k}.$$

- *Metodom pokušaja i pogreške dobije je rješenje*

$$(\pi/k) = 4{,}4934 \quad \text{odnosno} \quad k \approx 0{,}6992 = 0{,}7$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}7L)^2} = \frac{20{,}191\,EI}{L^2}.$$

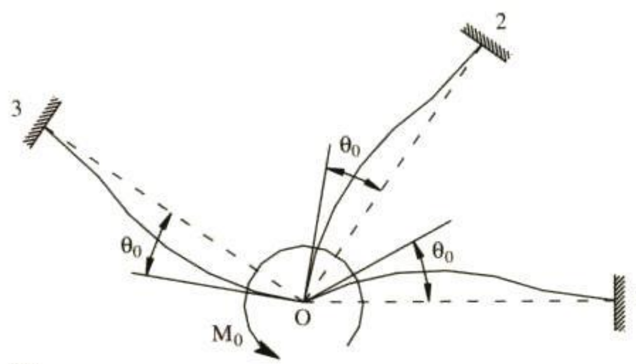
- *Metoda je podjednako primijenjiva i kod krutih okvira.*

Metoda krutosti (ili pomaka)

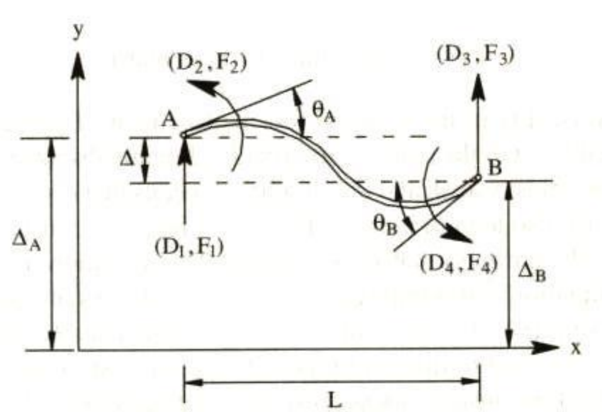
- *Ova se metoda temelji na principu ravnoteže sila i momenata;*
- *Primjena i kod složenih okvira.*

Kriterij određivanja kritičnog opterećenja

- *Promotrimo kruto spojene elemente neke konstrukcije u čijem spoju djeluje moment M_0:*



(a)



(b)

krutost je čvora 0: $k_0 = k_{01} + k_{02} + k_{03}$

te je $\theta_0 = M_0 / k_0$.

Metoda krutosti (ili pomaka)

Kriterij određivanja kritičnog opterećenja

- *Utjecaj uzdužnog tlaka očituje se u smanjenju krutosti štapova;*
- *Ako opterećenje konstantno raste, krutost čvora k_0 opada a rotacija θ_0 nastavlja rasti sve do sloma okvira uslijed elastične nestabilnosti u čvoru (u trenutku dostizanja kritične sile, rotacija teži beskonačnom);*
- *Sukladno tome se može postaviti kriterij stabilnosti: pri kritičnom opterećenju, pomaci (rotacije) postaju beskonačni a krutost čvora se smanjuje do iščezavanja;*
- *Ako konstrukcija ima više krutih čvorova, govorimo o matrici krutosti sustava (pri tome se matrica krutosti konstrukcije čiji su elementi izloženi djelovanju uzdužne sile razlikuje od uobičajene matrice krutosti);*

$$\{F\} = [\overline{\mathrm{K}}]\{D\}$$

$$\{D\} = [\overline{\mathrm{K}}]^{-1}\{F\} = \left[\frac{adj[\overline{\mathrm{K}}]}{|\overline{\mathrm{K}}|}\right]\{F\}$$

