



IZVIJANJE TLAČNIH ŠTAPOVA

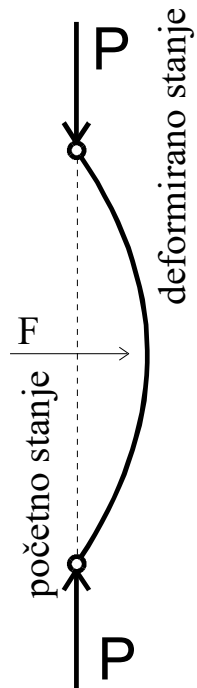
IZVIJANJE STUPOVA

Stabilnost stupova

- Pretpostavke klasične teorije kritične sile uzdužnih štapova:
 - *štap je početno ravan, vitak, punog poprečnog presjeka s konstantnom krutosti na savijanje EI duž njegove osi;*
 - *uzdužna tlačna sila djeluje duž težišne osi štapa;*
 - *materijal štapa je homogen, izotropan i idealno elastičan;*
 - *vrijedi teorija malih progiba pri savijanju.*
- **Eulerov stup**
 - *idealizirani štap, obostrano zglobno oslonjen izložen djelovanju uzdužne tlačne sile.*
- **Eulerova kritična sila P_e .**

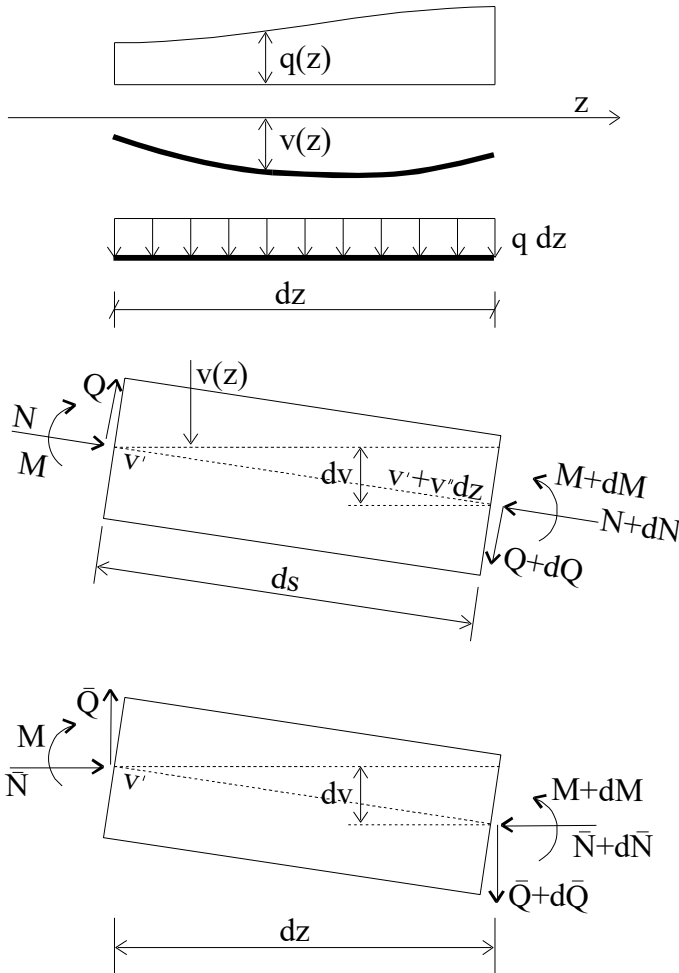
Eulerova teorija vitkih štapova

- Povećanjem uzdužne tlačne sile koja djeluje na krajevima dugog vitkog štapa, za određenu veličinu sile doći će do naglog izvijanja (izbočavanja) u nekom smjeru koji nije unaprijed određen.
- Stvarno stanje: asimetrija uslijed geometrijske ili materijalne imperfekcije štapa i pripadajućeg opterećenja.
- Pretpostavka o idealiziranom stanju: idealno pravolinijski štap s idealno centričnom tlačnom silom (ne može doći do izvijanja samo od tlačnog naprezanja → precizno definiranje izvijanja).
 - uslijed tlačne sile P , dolazi do skraćivanja štapa bez obzira na veličinu sile P ;
 - kada uslijed sile P naprezanja prekorače granicu popuštanja, dolazi do sloma materijala.
- Ako se štap deformira za neku infinitezimalnu veličinu pomaka uslijed poprečne sile F :
 - $P < P_{CR}$ (uklanjanje sile F rezultira povratkom štapa u početno stanje)
STABILNA RAVNOTEŽA
 - $P = P_{CR}$ (pomaci ne iščezavaju i štap ostaje u bilo kojem deformiranom položaju dok su pomaci dovoljno mali)
NEUTRALNA RAVNOTEŽA
 - $P > P_{CR}$ (poprečni pomaci rastu i štap postaje nestabilan).



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Diferencijalna jednačba savijanja



$$\Sigma M :$$

$$dM - \bar{Q} dz - \bar{N} dv + q dz (\chi_q dz) = 0$$

$$M' = \bar{Q} + \bar{N} \cdot v'$$

$$\Sigma V :$$

$$\bar{Q}'(z) = -q(z)$$

$$M'' = \bar{N} \cdot v'' - q$$

Bernoulli :

