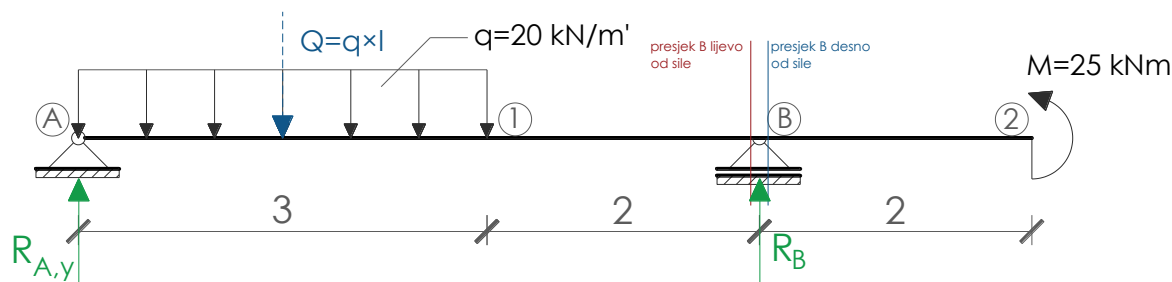


OSNOVNI STATIČKI SUSTAVI - GREDA S PRIJEPUSTOM I KONZOLA

ZADATAK 1. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadanu gredu s prepustom.



RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{A,x} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -q \cdot 3 \cdot 1,5 + M + R_B \cdot 5 = 0$$

$$5R_B = 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 25$$

$$5R_B = 65 /: 5$$

$$R_B = 13 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow q \cdot 3 \cdot 3,5 + M - R_A \cdot 5 = 0$$

$$5R_A = 20 \cdot 3 \cdot 3,5 + 25$$

$$5R_A = 235 /: 5$$

$$R_A = 47 \text{ kN } \uparrow$$

KONTROLA

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A - q \cdot 3 + R_B = 0$$

$$47 - 60 + 13 = 0$$

• UNUTARNJE SILE

• Momenti savijanja

Točke A (zglobni oslonac):

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$-R_A \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + M_1 = 0$$

$$M_1 = R_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 51 \text{ kNm}$$

Točka B (Moment nije 0 zbog krute veze iznad njega!!!):

$$M - M_B = 0$$

$$M_B = M = 25 \text{ kNm}$$

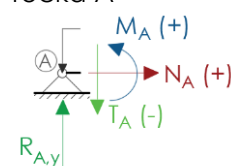
Točka 2 lijevo od momenta:

$$M - M_2^L = 0$$

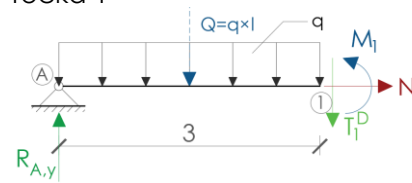
$$M_2^L = 25 \text{ kNm} \rightarrow M_2^D = 0 \text{ kNm}$$

PRESJECI

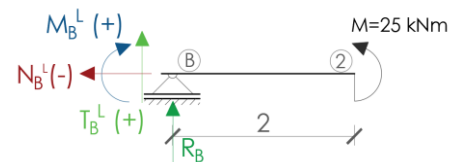
Točka A



Točka 1



Točka B lijevo od oslonca



Točka B desno od oslonca



Točka 2



- Poprečne sile

Točka A:

$$R_A - T_A = 0$$

$$T_A = R_A = 47 \text{ kN}$$

Točka 1/B lijevo od oslonca:

$$R_A - q \cdot l - T_1 = 0$$

$$T_1 = R_A - q \cdot l = -13 \text{ kN} = T_B^L$$

Točka B desno od oslonca/2:

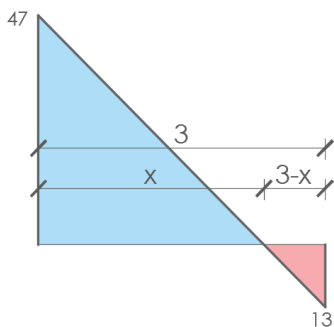
$$T_B^D = T_2 = 0 \text{ kN}$$

- Uzdužne sile

$$N_A = N_1 = N_B = N_2 = 0 \text{ kN} \rightarrow \text{nema sile u smjeru osi nosača (smjeru osi x)}$$