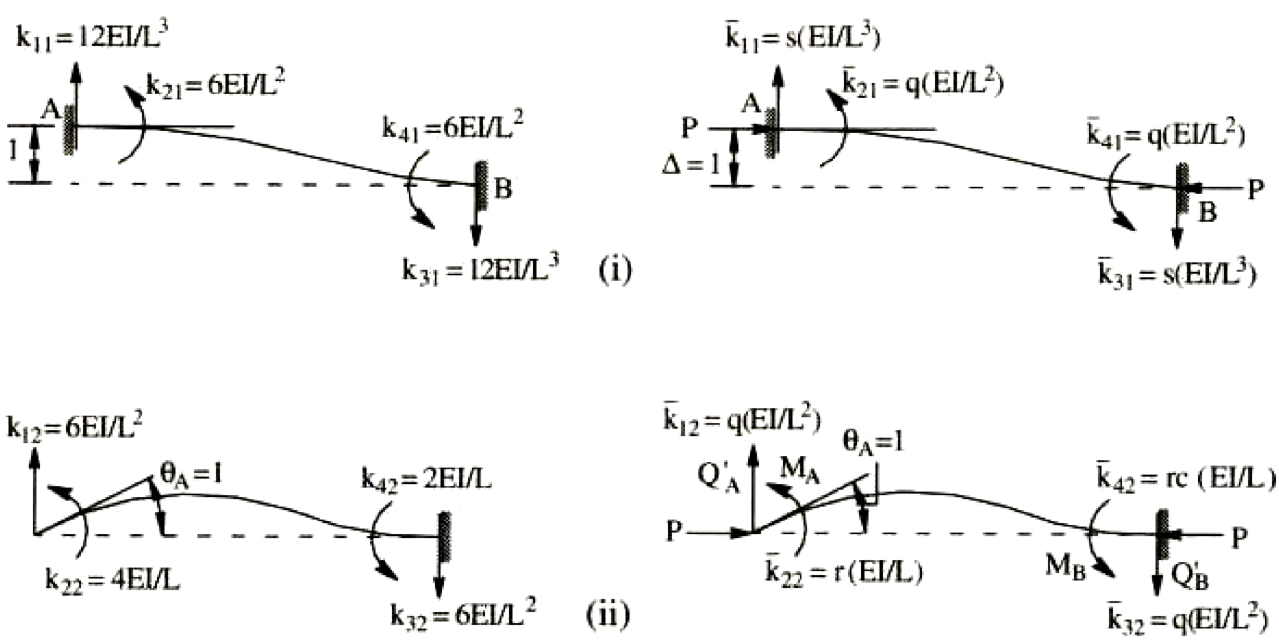
- *gdje su {F} – vektor čvornih sila, {D} – pomaci čvorova,*
  {K} – matrica krutosti konstrukcijskog sustava.
- *Kako bi bilo koji pomak postao beskonačno velik, determinantna matrice krutosti iščezava → karakteristična jednadžba* $|\overline{\mathrm{K}}| = 0.$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Matrica krutosti s utjecajem uzdužne sile

- *Matrica krutosti* ***[k]*** *elementa ili štapa određuje njegovo ponašanje izraženo odnosom opterećenje-deformacija;*
- *k_{ij} – sila u smjeru* ***i*** *uslijed jediničnog pomaka u smjeru* ***j****, pri čemu su svi ostali pomaci zadržani na nuli (“****i****” se odnosi na rezultirajuću ili djelujuću silu a “****j****” na parametre deformacije);*

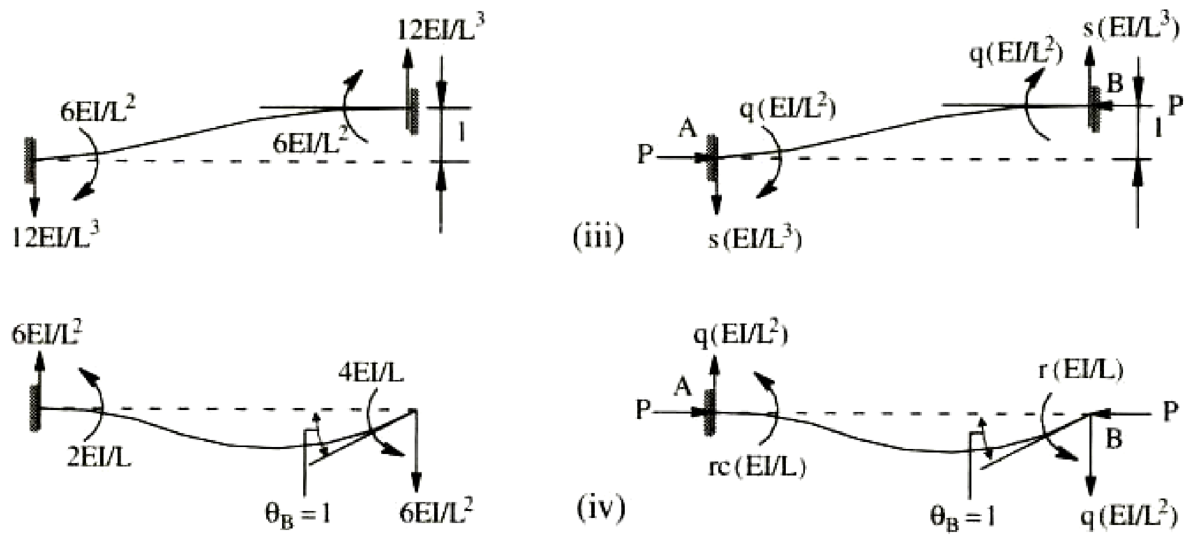
- *Koeficijenti krutosti* ***bez*** *i* ***sa*** *djelovanjem uzdužne sile*