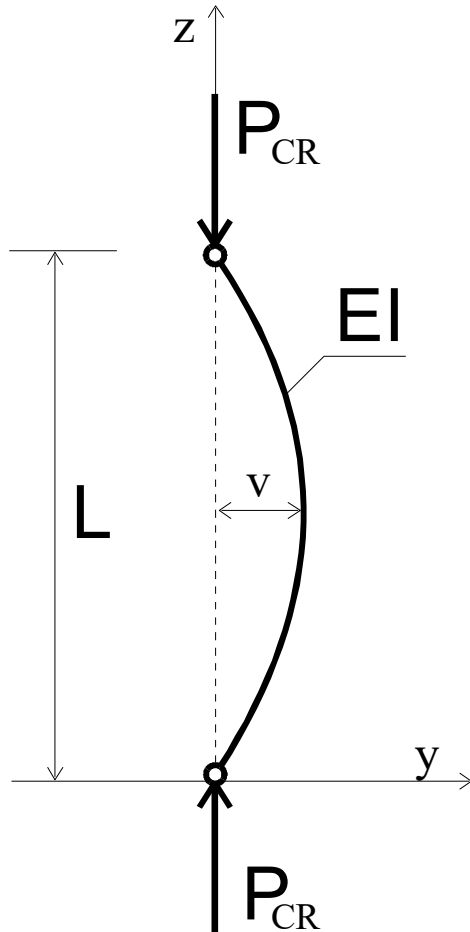
$$M = -EI / R \approx -EI / v''$$

$$(EI \cdot v'')'' + \bar{N} \cdot v'' = q$$

$$EI \cdot v'''' + P \cdot v'' = q$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE OBOSTRANO ZGLOBNO OSLONJENOG ŠTAPA



$$M = P_{CR}v$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P_{CR}}{EI}v$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI}v = 0$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

$$\text{rubni uvjeti: } v(z=0) = 0, v(z=L) = 0$$

$$\sin \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

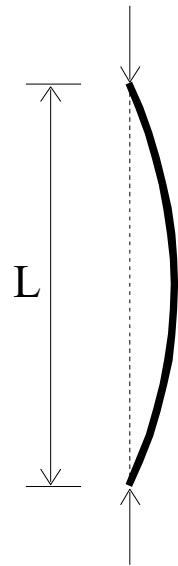
$$P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

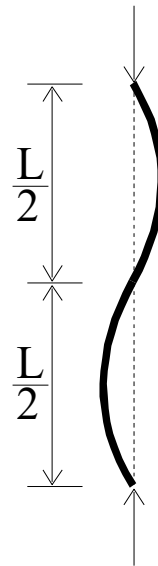
IZVIJANJE OBOSTRANO ZGLOBNO OSLONJENOG ŠTAPA

Minimalna kritična sila : za $n=1$.

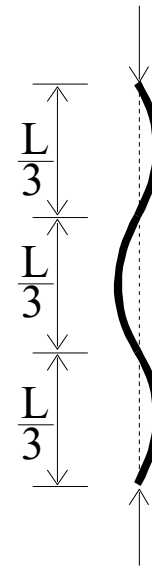
Viši oblici izvijanja mogu nastati uz poprečno pridržanje u točkama infleksije.



$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



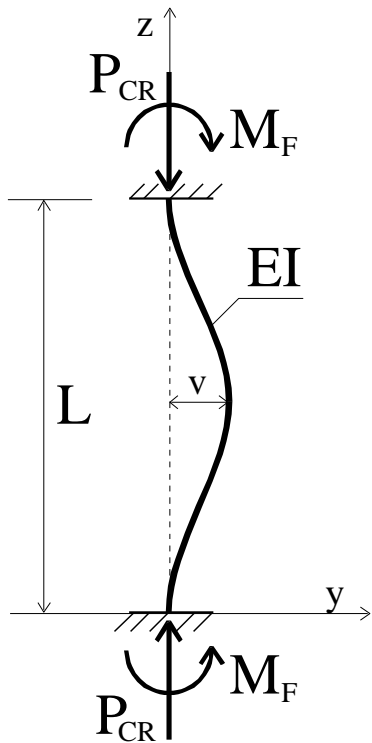
$$P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



$$P_{CR} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE OBOSTRANO UPETOG ŠTAPA



$$M = P_{CR}v - M_F$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{P_{CR}}{EI}v + \frac{M_F}{EI}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI}v = \frac{M_F}{EI}$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + \frac{M_F}{P_{CR}}$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

rubni uvjeti: $v(z=0) = 0, v(z=L) = 0$

$$C_1 = -\frac{M_F}{P_{CR}}, \quad C_2 = -\frac{M_F(1 - \cos \alpha L)}{P_{CR} \sin \alpha L}$$

$$v = -\frac{M_F}{P_{CR}} \left(\cos \alpha z + \frac{1 - \cos \alpha L}{\sin \alpha L} \sin \alpha z - 1 \right)$$

rubni uvjet: $\frac{dv}{dz} = 0$, za $z = L$:

$$1 - \cos \alpha L = 0$$

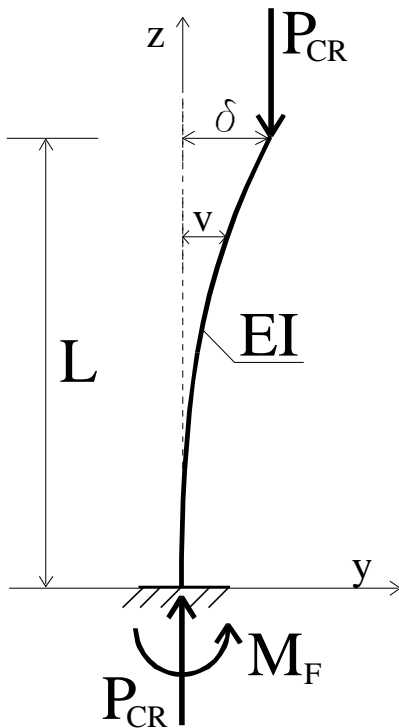
$$\cos \alpha L = 1$$

$$\alpha L = n\pi, \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

$$\min P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE KONZOLNOG ŠTAPA



$$M = -P_{CR}(\delta - v)$$

ili

$$M = P_{CR}v - M_F$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{P_{CR}}{EI}(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI}v = \frac{P_{CR}}{EI}\delta$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + \delta$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

rubni uvjeti: $v(z=0) = 0, v(z=L) = \delta$

$$C_1 = -\delta, \quad C_2 = \delta \frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L}$$