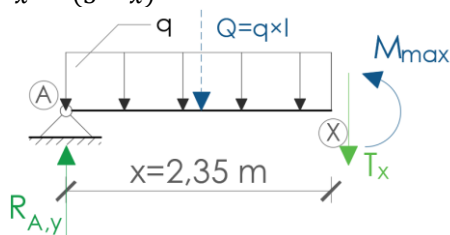
MAKSIMALNI MOMENT NA MJESTU GDJE JE POPREČNA SILA JEDNAKA NULI

M_{max} za $T = 0$



Mjesto na kojem je $T_x=0$ određujemo pomoću sličnosti trokuta iz T-dijagrama!

$$\frac{47}{x} = \frac{13}{(3-x)} \rightarrow 13x = 47 \cdot (3-x) \rightarrow x = 2,35 \text{ m}$$



Vrijednost momenta u presjeku gdje je $T=0$ kN, računamo kao i za sve ostale presjeke.

Potrebno je obratiti pozornost na kontinuirano opterećenje i duljinu kojom će se množiti te duljinu kraka za moment.

U ovom slučaju duljina je 2,35 m, a kako zamjenjujuće opterećenje kod pravokutnog kontinuiranog opterećenja djeluje u težištu pravokutnika, tj. $l/2$, krak je $2,35/2$ m.

PROVJERA:

$$R_A - q \cdot x - T_x = 0 \quad 47 - 20 \cdot 2,35 = 0$$

$$T_x = R_A - q \cdot x = 47 - 20 \cdot 2,35 = 0 \text{ kN}$$

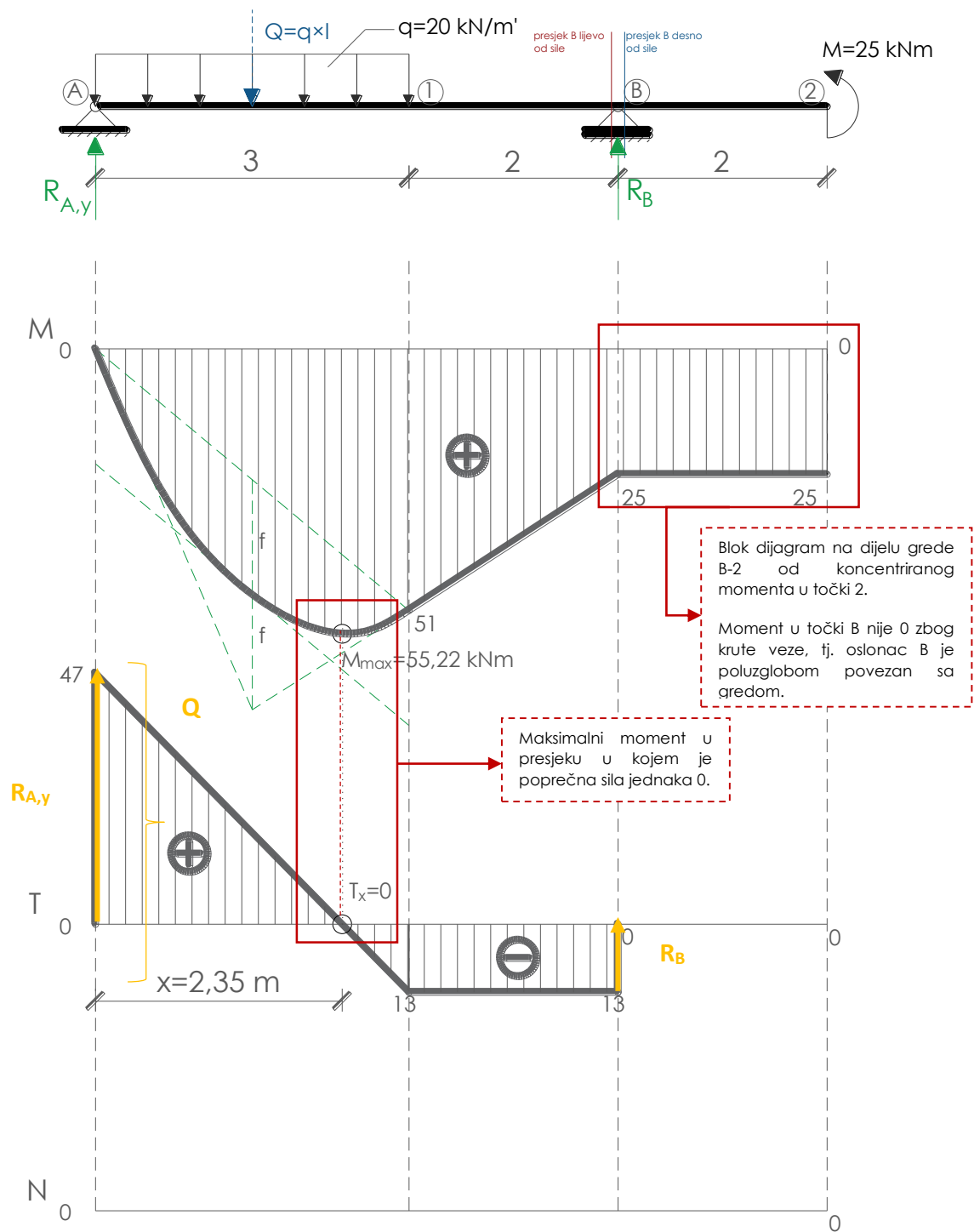
VRIJEDNOST MAKSIMALNOG

MOMENTA:

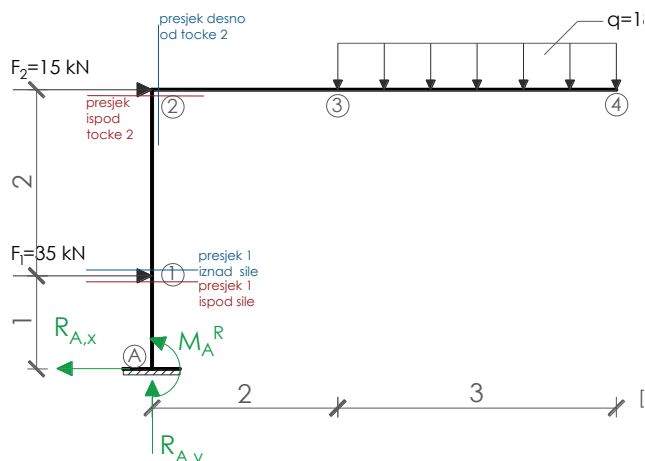
$$-R_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_{max} = 0$$

$$M_{max} = 47 \cdot 2,35 - 20 \cdot 2,35 \cdot \frac{2,35}{2} = 55,22 \text{ kNm}$$

DIJAGRAMI UNUTARNJIH SILA:



ZADATAK 2. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadanu konzolu.



Konzole imaju samo jedan oslonac koji nazivamo upetim osloncem.

Upeti oslonac preuzima dvije reaktivne sile i reaktivni moment kako bi zadržao sustav u ravnoteži.

Kod upetog oslonca moment je uvijek različit od nule ($M_A^R \neq 0$). Vrijednost reaktivnog momenta određujemo pomoću uvjeta ravnoteže da je suma momenata na točku upetog oslonca jednaka 0 ($\sum M_A = 0$) i pri tome ne smijemo uvrstiti reaktivni moment M_A^R u jednadžbu ravnoteže.

RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -R_{A,x} + F_1 + F_2 = 0$$

$$R_{A,x} = F_1 + F_2 = 50 \text{ kN} \leftarrow$$

Reaktivni moment u jednadžbi ravnoteže! Pretpostavljeni smjer u smjeru obrnutom kazaljki na satu, tj. pozitivan smjer.

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A^R - F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 3,5 = 0$$

$$M_A^R = 35 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 18 \cdot 3 \cdot 3,5$$

$$M_A^R = 269 \text{ kNm}$$

Vrijednost reaktivnog momenta.

$$\sum M_4 = 0$$

$$-R_{A,y} \cdot 5 - R_{A,x} \cdot 3 + M_A^R + F_1 \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$5R_{A,y} = -50 \cdot 3 + 269 + 35 \cdot 2 + 18 \cdot 3 \cdot 1,5$$

$$5R_{A,y} = 270 \quad /:5$$

$$R_{A,y} = 54 \text{ kN} \uparrow$$

Moment u točki 4 će biti jednak 0 jer ako promatramo presek u toj točki zdesna na lijevo vidjet ćemo da ne nikakvog konc. momenta ili sile koja bi radila moment.

Reaktivni moment ne smijemo zaboraviti u svim ostalim uvjetima ravnoteže.