Metoda krutosti (ili pomaka)

Matrica krutosti s utjecajem uzdužne sile

- *Koeficijenti krutosti* ***bez*** *i* ***sa*** *djelovanjem uzdužne sile*



- *Koeficijenti korekcije* ***r***, ***rc***, ***q*** *i* ***s*** *funkcije su od P, E, I i L te ih često zovemo i* ***koeficijentima stabilnosti***:
  - *r, rc – rotacijski koeficijenti*
  - *q, s – posmični koeficijenti;*
- *Odnos sila-pomak elementa izražen pomoću matrice krutosti a u funkciji omjera P/Pe glasi*

$$\left(\frac{EI}{L}\right)\begin{bmatrix} s & q & -s & q \\ q & r & -q & rc \\ -s & -q & s & -q \\ q & rc & -q & r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_A/L \\ \theta_A \\ \Delta_B/L \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_A L \\ M_A \\ Q_B L \\ M_B \end{Bmatrix}.$$

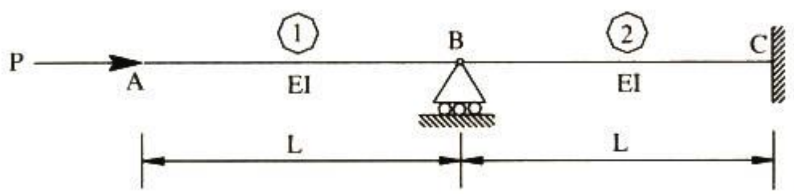
Metoda krutosti (ili pomaka)

Matrica krutosti s utjecajem uzdužne sile

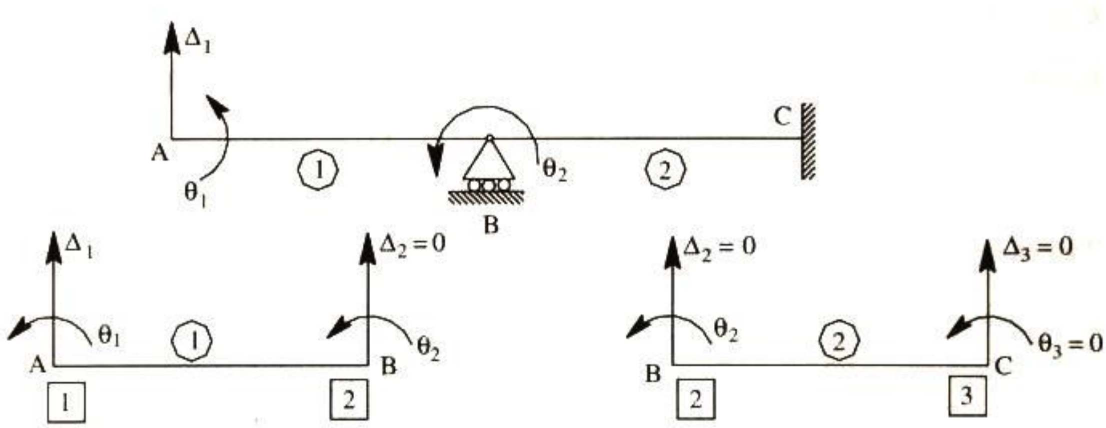
- *Veličina matrice krutosti može se smanjiti uz $Q_B=-Q_A=Q$ te kombiniranjem poprečnih pomaka Δ_A i Δ_B u njihov relativni odnos $\Delta=\Delta_A-\Delta_B$:*

$$\begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L}\right) \begin{bmatrix} s & q & q \\ q & r & rc \\ q & rc & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta/L \\ \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}.$$