$$v = -\delta \left(\cos \alpha z - \frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L} \sin \alpha z - 1 \right)$$

rubni uvjet: $\frac{dv}{dz} = 0, \quad \text{za } z = 0:$

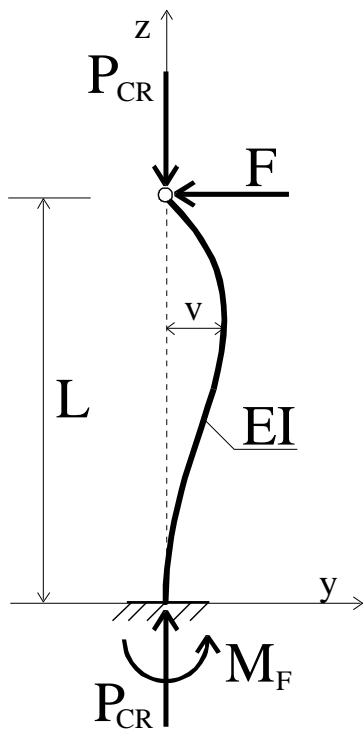
$$\cos \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\min P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

IZVIJANJE ŠTAPA UPETOG S JEDNE I ZGLOBNO OSLONJENOG S DRUGE STRANE



$$M = P_{CR}v + F(L - z)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{P_{CR}}{EI}v - F(L - z)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI}v = -\frac{F}{EI}(L - z)$$

rješenje dif. jed.:

$$v = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z - \frac{F}{P_{CR}}(L - z)$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

$$\text{rubni uvjeti: } \frac{dv}{dz}(z=0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}}$$

$$v(z=L) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}} \operatorname{tg} \alpha L$$

$$v = \frac{F}{\alpha \cdot P_{CR}} (\operatorname{tg} \alpha L \cdot \cos \alpha z - \sin \alpha z - \alpha(L - z))$$

$$\text{rubni uvjet: } v(z=0) = 0:$$

$$\alpha L = \operatorname{tg} \alpha L$$

$$\alpha L \approx 4,49$$

$$\min P_{CR} = \frac{20,2EI}{L^2} = \frac{2,05\pi^2 EI}{L^2}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

EKVIVALENTNA DULJINA ŠTAPA

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

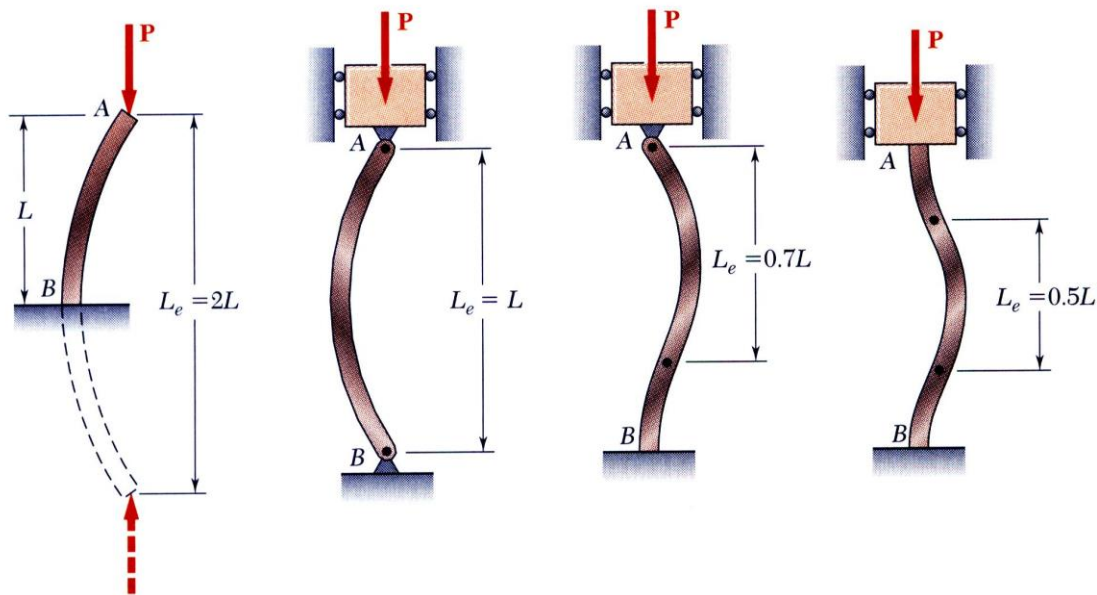
$$P_{cr,e} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{2,05\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$K = \sqrt{\frac{P_e}{P_{cr}}}$$



gdje je KL

ekvivalentna duljina štapa (duljina zglobno oslonjenog štapa s kritičnom silom jednakom kritičnoj sili promatranog štapa).

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

EKVIVALENTNA DULJINA ŠTAPA

Ekvivalentna duljina štapa (duljina zglobo oslonjenog štapa s kritičnom silom jednakom kritičnoj sili promatranog štapa):

$K = 1,0$ – obostrano zglobo oslonjen štap

$K = 0,5$ – obostrano upeti štap

$K = 2,0$ – konzolni štap

$K = 0,7$ – zglobo oslonjen štap s jedne a upet s druge strane.