KONTROLA

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{A,y} - q \cdot 3 = 0$$

$$54 - 18 \cdot 3 = 0$$

• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A (upeti):

$$M_A^R + M_A = 0$$

$$M_A = -M_A^R = -269 \text{ kNm}$$

Točka 1:

$$-R_{A,x} \cdot 1 + M_A^R + M_1 = 0$$

$$M_1 = R_{A,x} \cdot 1 - M_A^R = -219 \text{ kNm}$$

Točka 2 (kruta veza pa je moment dolje jednak momentu desno od točke 2):

$$-R_{A,x} \cdot 3 + M_A^R + F_1 \cdot 2 + M_2 = 0$$

$$M_2 = R_{A,x} \cdot 3 - M_A^R - F_1 \cdot 2 = -189 \text{ kNm}$$

Točka 3:

$$-q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_3 = 0$$

$$M_3 = -q \cdot 3 \cdot 1,5 = -81 \text{ kNm}$$

Točka 4 (točka na rubu, zdesna nema koja sila raditi moment, te nema koncentriranog momenta):

$$M_4 = 0$$

- Poprečne sile (sile okomite na os nosača)

Točka A/1 dolje:

$$R_{A,x} - T_A = 0$$

$$T_A = R_{A,x} = 50 \text{ kN} = T_1^D$$

Točka 1 gore/2 dolje:

$$R_{A,x} - F - T_1^G = 0$$

$$T_1^G = R_{A,x} - F = 50 - 35 = 15 \text{ kN} = T_2^{\text{Dolje}}$$

Točka 2 desno/3:

$$R_{A,y} - T_2^D = 0$$

$$T_2^D = R_{A,y} = 54 \text{ kN} = T_3$$

Točka 4:

$$T_4 = 0 \text{ kN}$$

- Uzdužne sile (sile koje djeluju u smjeru osi nosača)

Točka A/1/2 dolje:

$$R_{A,y} + N_A = 0$$

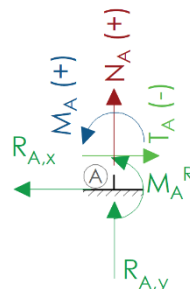
$$N_A = -R_{A,y} = -54 \text{ kN} = N_1 = N_2^D$$

Točka 2 desno/3/4:

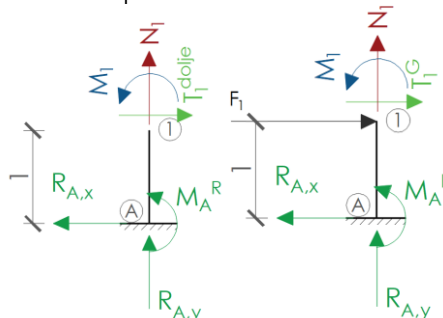
$$N_2^D = 0 \text{ kN} = N_3 = N_4$$

PRESJECI

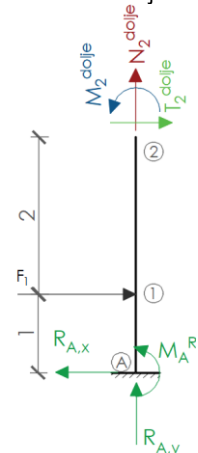
Točka A:



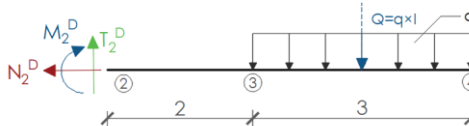
Točka 1 ispod i iznad sile:



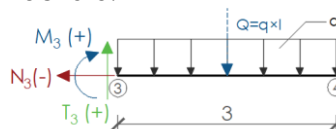
Točka 2 dolje:



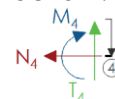
Točka 2 desno:



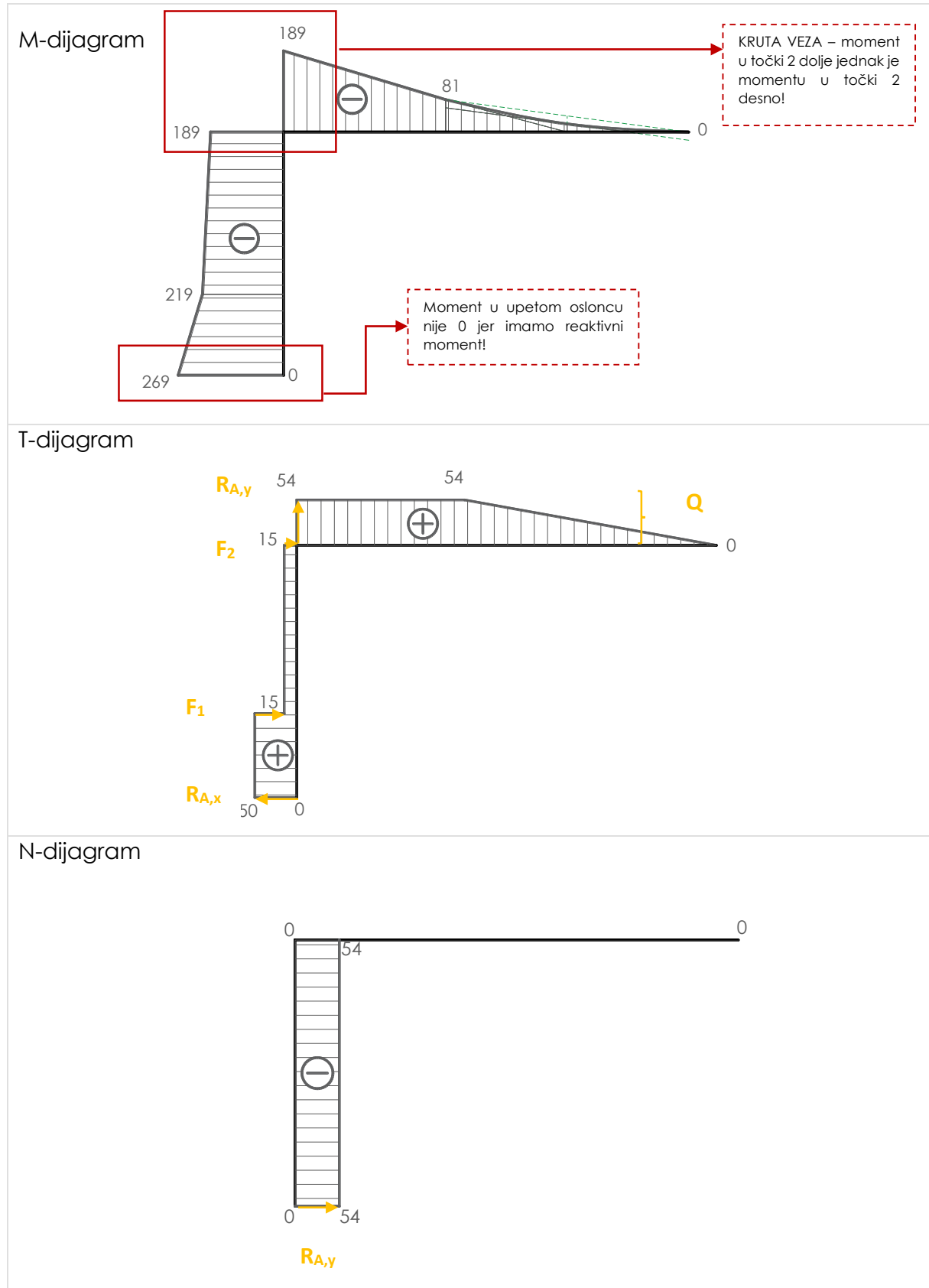
Točka 3:



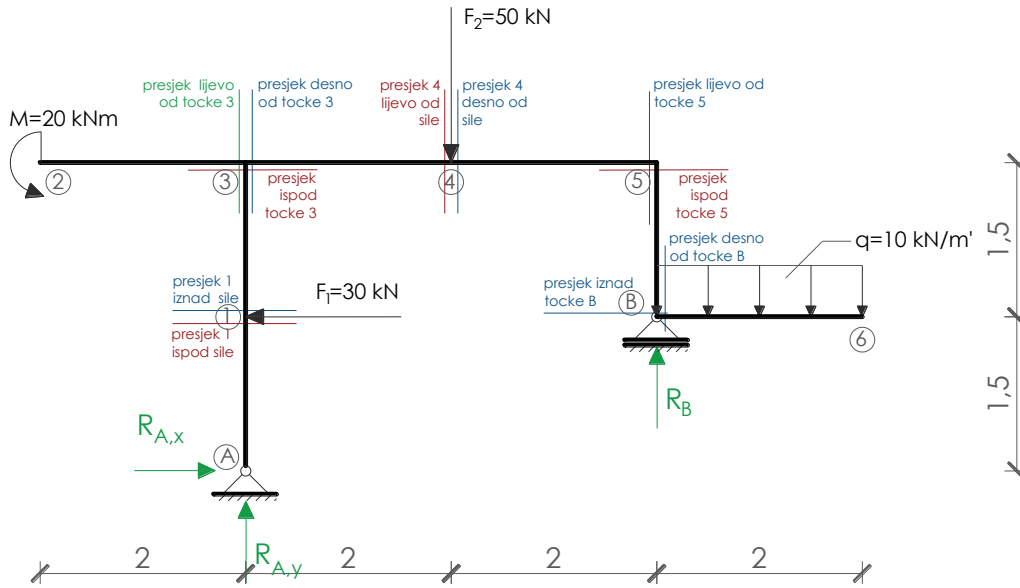
Točka 4:



Dijagrami unutarnjih sila



ZADATAK 3. Potrebno je **odrediti dijagrame unutarnjih sila** za zadani okvir.