- *Lokalne matrice krutosti pojedinih elemenata slažu se u globalnu matricu krutosti konstrukcije koja se tada koristi za određivanje kritičnog opterećenja;*
- *Primjer: kontinuirana greda preko dva polja*



(a)



(b)

Metoda krutosti (ili pomaka)

Matrica krutosti s utjecajem uzdužne sile

- *Element #1*

$$
[\bar{k}]_1 = \left(\frac{EI}{L}\right)_1
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\Delta_1/L \quad \theta_1}^{\text{Čvor 1}} & & \overbrace{\Delta_2/L \quad \theta_2}^{\text{Čvor 2}} & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc}
s & q & -s & q \\
q & r & -q & rc \\
\hline
-s & -q & s & -q \\
q & rc & -q & r
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \Delta_1/L \\ \theta_1 \end{array}\right\} 1 \\
\left.\begin{array}{c} \Delta_2/L \\ \theta_2 \end{array}\right\} 2
\end{array}
$$

- *Element #2*

$$
[\bar{k}]_2 = \left(\frac{EI}{L}\right)_2
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\Delta_2/L \quad \theta_2}^{\text{Čvor 2}} & & \overbrace{\Delta_3/L \quad \theta_3}^{\text{Čvor 3}} & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc}
s & q & -s & q \\
q & r & -q & rc \\
\hline
-s & -q & s & -q \\
q & rc & -q & r
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \Delta_2/L \\ \theta_2 \end{array}\right\} 2 \\
\left.\begin{array}{c} \Delta_3/L \\ \theta_3 \end{array}\right\} 3
\end{array}
$$

- *Matrica krutosti cijele konstrukcije* $\left[\overline{K}\right] = \left[\overline{k}\right]_1 + \left[\overline{k}\right]_2$

$$
[\bar{K}] = \left(\frac{EI}{L}\right)
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \overbrace{\Delta_1/L \quad \theta_1}^{\text{Čvor 1}} & & \overbrace{\Delta_2/L \quad \theta_2}^{\text{Čvor 2}} & & \overbrace{\Delta_3/L \quad \theta_3}^{\text{Čvor 3}} & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
s & q & 0 & q & & \\
q & r & 0 & rc & & \\
\hline
0 & 0 & 0+0 & 0+0 & 0 & 0 \\
q & rc & 0+0 & r+r & 0 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
= \left(\frac{EI}{L}\right)
\begin{pmatrix}
s & q & q \\
q & r & rc \\
q & rc & 2r
\end{pmatrix}
$$

- *Za slučaj elastične nestabilnosti vrijedi*

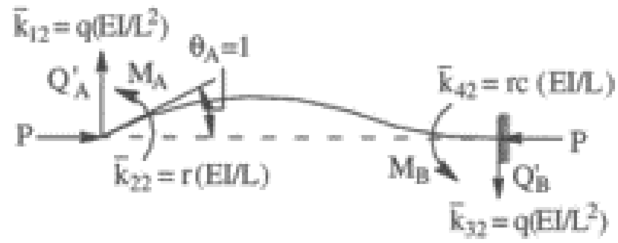
$$
\left|\overline{K}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2(2rc - 3r) + s\left[2r^2 - (rc)^2\right] = 0
$$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – bez poprečnog pomaka

- *Za štap AB*

$$\bar{k}_{11} = \frac{M_A}{\theta_A}, \qquad \bar{k}_{21} = \frac{M_B}{\theta_A}$$



prijenosni koeficijent:

$$c = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\bar{k}_{21}}{\bar{k}_{11}}$$

- *Rješenje dif. jednadžbe progiba (bez poprečnog opt.)*

$$\left(\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}\right) + \alpha^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C\left(\frac{x}{L}\right) + D$$

