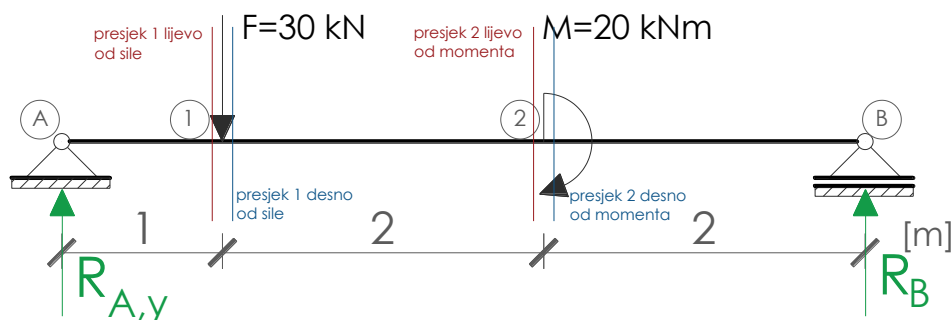


OSNOVNI STATIČKI SUSTAVI – PROSTA GREDA

ZADATAK 1. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadanu prostu gredu.



RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{A,x} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_1 \cdot d_{1,A} - M + R_B \cdot d_{B/A} = 0$$

$$-30 \cdot 1 - 20 + R_B \cdot 5 = 0$$

$$5R_B = 50 \quad / : 5$$

$$R_B = 10 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_1 \cdot d_{1,B} - M - R_A \cdot d_{A/B} = 0$$

$$30 \cdot 4 - 20 - R_A \cdot 5 = 0$$

$$5R_A = 100 \quad / : 5$$

$$R_A = 20 \text{ kN} \quad \uparrow$$

KONTROLA

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A - F + R_B = 0$$

$$20 - 30 + 10 = 0$$

• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A i B (zglobni oslonci):

$$M_A = M_B = 0 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$-R_A \cdot 1 + M_1 = 0$$

$$M_1 = R_A \cdot 1 = 20 \text{ kNm}$$

Točka 2 lijevo od konc. momenta:

$$-R_A \cdot 3 + F \cdot 2 + M_2^L = 0$$

$$M_2^L = R_A \cdot 3 - F \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

Točka 2 desno od konc. momenta:
(slijeva na desno)

$$-R_A \cdot 3 + F \cdot 2 - M + M_2^D = 0$$

$$M_2^D = R_A \cdot 3 - F \cdot 2 + M = 20 \text{ kNm}$$

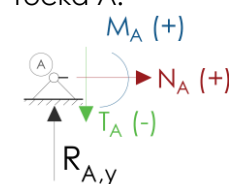
Točka 2 desno od konc. momenta:
(zdesna na lijevo)

$$R_B \cdot 2 - M_2^D = 0$$

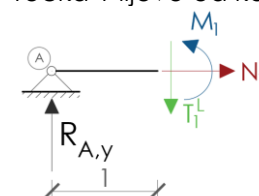
$$M_2^D = R_B \cdot 2 = 20 \text{ kNm}$$

• PRESJECI

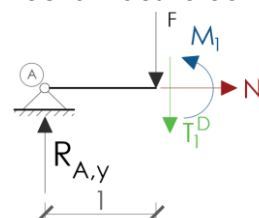
Točka A:



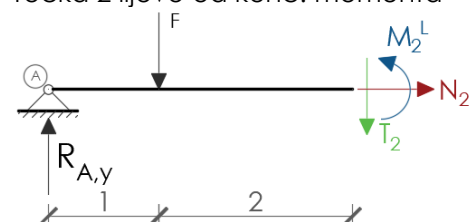
Točka 1 lijevo od konc. sile:



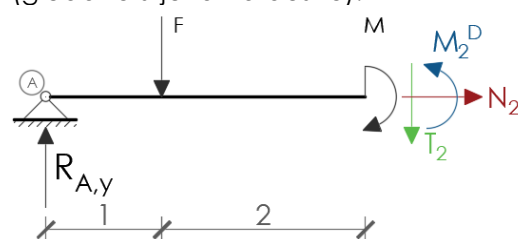
Točka 1 desno od konc. sile:



Točka 2 lijevo od konc. momenta



Točka 2 desno od konc. momenta
(gledano slijeva na desno):



Točka 2:

$$T_2 = T_1^D = -10 \text{ kN}$$

Točka B:

$$T_B = T_2 = T_1^D = -10 \text{ kN}$$

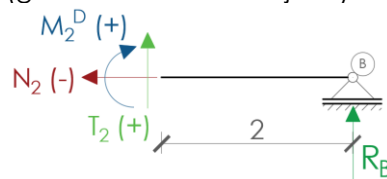
- Uzdužne sile
 $N_A = N_1 = N_2 = N_B = 0 \text{ kN}$
Nema vanjskih uzdužnih sila na gredi pa tako nema ni unutarnje uzdužne sile.

NAPOMENA!

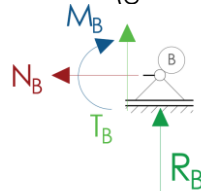
Pri određivanju dijagrama momenata savijanja, na mjestu koncentriranog momenta potrebno je odrediti vrijednosti momenta savijanja prije i poslije (lijevo i desno) od konc. momenta. Na taj način definira se skok u dijagramu za vrijednost zadanog momenta.

Isto vrijedi i za proračun poprečnih sila. Na mjestu koncentrirane sile potrebno je računati vrijednost poprečne sile prije i poslije konc. Sile kako bi se definirao skok za vrijednost konc. Sile u dijagramu pop. Sile.