RJEŠENJE:

• REAKCIJE:

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{A,x} - F_1 = 0$$

$$R_{A,x} = F_1 = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 2 + M - q \cdot 2 \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0$$

$$4R_B = -F_1 \cdot 1,5 + F_2 \cdot 2 - M + q \cdot 2 \cdot 5$$

$$R_B = 33,75 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{A,y} \cdot 4 + R_{A,x} \cdot 1,5 + F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 2 + M - q \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$4R_{A,y} = 30 \cdot 1,5 + 30 \cdot 0 + 50 \cdot 2 + 20 - 10 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4R_{A,y} = 145 \quad /:4$$

$$R_{A,y} = 36,25 \text{ kN} \uparrow$$

KONTROLA

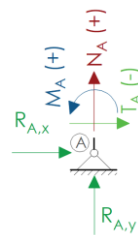
$$\sum F_y = 0$$

$$R_{A,y} - F_2 - q \cdot 2 + R_B = 0$$

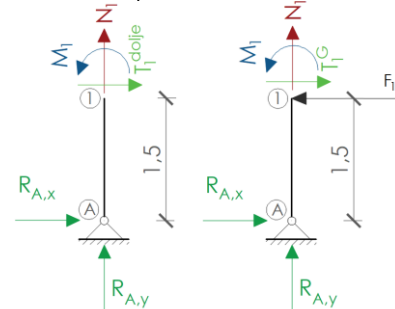
$$36,25 - 50 - 10 \cdot 2 + 33,75 = 0$$

PRESJECI:

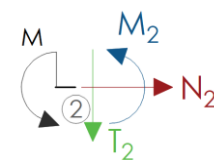
Točka A:



Točka 1 ispod i iznad sile:



Točka 2:



• UNUTARNJE SILE

- Momenti savijanja

Točke A (zglobni oslonac):

$$M_A = 0$$

Točka 1:

$$R_{A,x} \cdot 1,5 + M_1 = 0$$

$$M_1 = -R_{A,x} \cdot 1,5 = -45 \text{ kNm}$$

Točka 2 (koncentrirani moment)/3 lijevo:

$$M + M_2 = 0$$

$$M_2 = -M = -20 \text{ kNm} = M_3^L$$

Točka 3 dolje:

$$R_{A,x} \cdot 2 - F_1 \cdot 1,5 + M_3^{\text{Dolje}} = 0$$

$$M_3^{\text{Dolje}} = -R_{A,x} \cdot 3 + F_1 \cdot 1,5 = -45 \text{ kNm}$$

Točka 3 desno:

$$R_{A,x} \cdot 3 - F_1 \cdot 1,5 + M + M_3^{\text{Dolje}} = 0$$

$$M_3^D = -R_{A,x} \cdot 3 + F_1 \cdot 1,5 - M = -65 \text{ kNm}$$

Točka 4:

$$R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 3 - M_4 = 0$$

$$M_4 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 3 = 7,5 \text{ kNm}$$

Točka 5 (kruta veza):

$$-q \cdot 2 \cdot 1 - M_5 = 0$$

$$M_5 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ kNm}$$

Točka B (kruta veza):

$$-q \cdot 2 \cdot 1 - M_B = 0$$

$$M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ kNm}$$

Točka 6 (kraj nosača bez konc. Momenta):

$$M_6 = 0 \text{ kNm}$$

- Poprečne sile (sile okomite na os nosača)

Točka A/1 dolje:

$$R_{A,x} - T_A = 0$$

$$T_A = R_{A,x} = 30 \text{ kN} = T_1^D$$

Točka 1 gore/3 dolje:

$$R_{A,x} - F_1 - T_1^G = 0$$

$$T_1^G = R_{A,x} - F_1 = 0 \text{ kN} = T_3^{\text{Dolje}}$$

Točka 2 /3 lijevo:

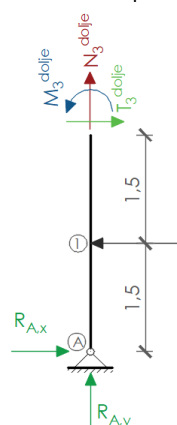
$$T_2 = T_3^L = 0 \text{ kN}$$

Točka 3 desno/4 lijevo:

$$R_{A,y} - T_3^D = 0$$

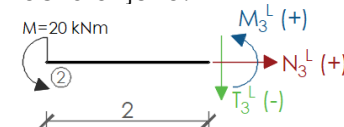
$$T_3^D = R_{A,y} = 36,25 \text{ kN} = T_4^L$$