Uz rubne uvjete

$$x = 0: \quad y(0) = 0 \; i \; y'(0) = 1,$$
$$x = L: \quad y(L) = 0 \; i \; y'(L) = 0.$$

$$\begin{aligned}
y(0) &= B + D = 0 \quad \text{i.e.} \quad D = -B \\
y'(0) &= A\alpha + \frac{C}{L} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \frac{C}{L} = 1 - A\alpha \\
y(L) &= A \sin \alpha L + B \cos \alpha L + C + D \\
&= A(\sin \alpha L - \alpha L) + B(\cos \alpha L - 1) + L = 0 \\
y'(L) &= \alpha A \cos \alpha L - \alpha B \sin \alpha L + \frac{C}{L} \\
&= A\alpha(\cos \alpha L - 1) - B\alpha \sin \alpha L + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1 - \alpha L \sin \alpha L - \cos \alpha L}{\alpha(2 - 2\cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)}$$

$$B = \frac{\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L}{\alpha(2 - 2\cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)}$$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – bez poprečnog pomaka

- *Momenti na krajevima štapa*

$$M_A = -EIy''(0) = EI(\alpha^2 B) = \left(\frac{EI}{L}\right)\left[\frac{\alpha L(\sin\alpha L - \alpha L\cos\alpha L)}{2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L}\right]$$
$$= r(\psi)\left(\frac{EI}{L}\right)$$
$$M_B = -EIy''(L) = EI\alpha^2(A\sin\alpha L + B\cos\alpha L)$$
$$= \left(\frac{EI}{L}\right)\left[\frac{\alpha L(\alpha L - \sin\alpha L)}{2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L}\right]$$
$$= rc(\psi)\left(\frac{EI}{L}\right)$$

- *Momenti predstavljaju koeficijente krutosti (uslijed jediničnih kutova zaokreta)*

$$\bar{k}_{11} = r\left(\frac{EI}{L}\right), \quad \bar{k}_{21} = rc\left(\frac{EI}{L}\right)$$

gdje su

$$r = \left[\frac{\psi(S - \psi C)}{(2 - 2C - \psi S)}\right], \quad rc = \left[\frac{\psi(\psi - S)}{(2 - 2C - \psi S)}\right]$$

$$S = \sin\psi, \quad C = \cos\psi, \quad \psi = \alpha L = \pi\sqrt{\frac{P}{P_e}} = \pi\sqrt{\rho}$$

Stoga su momenti na krajevima štap A i B uslijed rotacije Θ_A

$$M_A = r\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A \qquad M_B = rc\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A$$

s prijenosnim koeficijentom

$$c = \frac{M_B}{M_A} = \frac{(\psi - S)}{(S - \psi C)}$$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – bez poprečnog pomaka

- *Koeficijenti krutosti štapa AB sa zglobom na udaljenom kraju B mogu se odrediti djelovanjem momenta –rc(EI/L)θ_A u čvoru B.*
- *Rezultat toga je prijenosni koeficijent c[-rc(EI/L)θ_{A}.*
- *Ukupni moment u čvoru A*

$$M_A = r\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A - rc^2\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A$$

$$= r(1-c^2)\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A = r'\left(\frac{EI}{L}\right)\theta_A$$

gdje je r'=r(1-c^2)

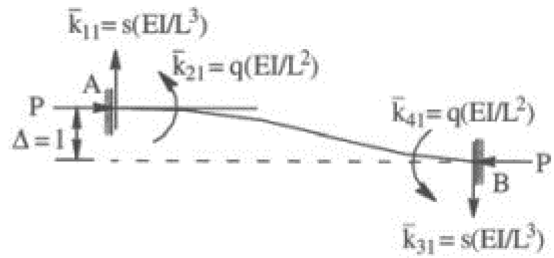
- *r' je koef. rotacijske krutosti kada je udaljeni čvor zglobni.*

- *Koeficijenti krutosti r, r' i rc postaju 4, 3 i 2 ako je P = 0.*

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – s poprečnim pomakom

- *Pretpostavimo slučaj kada je štap AB izložen djelovanju relativnog (poprečnog) pomaka Δ na svojim krajevima uz spriječene rotacije.*