Dakle, na pitanje „Zašto je duljina izvijanja konzolnog štapa / stupa jednaka $2L$ “, ovo je odgovor:

P_e (kritična sila Eulerovog štapa/obostrano zglobo štapa) : $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

P_{cr} (kritična sila konzolnog štapa / stupa jednake duljine) : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

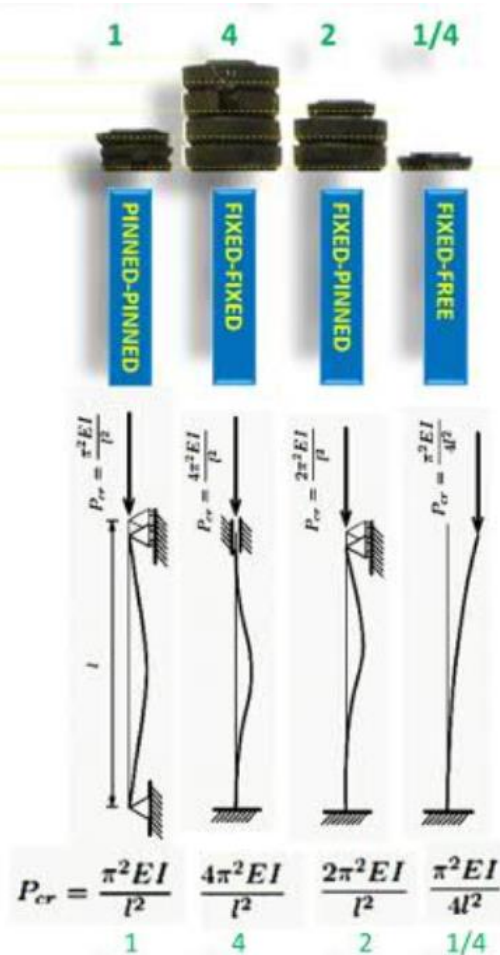
$$K = \sqrt{\frac{P_e}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 EI}{L^2}}{\frac{\pi^2 EI}{4L^2}}} = \sqrt{4} = 2.$$

Dakle, $KL = 2L$ (duljina izvijanja) znači da je kritična sila koju može ponijeti konzola / stup bez izvijanja jednaka kritičnoj sili Eulerovog štapa dvostruke duljine.

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

EKVIVALENTNA DULJINA ŠTAPA

Utjecaj rubnih uvjeta – eksperimentalna potvrda Eulerovih izraza izvijanja



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

OGRANIČENJA EULEROVE TEORIJE

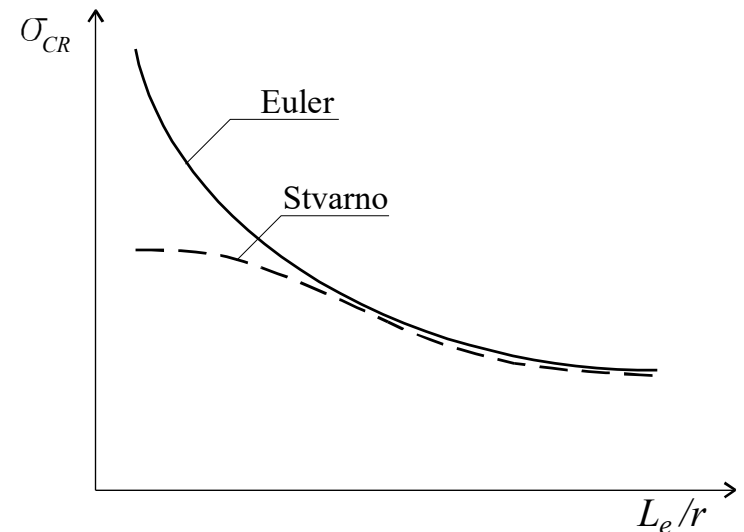
$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(KL)^2}$$

$$\text{za } I = Ar^2 \text{ (} r = i \text{): } \sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}.$$

Vitkost štapa

(odnos duljine i poprečnog presjeka)

$$\frac{KL}{r}$$



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

UVOĐENJE RUBNIH UVJETA SILA: DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA IV. REDA

- Diferencijalna jednačina ravnoteže ravnog štapa složenijih rubnih uvjeta (rubni uvjeti su ne samo geometrijski već i fizikalni) kao što je to na primjer upeti – zglobni slučaj glasi:

$$EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -M = -Q(L - x) - Py$$

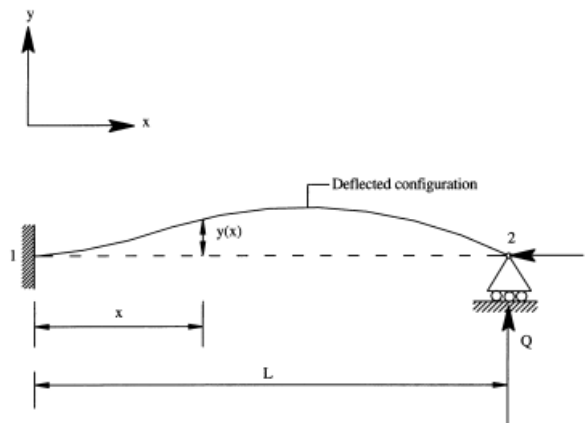
- Dvostrukim deriviranjem prethodne jednačine:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \alpha^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0, \text{ pri čemu je } \alpha^2 = \frac{P}{EI}.$$

- Ovo je sada linearna homogena diferencijalna jednačina IV. reda čije je moguće opće rješenje oblika $y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D$

- Deriviranjem jednačine rješenja / progiba po x , dobivamo jednačinu kutova zaokreta duž osi štapa

$$y' = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x + C$$



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

UVOĐENJE RUBNIH UVJETA SILA:

- Narednim deriviranjem pretpostavljenog rješenja slijede:

$$y'' = -\alpha^2 A \sin \alpha x - \alpha^2 B \cos \alpha x$$

$$y''' = -\alpha^3 A \cos \alpha x + \alpha^3 B \sin \alpha x$$

$$y^{IV} = \alpha^4 A \sin \alpha x + \alpha^4 B \cos \alpha x = -\alpha^2 y''$$

- Nadalje, poveznice pretpostavljenog rješenja i njegovih derivacija s geometrijskim i fizikalnim veličinama su:

- JEDNAŽBA PROGIBA

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D$$

- JEDNADŽBA KUTOVA ZAOBKRETA

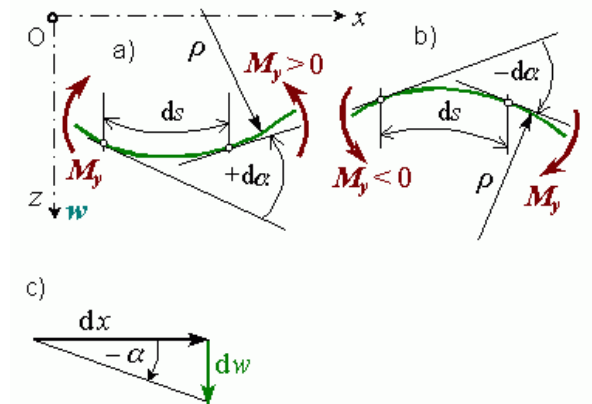
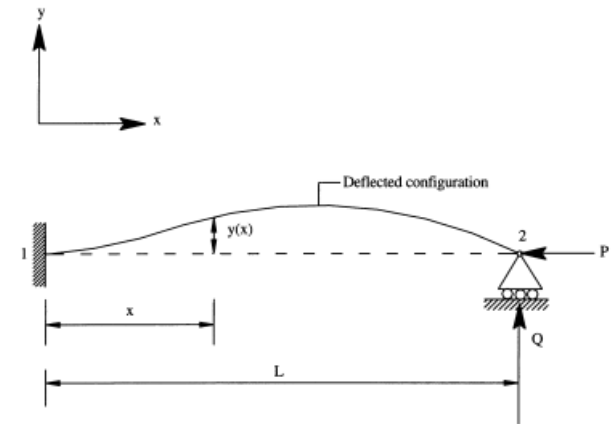
$$y' = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x + C$$

- JEDNADŽBA MOMENATA SAVIJANJA

$$M = -EIy'' = -EI(-\alpha^2 A \sin \alpha x - \alpha^2 B \cos \alpha x)$$

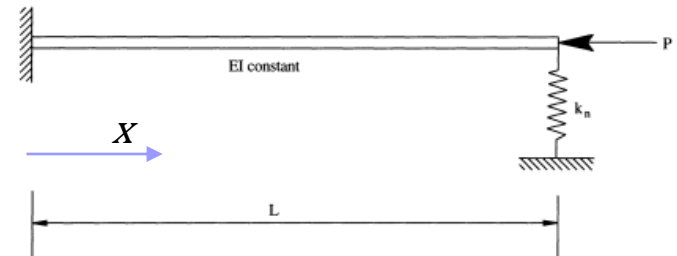
- JEDNAŽBA POSMIKA

$$T = -EIy''' - Py' = -EI(y''' + \alpha^2 y') = -EI[(-\alpha^3 A \cos \alpha x + \alpha^3 B \sin \alpha x) + \alpha^2(\alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x + C)]$$



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 1: štap s vertikalno popustljivim osloncem



Napomena: s obzirom da kraj štapa s djelomično spriječenim pomakom uključuje posmične sile (treća derivacija jednadžbe progibne linije), mora se koristiti diferencijalna jednadžba IV. reda:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \text{gdje je } \alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

Rubni uvjeti

$$y(x=0) = 0 \quad (1)$$

$$y'(x=0) = 0 \quad (2)$$

$$y''(x=L) = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} = ky / EI \rightarrow (y''' + \alpha^2 y' - \gamma y)_{x=L} = 0, \quad \text{gdje je } \gamma = \frac{k}{EI} \quad (4)$$

$$y(x=0) = A \sin \alpha 0 + B \cos \alpha 0 + C \cdot 0 + D = B + D = 0 \rightarrow D = -B \quad (1)$$

$$y'(x=0) = \alpha A \cos \alpha 0 - \alpha B \sin \alpha 0 + C = \alpha A + C = 0 \rightarrow C = -\alpha A \quad (2)$$

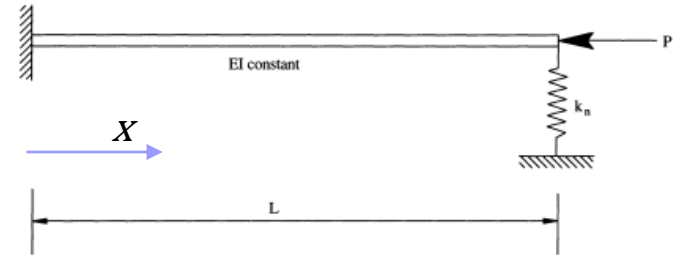
$$y''(x=L) = -\alpha^2 A \sin \alpha L - \alpha^2 B \cos \alpha L = 0 \rightarrow A \sin \alpha L + B \cos \alpha L = 0 \quad (3)$$

$$-\alpha^3 A \cos \alpha L + \alpha^3 B \sin \alpha L + \alpha^3 A \cos \alpha L - \alpha^3 B \sin \alpha L + \alpha^2 C - \gamma A \sin \alpha L - \gamma B \cos \alpha L - \gamma C L - \gamma D = 0$$

$$(\alpha \gamma L - \alpha^3 - \gamma \sin \alpha L) A + (\gamma - \gamma \cos \alpha L) B = 0 \quad (4)$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 1: štap s vertikalno popustljivim osloncem



$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L & \cos \alpha L \\ \alpha \gamma L - \alpha^3 - \gamma \sin \alpha L & \gamma - \gamma \cos \alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Za sva rješenja osim trivijalnog ($A=B=0$), determinanta koeficijenata iščezava, tj. jednaka je nuli.

$$\begin{aligned} \sin \alpha L (\gamma - \gamma \cos \alpha L) - \cos \alpha L (\alpha \gamma L - \alpha^3 - \gamma \sin \alpha L) &= \\ = \gamma \sin \alpha L - \gamma \sin \alpha L \cos \alpha L - \alpha \gamma L \cos \alpha L + \alpha^3 \cos \alpha L + \gamma \sin \alpha L \cos \alpha L &= \gamma \sin \alpha L - \alpha \gamma L \cos \alpha L + \alpha^3 \cos \alpha L = 0 \end{aligned}$$