Točka 2 desno od konc. momenta (gledano zdesna na lijevo):



Točka B (gledano zdesna na lijevo):

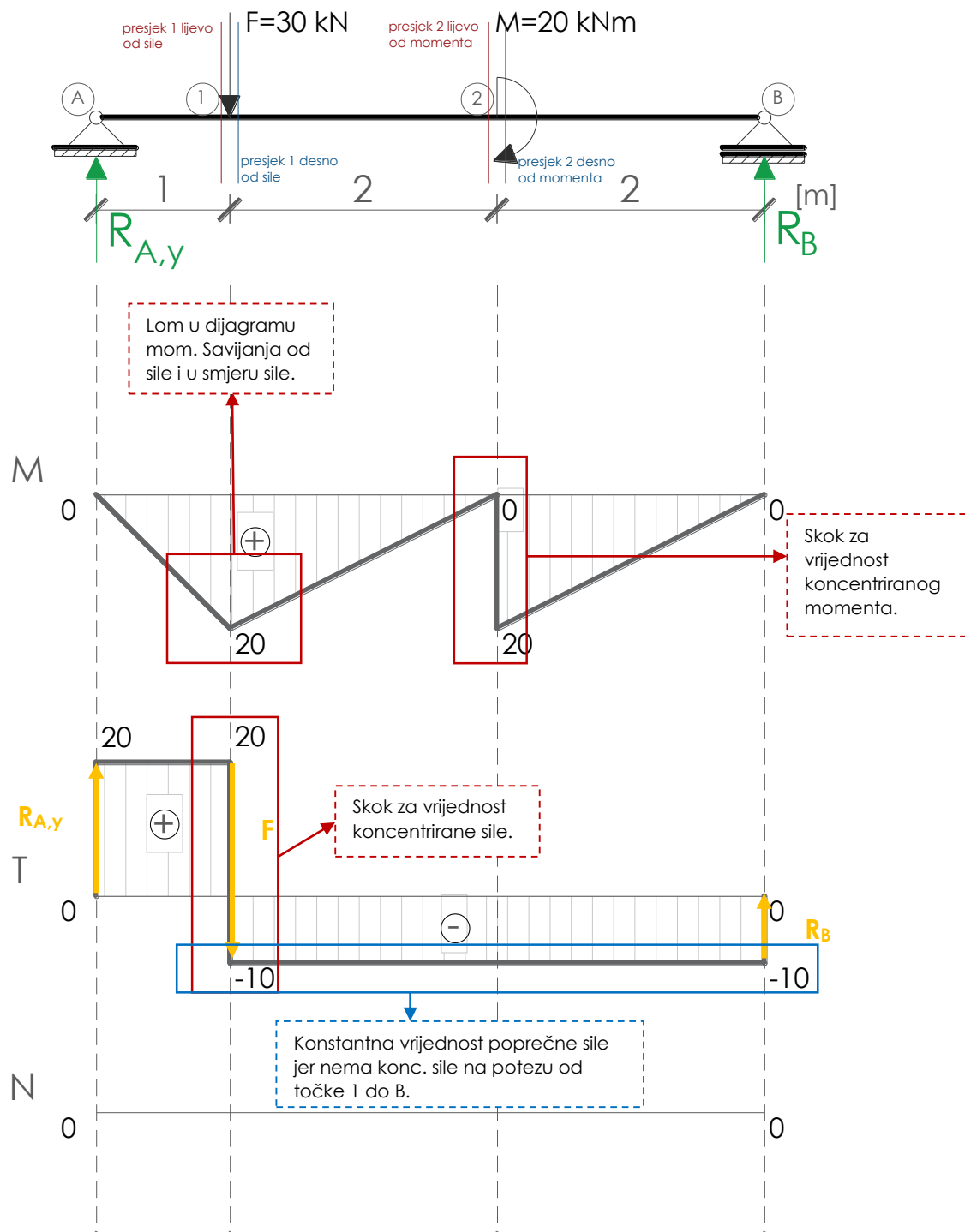


NAPOMENA!

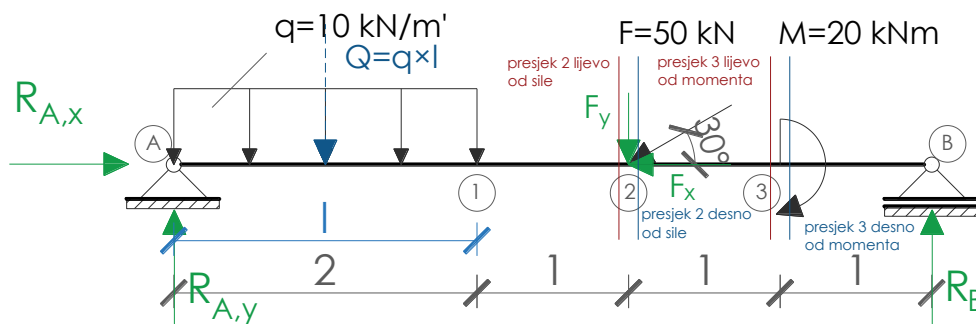
Pri određivanju unutarnjih sila, presek u nekoj točki može se gledati slijeva na desno od lijevog kraja grede ili zdesna na lijevo od desnog kraja grede. Pri tome je potrebno paziti na smjerove unutarnjih sila u presjecima.

U zgradama su naznačeni smjerovi unutarnjih sila s obzirom na presjek slijeva ili zdesna.

DIJAGRAMI UNUTARNJIH SILA:



ZADATAK 2. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarjih sila** za zadanu prostu gredu.



RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\rightarrow -q \cdot 2 \cdot 1 - F_y \cdot 3 - M + R_B \cdot 5 = 0 \\ -10 \cdot 2 \cdot 1 - 50 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 - 20 + R_B \cdot 5 &= 0 \\ 5R_B &= 20 + 75 + 20 \\ 5R_B &= 115 / : 5 \\ R_B &= 23 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow q \cdot 2 \cdot 4 + F_y \cdot 2 - M - R_{A,y} \cdot 5 = 0 \\ 10 \cdot 2 \cdot 4 + 50 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 - 20 - R_{A,y} \cdot 5 &= 0 \\ 5R_{A,y} &= 80 + 50 - 20 \\ 5R_{A,y} &= 135 / : 5 \\ R_{A,y} &= 27 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{A,x} - F_x = 0 \\ R_{A,x} &= F \cdot \cos 30^\circ = 43,30 \text{ kN} \rightarrow \end{aligned}$$

KONTROLA

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{A,y} - q \cdot 2 - F_y + R_B = 0 \\ 27 - 10 \cdot 2 - 50 \cdot \sin 30^\circ + 23 &= 0 \end{aligned}$$

• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A i B (zglobni oslonci):

$$M_A = M_B = 0 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$\begin{aligned} -R_{A,y} \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + M_1 &= 0 \\ M_1 &= R_{A,y} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Točka 2:

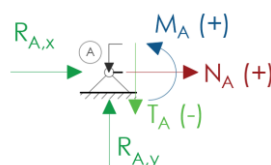
$$\begin{aligned} -R_{A,y} \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 + M_2 &= 0 \\ M_2 &= R_{A,y} \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 26 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Točka 3 lijevo od konc. momenta:

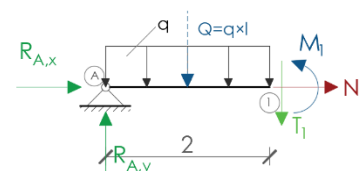
$$\begin{aligned} R_B \cdot 1 - M - M_3^L &= 0 \\ M_3^L &= R_B \cdot 1 - M = 3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

• PRESJECI

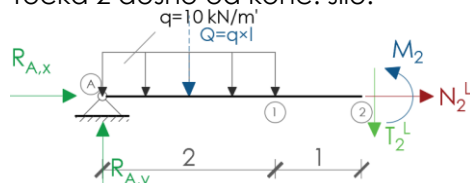
Točka A:



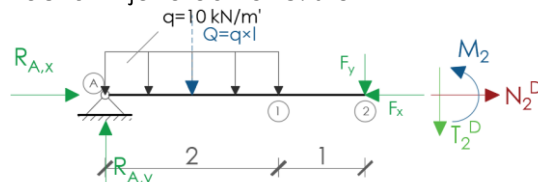
Točka 1:



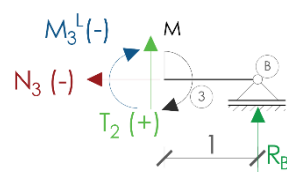
Točka 2 desno od konc. sile:



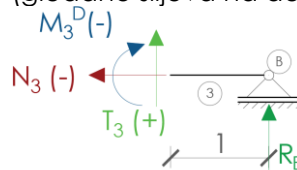
Točka 2 lijevo od konc. sile



Točka 3 lijevo od konc. momenta (gledano slijeva na desno):



Točka 3 desno od konc. momenta (gledano slijeva na desno):



Točka 3 desno od konc. momenta:

$$R_B \cdot 1 - M_3^L = 0 \rightarrow M_3^L = 23 \text{ kNm}$$

- Poprečne sile

Točka A:

$$R_{A,y} - T_A = 0$$

$$T_A = R_{A,y} = 20 \text{ kN}$$

Točka 1/2 lijevo od konc. sile:

$$R_{A,y} - q \cdot 2 - T_1 = 0$$

$$T_1 = R_{A,y} - q \cdot 2 = 2 \text{ kN} = T_2^L$$

Točka 2 desno od konc. sile/3/B:

$$R_{A,y} - q \cdot 2 - F_y - T_2^D = 0$$

$$T_2^D = R_{A,y} - q \cdot 2 - F \cdot \sin 30^\circ = -23 \text{ kN}$$

$$= T_3 = T_B$$

- Uzdužne sile

Točka A/1/2 lijevo od hor. komp. konc. sile:

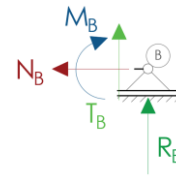
$$R_{A,x} + N_A = 0$$

$$N_A = -R_{A,x} = -43,30 \text{ kN} = N_1 = N_2^L$$

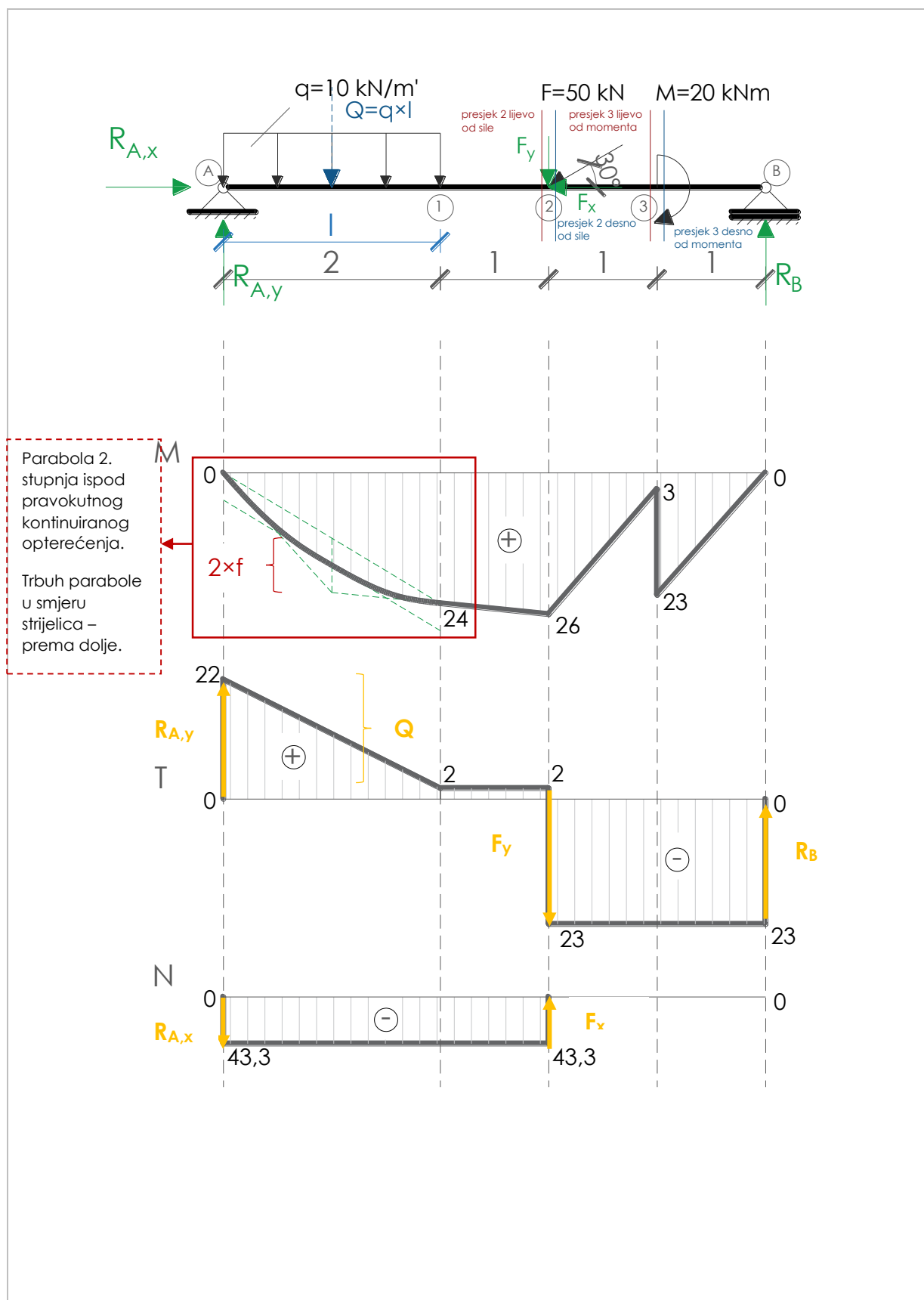
Točka 2 desno od hor. komp. konc. sile/3/B :

$$N_2^L = N_3 = N_B = 0 \text{ kN}$$

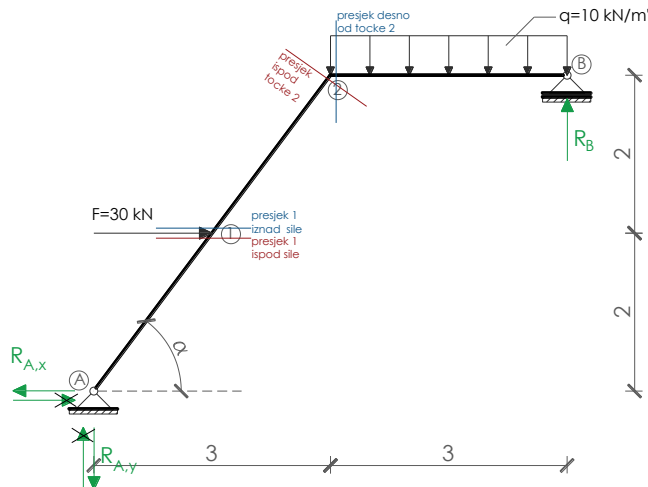
Točka B:



DIJAGRAMI UNUTARNJIH SILA



ZADATAK 3. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadanu prostu gredu.



GLOBALNI KOORD. SUSTAV

Reakcije i momente savijanja potrebno je računati u odnosu na G.K.S.

LOKALNI KOORD. SUSTAV

Poprečne i uzdužne unutarnje sile računaju se u odnosu na L.K.S. Prema tome, potrebno je kod kosih elemenata odrediti projekcije sila na os (uzdužna sila) i okomito na os (poprečna sila).

RJEŠENJE:

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = 53,13^\circ$$

• REAKCIJE:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\rightarrow -F \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 4,5 + R_B \cdot 6 = 0 \\ 6 &= 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 4,5 \\ 6R_B &= 195 : 6 \\ R_B &= 32,5 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{A,x} + F = 0 \\ R_{A,x} &= -F = -30 \text{ kN} \rightarrow R_{A,x} = 30 \text{ kN} \leftarrow \end{aligned}$$

Početna pretpostavka bila je da reakcija $R_{A,x}$ djeluje udesno. No iz sume horizontalnih sila dobijemo negativnu vrijednost. To znači da smo pretpostavili krivi smjer reakcije. Stoga je potrebno zapisati vrijednost reakcije kao pozitivnu i na skici gore označiti stvarni smjer reakcije, odnosno ulijevo.

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow q \cdot 3 \cdot 1,5 + F \cdot 2 - R_{A,x} \cdot 4 - R_{A,y} \cdot 6 = 0 \\ 6R_{A,y} &= 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30 \cdot 2 - 30 \cdot 4 \\ 6R_{A,y} &= -15 : 6 \\ R_{A,y} &= -2,5 \text{ kN} \rightarrow R_{A,y} = 2,5 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

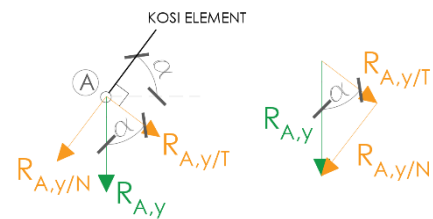
Početna pretpostavka bila je da reakcija $R_{A,y}$ djeluje prema gore. No iz sume vertikalnih sila dobijemo negativnu vrijednost. To znači da smo pretpostavili krivi smjer reakcije. Stoga je potrebno zapisati vrijednost reakcije kao pozitivnu i na skici gore označiti stvarni smjer reakcije, odnosno prema dolje.