- *Opće rješenje dif. jednadžbe ravnoteže*

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + C\left(\frac{x}{L}\right) + D$$

uz rubne uvjete $\quad x = 0:\quad y(0) = 1 \; i \; y'(0) = 0,$

$\qquad x = L:\quad y(L) = 0 \; i \; y'(L) = 0.$

$$A = -\frac{\sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)}, \quad B = -\frac{\cos\alpha L - 1}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)},$$

$$C = -\frac{\alpha L\sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)} \quad \text{and}$$

$$D = \frac{1 - \cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)}$$

- *Momenti na krajevima štapa postaju*

$$M_A = -EIy''(0) = \alpha^2 B(EI)$$

$$= -\left[\frac{(\alpha L)^2(\cos\alpha L - 1)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)}\right]\left(\frac{EI}{L^2}\right) = q\left(\frac{EI}{L^2}\right)$$

$$M_B = -EIy''(L) = \alpha^2(A\sin\alpha L + B\cos\alpha L)(EI)$$

$$-\left[\frac{(\alpha L)^2(1 - \cos\alpha L)}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L)}\right]\left(\frac{EI}{L^2}\right) = -q\left(\frac{EI}{L^2}\right)$$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – s poprečnim pomakom

- *Poprečne sile na krajevima štapa*

$$Q_A = EIy'''(0) = -EI\alpha^3 A$$
$$= \left[\frac{(\alpha L)^3 \sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L \sin\alpha L)}\right]\left(\frac{EI}{L^3}\right) = s\left(\frac{EI}{L^3}\right)$$
$$Q_B = EIy'''(L) = -EI\alpha^3(A\cos\alpha L - B\sin\alpha L)$$
$$= -\left[\frac{(\alpha L)^3 \sin\alpha L}{(2 - 2\cos\alpha L - \alpha L \sin\alpha L)}\right]\left(\frac{EI}{L^3}\right) = -s\left(\frac{EI}{L^3}\right)$$

- *S obzirom da su momenti i poprečne sile nastale od jediničnog pomaka, oni ujedno predstavljaju koeficijente krutosti*

$$\bar{k}_{13} = q\left(\frac{EI}{L^2}\right), \quad \bar{k}_{23} = q\left(\frac{EI}{L^2}\right), \quad \bar{k}_{33} = s\left(\frac{EI}{L^3}\right) \quad \text{i} \quad \bar{k}_{43} = -s\left(\frac{EI}{L^3}\right)$$

gdje su

$$q = \left[\frac{\psi^2(1-C)}{(2-2C-\psi S)}\right] \quad \text{i} \quad s = \left[\frac{\psi^3 S}{(2-2C-\psi S)}\right]$$

$$S = \sin\psi, \quad C = \cos\psi, \quad \psi = \alpha L = \pi\sqrt{\rho}.$$

Parametri r, rc, r', q i s funkcije su omjera $\rho = P/Pe$ i zovemo ih funkcijama stabilnosti.

Funkcije stabilnosti najčešće su dane tablično za određene vrijednosti ρ. Međuvrijednosti mogu se odrediti interpolacijom.

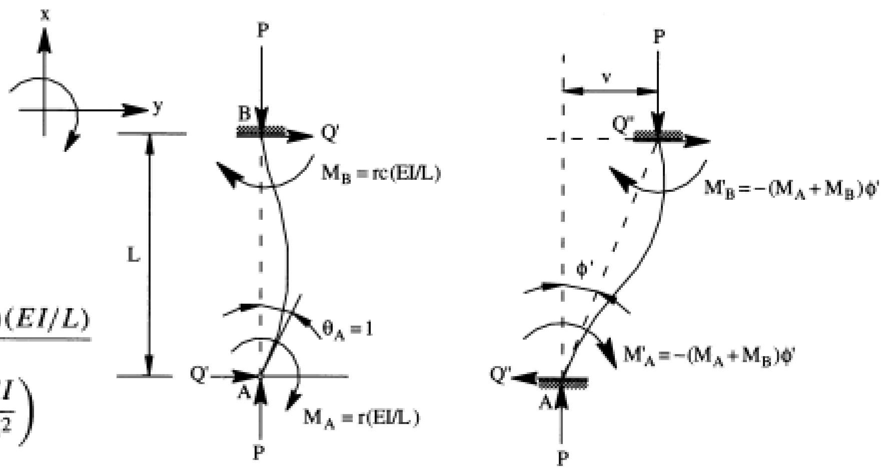
Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – horizontalno pomični okviri