Pretpostavimo, na primjer, da je

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{12EI}{EI} = \frac{12}{L^3}$$

Tada je:

$$\begin{aligned} \frac{12}{L^3} \sin \alpha L - \frac{12\alpha L}{L^3} \cos \alpha L + \alpha^3 \cos \alpha L &= 0 / L^3 \\ 12 \sin \alpha L - 12\alpha L \cos \alpha L + \alpha^3 L^3 \cos \alpha L &= 0 \\ 12 \sin \alpha L + (\alpha^3 L^3 - 12\alpha L) \cos \alpha L &= 0 \end{aligned}$$

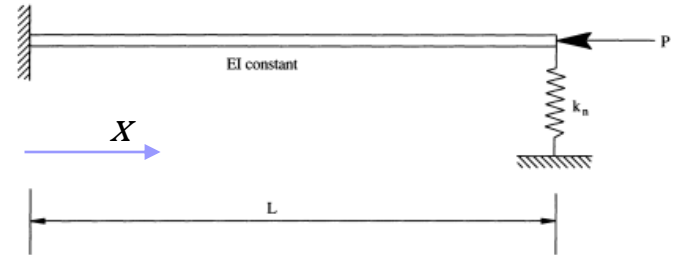
Uvedimo supstituciju $u = \alpha L$

$$f(u) = 12 \sin u + (u^3 - 12u) \cos u = 0$$

Metodom pokušaja i pogreške tražimo najmanju nul-točku funkcije $f(u)$:

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

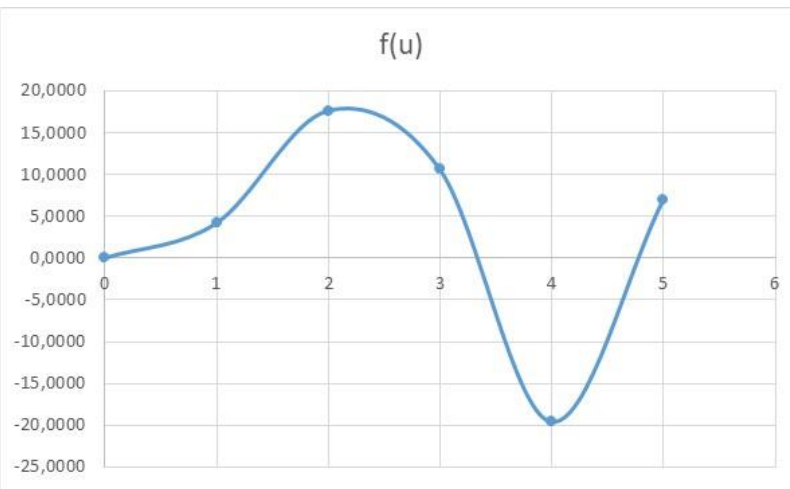
Primjer 1: štap s vertikalno popustljivim osloncem



Metodom pokušaja i pogreške tražimo najmanju nul-točku funkcije $f(u)$:

$$f(u) = 12 \sin u + (u^3 - 12u) \cos u = 0$$

u	f(u)
0	0,0000
1	4,1543
2	17,5699
3	10,6034
4	-19,5399
3,5	-5,0288
3,4	-1,6202
3,3	1,7242
3,35	0,0654
3,36	-0,2699
3,352	-0,0015



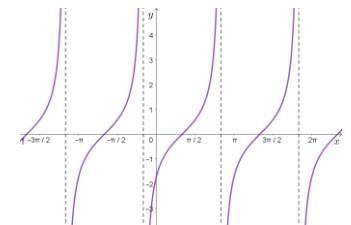
$$u = \alpha L = 3,352 \rightarrow \alpha = \frac{3,352}{L}$$

$$\alpha^2 = \frac{11,236}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI}$$

$$P_{cr} = \frac{11,236EI}{L^2} = \frac{1,138\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,937L)^2}$$

Ako koristimo funkciju tangens, vodimo računa o njenom obliku:



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 2: stup kao dio poluokvira

Rubni uvjeti

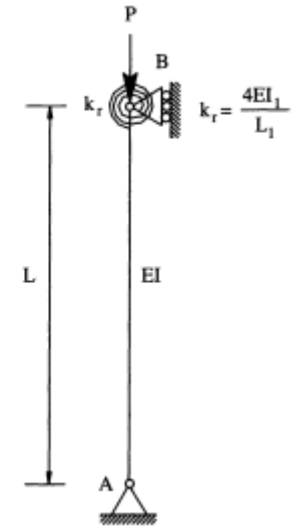
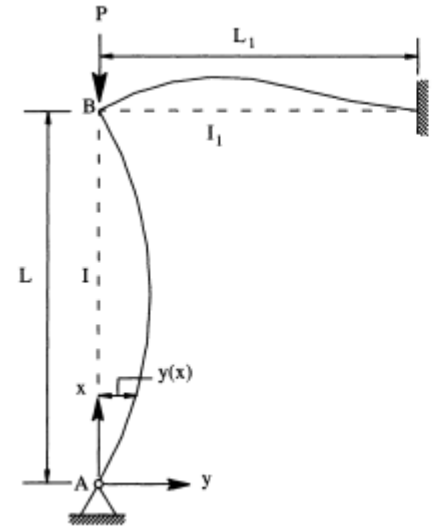
$$y(x=0) = 0 \quad (1)$$

$$y''(x=0) = 0 \quad (2)$$

$$y(x=L) = 0 \quad (3)$$

$$-EI \frac{d^2y}{dx^2}(x=L) = k_r y'(x=L)$$

$$\rightarrow (y'' + \gamma y')_{x=L} = 0, \text{ gdje je } \gamma = \frac{k_r}{EI} \quad (4)$$