Točka 3 ispod:

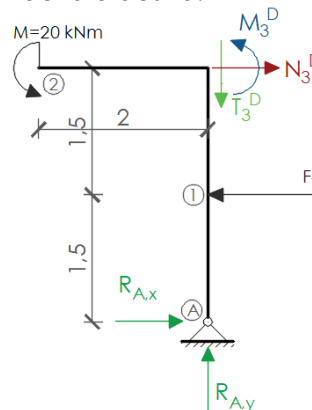


U točki 3 se spajaju tri štapa koja su povezana krutom vezom. Zbog toga je potrebno računati moment u presjeku ispod točke 3, lijevo od točke 3 i desno od točke 3.

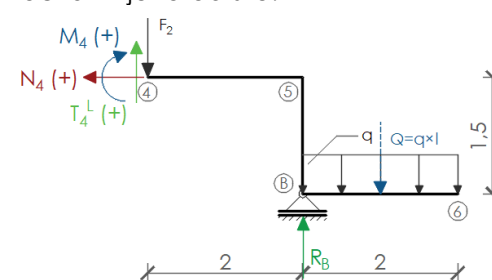
Točka 3 lijevo:



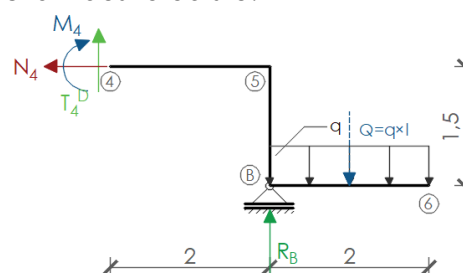
Točka 3 desno:



Točka 4 lijevo od sile:



Točka 4 desno od sile:



Točka 4 desno/5 lijevo:

$$R_{A,y} - F_2 - T_4^D = 0$$

$$T_4^D = R_{A,y} - F_2 = -13,75 \text{ kN} = T_5^L$$

Točka 5 dolje/B gore:

$$T_5^{Dolje} = T_B^G = 0 \text{ kN}$$

Točka B desno:

$$-q \cdot 2 + T_B^D = 0$$

$$T_B^D = q \cdot 2 = -13,75 \text{ kN} = T_5^L$$

Točka 6:

$$T_6 = 0 \text{ kN}$$

- Uzdužne sile (sile koje djeluju u smjeru osi nosača)

Točka A/1/3 dolje:

$$R_{A,y} + N_A = 0$$

$$N_A = -R_{A,y} = -36,25 \text{ kN} = N_1 = N_3^D$$

Točka 2 /3 lijevo:

$$N_2 = 0 \text{ kN} = N_3^L$$

Točka 3 desno/4/5 lijevo:

$$-R_{A,x} + F_1 + N_3^D = 0$$

$$N_3^D = R_{A,x} - F_1 = 0 \text{ kN} = N_4 = N_5^L$$

Točka 5 dolje/B gore:

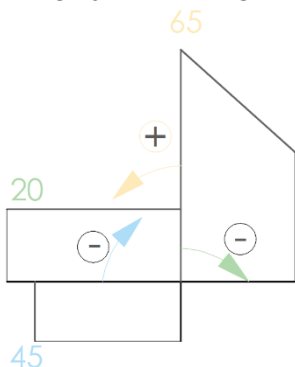
$$R_B - q \cdot 2 + N_5^{Dolje} = 0$$

$$N_5^{Dolje} = -R_B + q \cdot 2 = -13,75 \text{ kN} = N_B^{gore}$$

Točka B desno/6:

$$N_B^D = 0 \text{ kN} = N_6$$

PROVJERA RAVNOTEŽE U ČVORU 3:

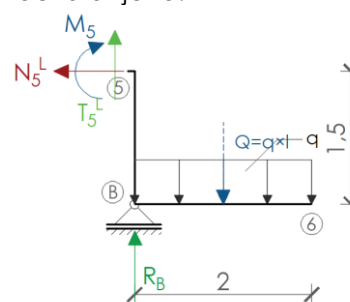


Kruta veza sa tri vrijednosti momenta kojim se nastoji ostvariti ravnoteža u čvoru 3. Suma momenata u tom čvoru mora biti jednaka 0.