- *Ako u čvoru A djeluje jedinični kut zaokreta $\theta_A=1$, tada je*

$$M_A + M_B + Q'L = 0$$

$$Q' = -\frac{(M_A + M_B)}{L} = \frac{-r(1+c)(EI/L)}{L}$$
$$= -r(1+c)\left(\frac{EI}{L^2}\right) = -q\left(\frac{EI}{L^2}\right)$$



- *Ako je pri tome omogućen poprečni pomak v čvora B s kutom zaokreta $\phi' = v/L$,* tada je

$$M'_A + M'_B + Q''L + Pv = 0$$
$$-2(M_A + M_B)\phi' + Q''L + Pv = 0$$

- Definiranje kuta zaokreta izostavljanjem sile P (ali ne i njenog utjecaja na krajnje momente): $-2(M_A + M_B)\phi + Q''L = 0$
- Oduzimanjem prethodnih jednadžbi dobije se

$$-2(M_A + M_B)(\phi' - \phi) + PL\phi' = 0$$

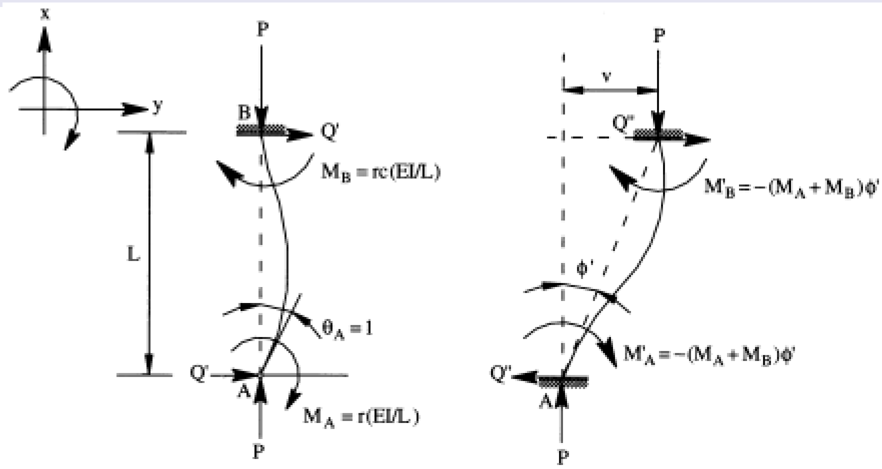
- Ako izrazimo tlačnu silu pomoću Eulerovog izraza $P = \rho P_e = \frac{\rho\pi^2 EI}{L^2}$ dobijemo

$$-2r(1+c)\left(\frac{EI}{L}\right)(\phi' - \phi) + \rho\left[\frac{\pi^2 EI}{L^2}\right]\phi' L = 0$$

pri čemu su $\phi' - \phi = \frac{\rho\pi^2\phi'}{2r(1+c)}$ *tj.* $\frac{\phi'}{\phi} = m = \frac{1}{\left[1 - \frac{\rho\pi^2}{2r(1+c)}\right]}$

Metoda krutosti (ili pomaka)

Funkcije stabilnosti – horizontalno pomični okviri



- *Ako ukupni posmak iščezava, tj. Q' + Q" = 0*

$$2(M_A + M_B)\phi' - PL\phi' = M_A + M_B$$

pri čemu su $M_A = r\left(\frac{EI}{L}\right) \quad M_B = rc\left(\frac{EI}{L}\right) \quad P = \frac{\rho\pi^2 EI}{L}$