Uvrštavanjem rubnih uvjeta u odgovarajuće jednažbe, dobije se:

$$y(x=0) = B + D = 0 \rightarrow D = 0 \quad (1)$$

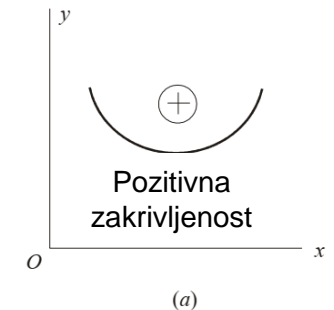
$$y''(x=0) = -\alpha^2 B = 0 \rightarrow B = 0 \quad (2)$$

$$y(x=L) = A \sin \alpha L + CL = 0 \quad (3)$$

$$-\alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma (\alpha A \cos \alpha L + C) = 0, \text{ tj. } \alpha \gamma A \cos \alpha L - \alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma C = 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L & L \\ \alpha \gamma \cos \alpha L - \alpha^2 \sin \alpha L & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det[] = \gamma \sin \alpha L - \alpha \gamma L \cos \alpha L + \alpha^2 L \sin \alpha L = 0$$



Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 2: stup kao dio poluokvira

Pretpostavimo da su, na primjer, $I_1 = I$, $L_1 = L$.

Tada je

$$\gamma = \frac{k_r}{EI} = \frac{\frac{4EI}{L}}{EI} = \frac{4}{L}$$

Nadalje,

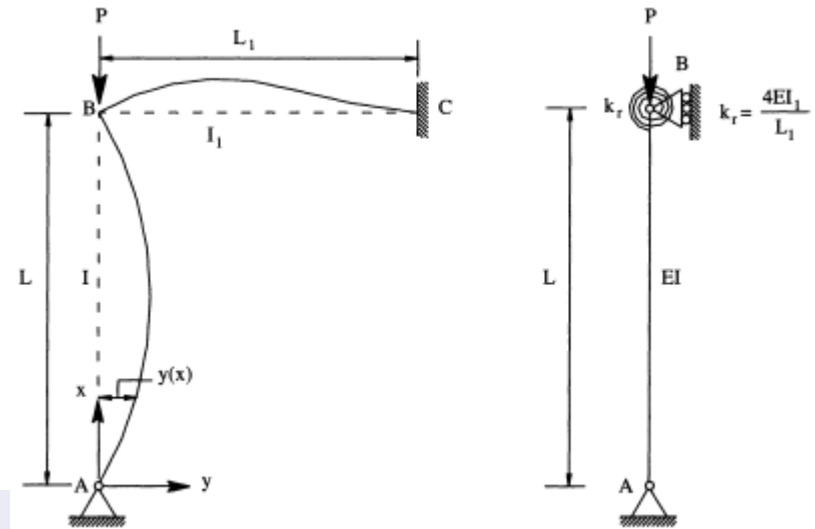
$$\frac{4}{L} \sin \alpha L - \frac{4}{L} \alpha L \cos \alpha L + \alpha^2 L \sin \alpha L = 0 \quad / \quad L$$

$$4 \sin \alpha L - 4 \alpha L \cos \alpha L + \alpha^2 L^2 \sin \alpha L = 0$$

$$(4 + \alpha^2 L^2) \sin \alpha L - 4 \alpha L \cos \alpha L = 0,$$

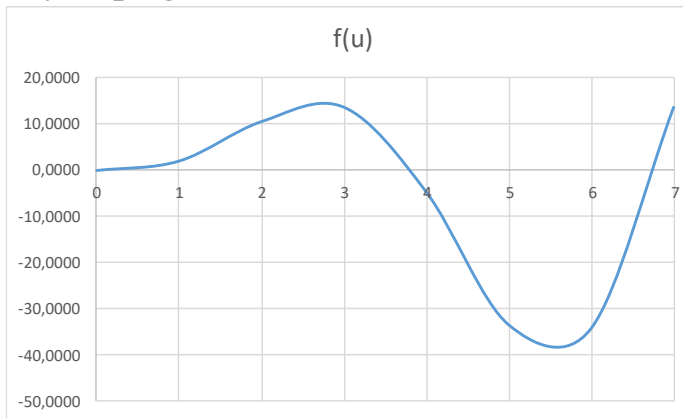
uz supstituciju $u = \alpha L$:

$$f(u) = (4 + u^2) \sin u - 4u \cos u = 0$$



Metodom pokušaja i pogreške:

u	f(u)
0	0,0000
1	2,0461
2	10,6036
3	13,7145
4	-4,6778
3,5	7,4102
3,8	0,7400
3,83	-0,0295
3,829	-0,0036
3,828	0,0223
3,8289	-0,0010



$$u = \alpha L = 3,829 \rightarrow \alpha = \frac{3,829}{L}$$

$$\alpha^2 = \frac{14,661}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI}$$

$$P_{cr} = \frac{14,661EI}{L^2} = \frac{1,485\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,82L)^2}$$

Efektivna duljina je $0,82L$.