KONTROLA

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow -R_{A,y} - q \cdot 3 + R_B = 0 \\ -2,5 - 10 \cdot 3 + 32,5 &= 0 \end{aligned}$$

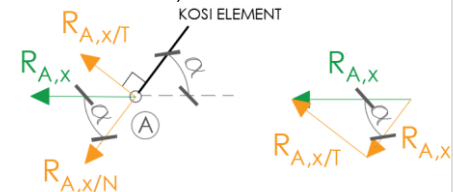
PROJEKCIJE NA KOSI ELEMENT A-2

• REAKCIJA $R_{A,y}$



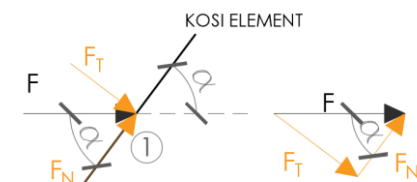
$$\begin{aligned} R_{A,y/T} &= R_{A,y} \cdot \cos \alpha = 1,50 \text{ kN} \\ R_{A,y/N} &= R_{A,y} \cdot \sin \alpha = 2 \text{ kN} \end{aligned}$$

• REAKCIJA $R_{A,x}$



$$\begin{aligned} R_{A,x/T} &= R_{A,x} \cdot \sin \alpha = 24 \text{ kN} \\ R_{A,x/N} &= R_{A,x} \cdot \cos \alpha = 18 \text{ kN} \end{aligned}$$

• SILA F



$$\begin{aligned} F_T &= F \cdot \sin \alpha = 24 \text{ kN} \\ F_N &= F \cdot \cos \alpha = 18 \text{ kN} \end{aligned}$$

• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A i B (zglobni oslonci):

$$M_A = M_B = 0 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$R_{A,y} \cdot 1,5 - R_{A,x} \cdot 2 + M_1 = 0$$

$$M_1 = -R_{A,y} \cdot 1,5 + R_{A,x} \cdot 2 = 56,25 \text{ kNm}$$

Točka 2 (kruta veza):

$$R_{A,y} \cdot 3 - R_{A,x} \cdot 4 + F \cdot 2 + M_2 = 0$$

$$M_2^{\text{dolje}} = -R_{A,y} \cdot 3 + R_{A,x} \cdot 4 - F \cdot 2 = 52,5 \text{ kNm}$$

NAPOMENA!

U slučaju kada su dva štapa spojena krutom vezom, moment u toj točki (u ovom slučaju točka 2) jednak je bez obzira gledamo li moment u presjek prije ili poslije te točke.

Prema tome: $M_2^{\text{dolje}} = M_2^D$

- Poprečne sile (okomite na os nosača)

Točka A/1 ispod konc. sile (kosi element):

$$-R_{A,y,T} + R_{A,x,T} - T_A = 0$$

$$T_A = -R_{A,y/T} + R_{A,x/T}$$

$$T_A = 22,5 \text{ kN} = T_1^D$$

Točka 1 iznad konc. sile/2 dolje (kosi element):

$$-R_{A,y/T} + R_{A,x/T} - F_T - T_1^G = 0$$

$$T_1^G = -R_{A,y/T} + R_{A,x/T} - F \cdot \sin 30^\circ$$

$$T_1^G = -1,5 \text{ kN} = T_2^{\text{dolje}}$$

Točka 2 desno (horizontalna os nosača):

$$R_B - q \cdot 3 + T_2^D = 0$$

$$T_2^D = -R_B + q \cdot 3 = -2,5 \text{ kN}$$

Točka B:

$$R_B + T_B = 0$$

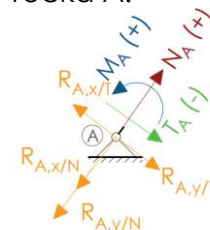
$$T_B = -R_B = -32,5 \text{ kN}$$

NAPOMENA!

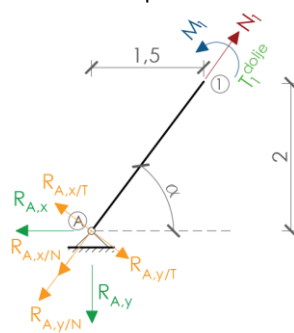
Poprečne sile okomite su na os nosača pa se od točke A to točke 2 dolje promatraju poprečne sile okomite na kosi element, a od točke 2 desno do točke B os nosača je horizontalna.

PRESJECI

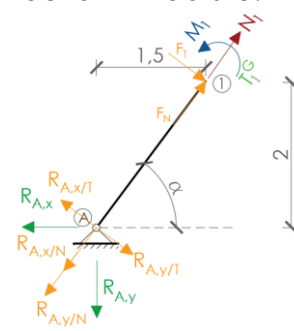
Točka A:



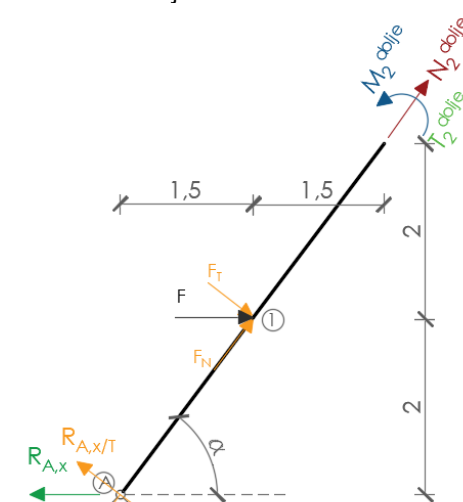
Točka 1 ispod sile:



Točka 1 iznad sile:



Točka 2 dolje:



- Uzdužne sile

Točka A/1 ispod konc. sile :

$$-R_{A,y/N} - R_{A,x/N} + N_A = 0$$

$$N_A = R_{A,y/N} + R_{A,x/N} = 20 \text{ kN} = N_1^D$$

Točka 1 gore od hor. komp. konc. sile/2 dolje :

$$-R_{A,y,N} - R_{A,x,N} + F_N + N_A = 0$$

$$N_A = R_{A,y/N} + R_{A,x/N} - F_N = 20 \text{ kN} = N_1^{\text{dolje}}$$

$$N_A = 20 \text{ kN} = N_1^{\text{dolje}}$$

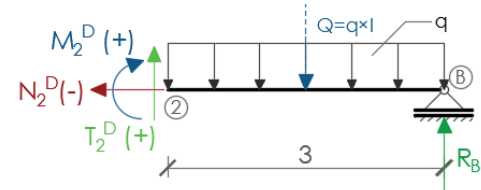
Točka 2 desno/B:

$$N_2^D = N_B = 0 \text{ kN}$$

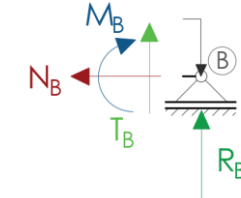
NAPOMENA!

Uzdužne sile djeluju usmjeru osi nosača pa se od točke A to točke 2 dolje promatraju uzdužne sile u smjeru kosog elementa, a od točke 2 desno do točke B os nosača je horizontalna.

Točka 2 desno:



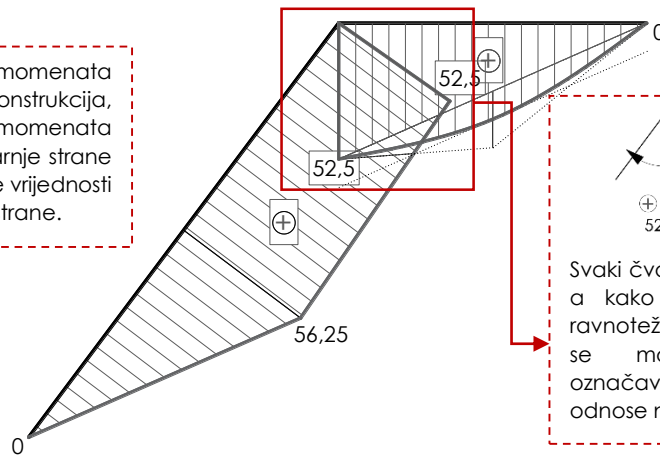
Točka B:



DIJAGRAMI UNUTARNJIH SILA

M-dijagram

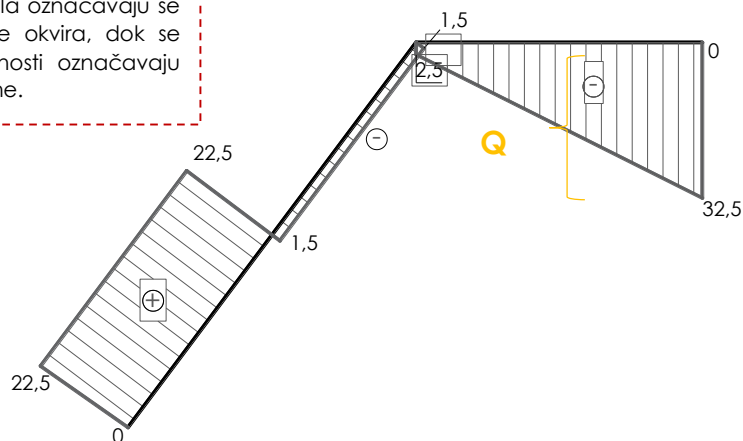
Kod dijagrama momenata savijanja kod okvirnih konstrukcija, pozitivne vrijednosti momenata označavaju se sa unutarnje strane okvira, dok se negativne vrijednosti označavaju sa vanjske strane.



Svaki čvor mora biti u ravnoteži, a kako bi čvor 2 ostao u ravnoteži ovi unutarnji momenti se moraju poništiti. To označavaju strijelice koje se odnose na njihov smjer rotacije.

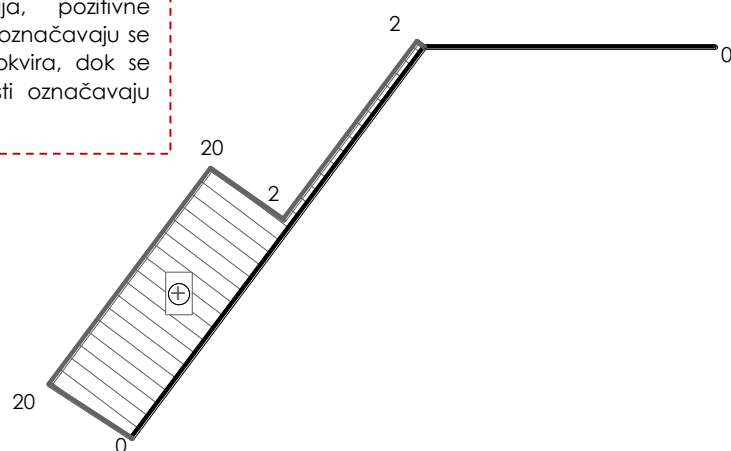
T-dijagram

Kod dijagrama poprečnih sila kod okvirnih konstrukcija, pozitivne vrijednosti pop. sila označavaju se sa vanjske strane okvira, dok se negativne vrijednosti označavaju sa unutarnje strane.