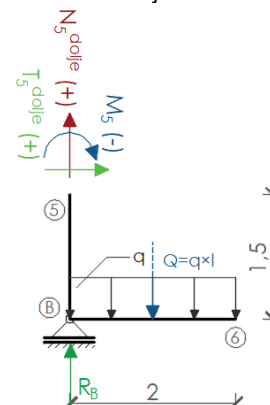
Pri tome promatramo smjer vrtnje momenta (iz punog u prazno), je li negativan smjer ili pozitivan. Smjer je u ovom slučaju označen pored pripadajuće sstrijelice.

$$-45 - 20 + 65 = 0 \rightarrow \text{Čvor je u ravnoteži!}$$

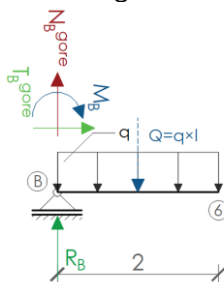
Točka 5 lijevo:



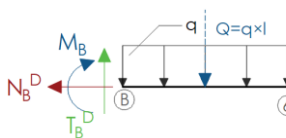
Točka 5 dolje:



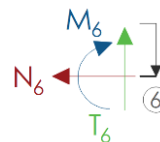
Točka B gore:



Točka B desno:

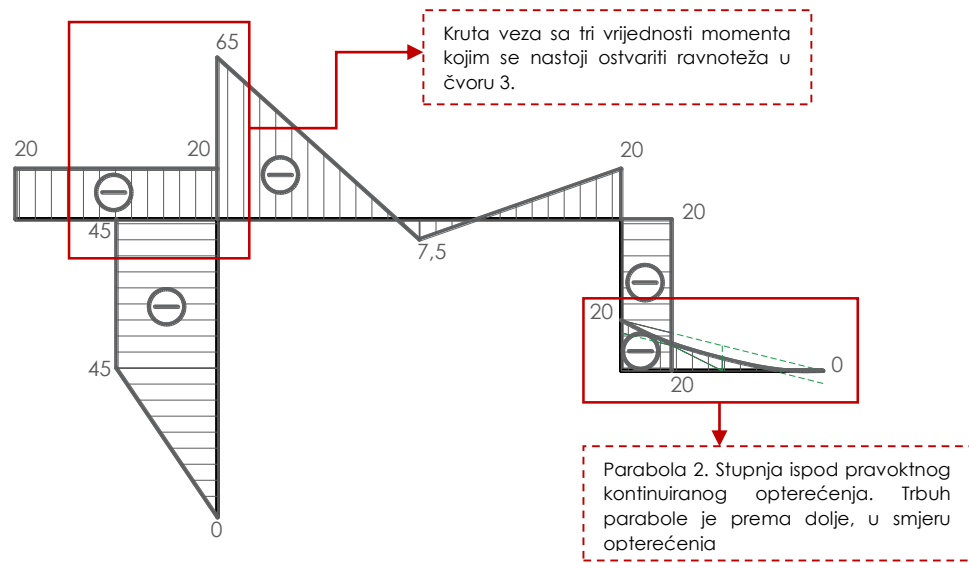


Točka 6:

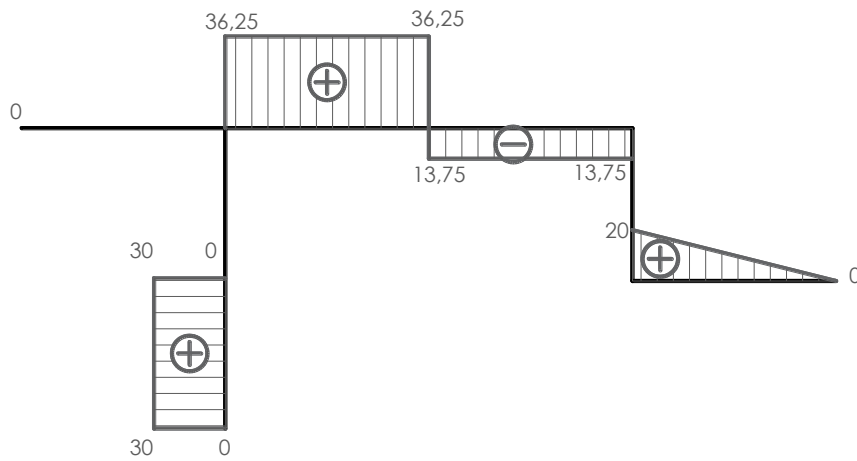


Dijagrami unutarnjih sila

M-dijagram



T-dijagram



N-dijagram