- Stoga je

$$\phi' = \frac{1}{2\left[1 - \frac{\rho\pi^2}{2r(1+c)}\right]} = \frac{m}{2}$$

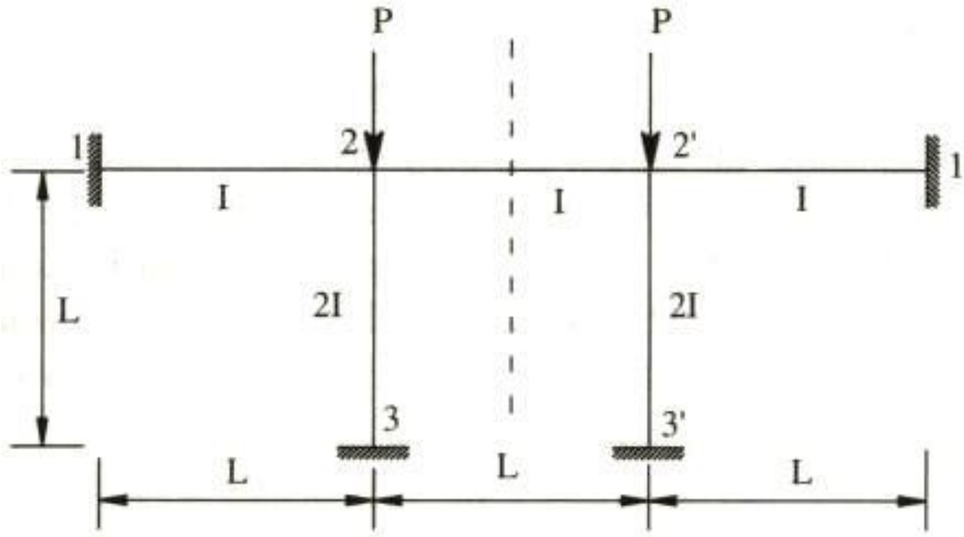
- Konačno, momenti na krajevima štapa poprimaju oblik

$$\begin{aligned} M'_A &= r\left(\frac{EI}{L}\right) - r(1+c)\left(\frac{EI}{L}\right)\left(\frac{m}{2}\right) \\ &= r\left[1 - (1+c)\frac{m}{2}\right]\left(\frac{EI}{L}\right) = t\left(\frac{EI}{L}\right) \\ M'_B &= rc\left(\frac{EI}{L}\right) - r(1+c)\left(\frac{EI}{L}\right)\left(\frac{m}{2}\right) \\ &= r\left[c - (1+c)\frac{m}{2}\right]\left(\frac{EI}{L}\right) = t'\left(\frac{EI}{L}\right) \end{aligned}$$

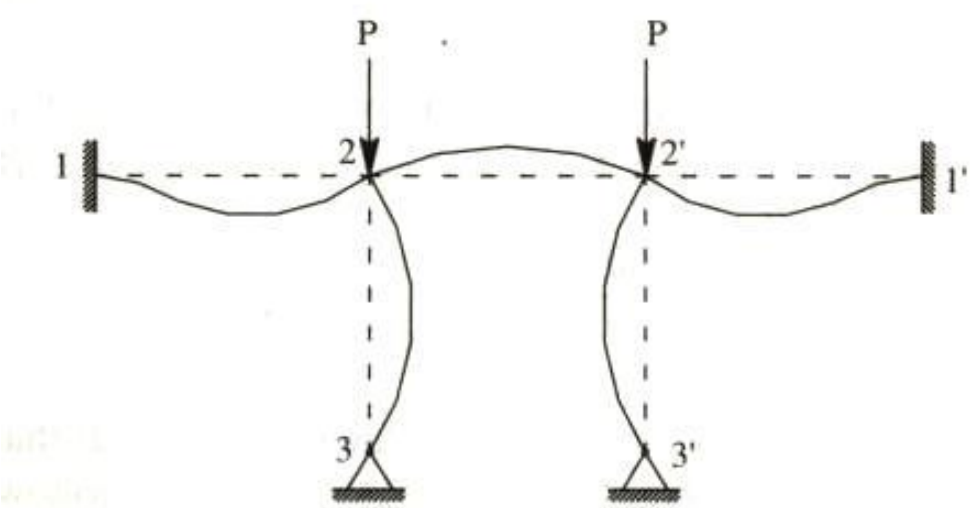
Funkcije stabilnosti

Štapovi bez poprečnih pomaka

- *Primjer*



(a)



(b)