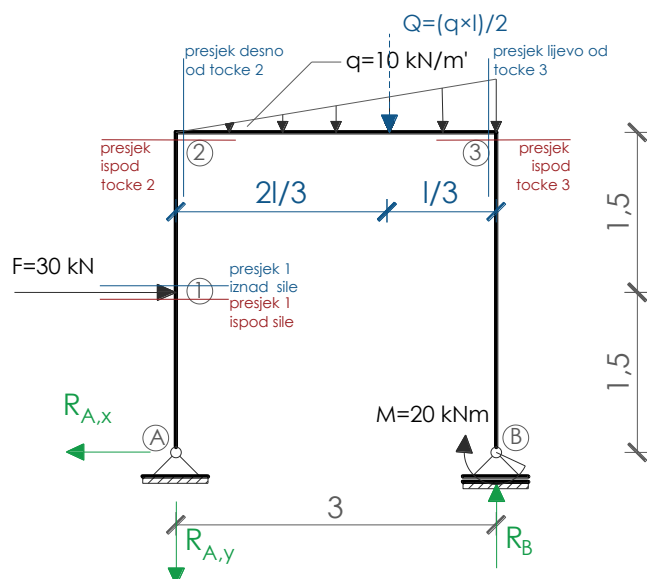


N-dijagram

Kod dijagrama uzdužnih sila kod okvirnih konstrukcija, pozitivne vrijednosti pop. sila označavaju se sa vanjske strane okvira, dok se negativne vrijednosti označavaju sa unutarnje strane.



ZADATAK 4. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadani okvir.



NAPOMENA!

U slučaju trokutastog kontinuiranog opterećenja, zamjenjujuće opterećenje Q jednako je površini trokuta, odnosno:

$$Q = \frac{q \cdot l}{2}$$

Pri čemu Q djeluje u težištu trokuta, odnosno na $\frac{1}{3} \cdot l$ od višeg ruba trokuta.

RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ -F \cdot 1,5 - \frac{q \cdot 3}{2} \cdot 2 - M + R_B \cdot 3 &= 0 \\ 3R_B &= 30 \cdot 1,5 + \frac{10 \cdot 3}{2} \cdot 2 + 20 \\ 3R_B &= 95 / : 3 \\ R_B &= 31,67 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ -R_{A,x} + F &= 0 \\ R_{A,x} &= F = 30 \text{ kN} \leftarrow \end{aligned}$$

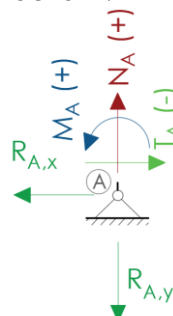
$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -F \cdot 1,5 + \frac{q \cdot 3}{2} \cdot 1 - M - R_{A,x} \cdot 0 - R_{A,y} \cdot 3 &= 0 \\ 3R_{A,y} &= -30 \cdot 1,5 + \frac{10 \cdot 3}{2} \cdot 1 - 20 - 0 \\ 3R_{A,y} &= -50 / : 3 \\ R_{A,y} &= -16,67 \text{ kN} \\ R_{A,y} &= 16,67 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

KONTROLA

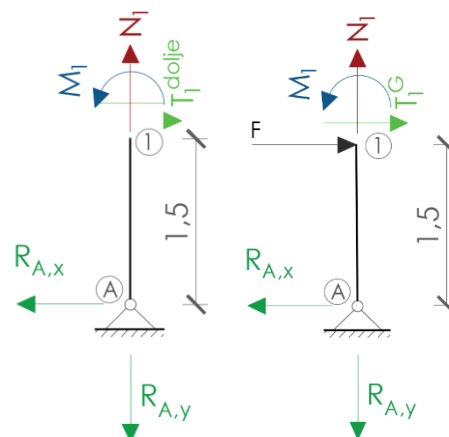
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow -R_{A,y} - \frac{q \cdot 3}{2} + R_B = 0 \\ -10 - \frac{10 \cdot 3}{2} + 25 &= 0 \end{aligned}$$

PRESJECI

Točka A:



Točka 1 ispod sile i iznadl sile:



• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A (zglobni oslonac):

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$R_{A,y} \cdot 0 - R_{A,x} \cdot 1,5 + M_1 = 0$$

$$M_1 = R_{A,x} \cdot 1,5 = 45 \text{ kNm}$$

Točka 2 (kruta veza):

$$R_{A,y} \cdot 0 - R_{A,x} \cdot 3 + F \cdot 1,5 + M_2 = 0$$

$$M_2 = 0 + R_{A,x} \cdot 3 - F \cdot 1,5 = 45 \text{ kNm}$$

Točka 3 (kruta veza):

$$-M - M_2 = 0$$

$$M_2 = -20 \text{ kNm}$$

Točka B:

$$-M - M_B = 0$$

$$M_B = -20 \text{ kNm}$$

- Poprečne sile

Točke A/1 ispod konc. sile:

$$R_{A,x} - T_A = 0$$

$$T_A = R_{A,x} = 30 \text{ kN} = T_1^{\text{dolje}}$$

Točka 1 iznad konc. sile/2 dolje:

$$R_{A,x} - F - T_1^G = 0$$

$$T_1^G = R_{A,x} - F = 0 \text{ kN} = T_2^{\text{dolje}}$$

Točka 2 desno:

$$-R_{A,y} - T_2^D = 0$$

$$T_2^D = -R_{A,y} = -16,67 \text{ kN}$$

Točka 3 lijevo:

$$R_B + T_3^L = 0$$

$$T_3^L = -R_B = -31,67 \text{ kN}$$

Točka 3 dolje/B:

$$T_3^D = T_B = 0 \text{ kN}$$

- Uzdužne sile

Točke A/1/2 dolje:

$$-R_{A,y} + N_A = 0$$

$$N_A = R_{A,y} = 16,67 \text{ kN} = N_1 = N_2^{\text{dolje}}$$

Točka 2 desno/3 lijevo:

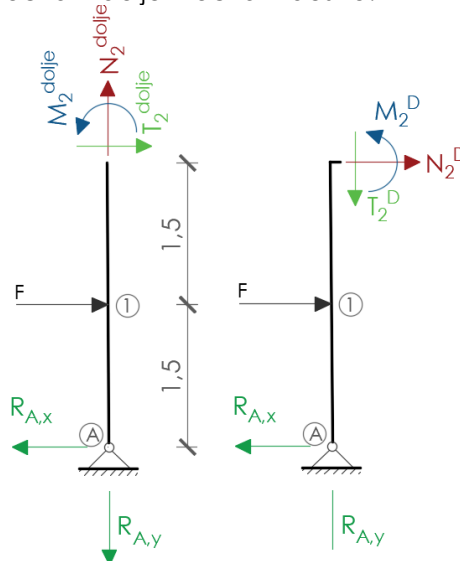
$$N_2^D = 0 = N_3^L$$

Točka 3 dolje/B:

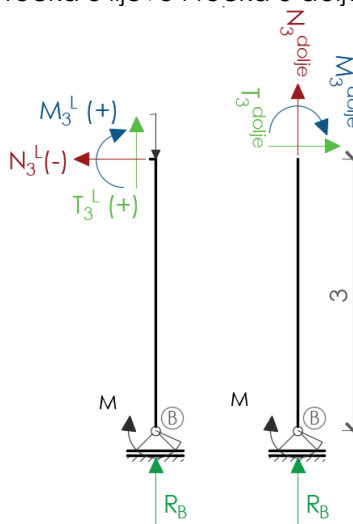
$$R_B + N_3^D = 0$$

$$N_3^D = -R_B = -31,67 \text{ kN} = N_B$$

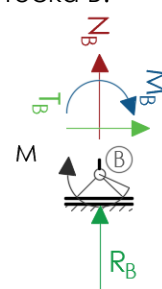
Točka 2 dolje i točka 2 desno:



Točka 3 lijevo i točka 3 dolje:

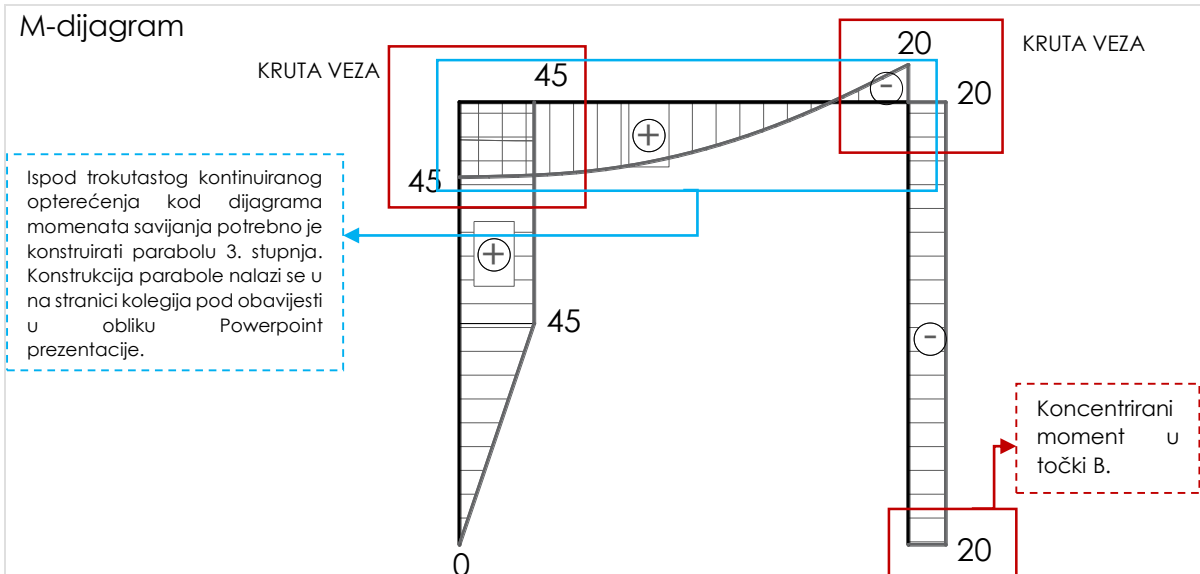


Točka B:

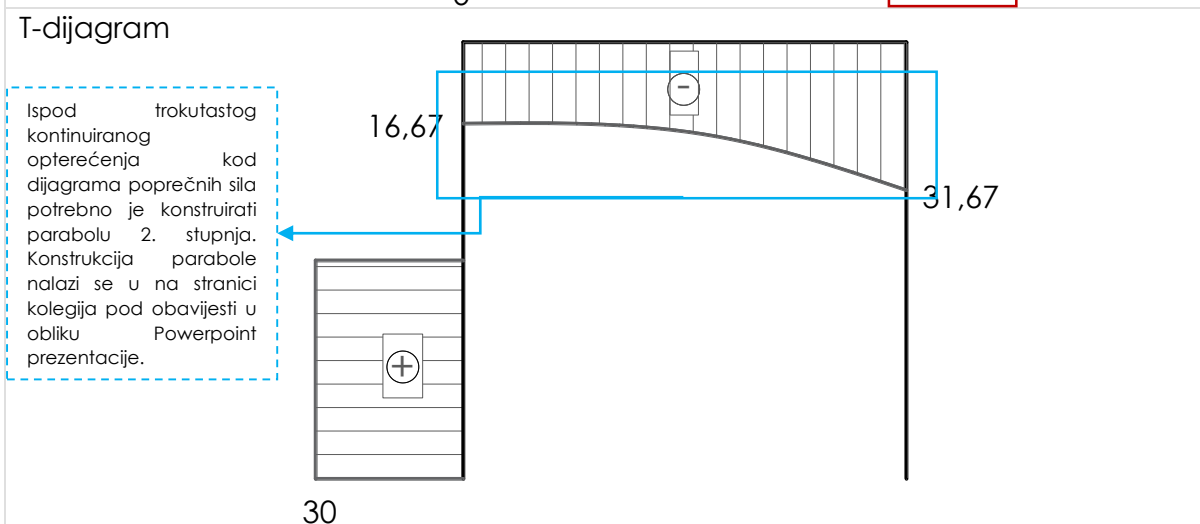


Dijagrami unutarnjih sila

M-dijagram



T-dijagram



N-dijagram