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 3: portalni okvir s pri dnu zglobno oslonjenim stupovima

SIMETRIČNI OBLIK IZVIJANJA: izvijanje bez horizontalnih pomaka

Rubni uvjeti

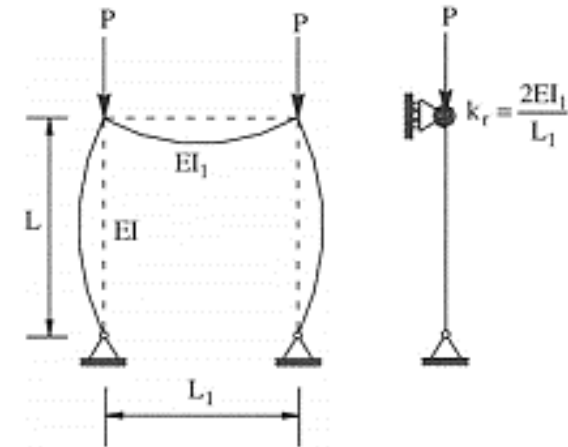
$$y(x = 0) = 0 \quad (1)$$

$$y''(x = 0) = 0 \quad (2)$$

$$y(x = L) = 0 \quad (3)$$

$$-EI \frac{d^2y}{dx^2}(x = L) = k_r y'(x = L)$$

$$\rightarrow (y'' + \gamma y')_{x=L} = 0, \text{ gdje je } \gamma = \frac{k_r}{EI} \quad (4)$$



Uvrštavanjem rubnih uvjeta u odgovarajuće jednačbe, dobije se:

$$y(x = 0) = B + D = 0 \rightarrow D = -B \quad (1)$$

$$y''(x = 0) = -\alpha^2 B = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow D = 0 \quad (2)$$

$$y(x = L) = A \sin \alpha L + CL = 0 \quad (3)$$

$$-\alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma (\alpha A \cos \alpha L + C) = 0, \text{ tj. } \alpha \gamma A \cos \alpha L - \alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma C = 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L & L \\ \alpha \gamma \cos \alpha L - \alpha^2 \sin \alpha L & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det[\] = \gamma \sin \alpha L - \alpha \gamma L \cos \alpha L + \alpha^2 L \sin \alpha L = 0$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 3: portalni okvir s pri dnu zglobno oslonjenim stupovima

Pretpostavimo da su, na primjer, $I_1=I$, $L_1=L$.

Tada je

$$\gamma = \frac{k_r}{EI} = \frac{\frac{2EI}{L}}{EI} = \frac{2}{L}.$$

Nadalje,

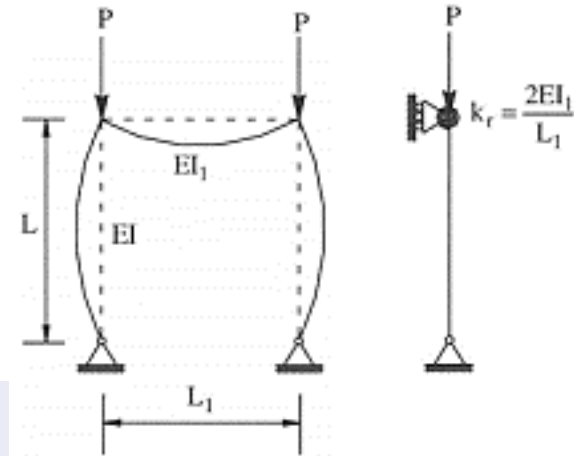
$$\frac{2}{L} \sin \alpha L - \frac{2}{L} \alpha L \cos \alpha L + \alpha^2 L \sin \alpha L = 0 \quad / \quad L$$

$$2 \sin \alpha L - 2 \alpha L \cos \alpha L + \alpha^2 L^2 \sin \alpha L = 0$$

$$(2 + \alpha^2 L^2) \sin \alpha L - 4 \alpha L \cos \alpha L = 0,$$

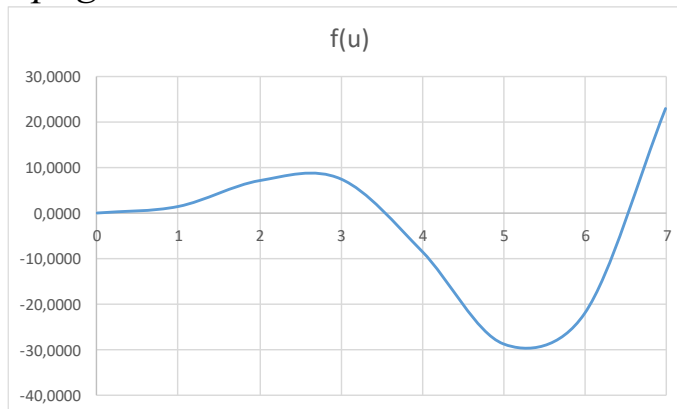
uz supstituciju $u = \alpha L$:

$$f(u) = (2 + u^2) \sin u - 2u \cos u = 0$$



Metodom pokušaja i pogreške:

u	f(u)
0	0,0000
1	1,4438
2	7,1204
3	7,4923
4	-8,3933
3,5	1,5565
3,59	0,0157
3,591	-0,0021



$$u = \alpha L = 3,591 \rightarrow \alpha = \frac{3,591}{L}$$

$$\alpha^2 = \frac{12,895}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI}$$

$$P_{cr} = \frac{12,895EI}{L^2} = \frac{1,307\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,875L)^2}$$

Efektivna duljina je $0,875L$.

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 3: portalni okvir s pri dnu zglobno oslonjenim stupovima

ANTISIMETRIČNI OBLIK IZVIJANJA: izvijanje s horizontalnim pomacima

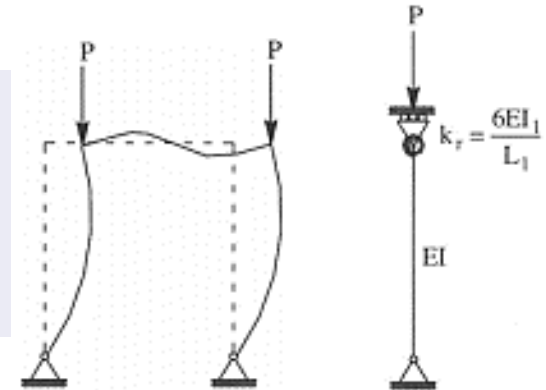
Rubni uvjeti

$$y(x=0) = 0 \quad (1)$$

$$y''(x=0) = 0 \quad (2)$$

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2}(x=L) = k_r y'(x=L) \rightarrow (y'' + \gamma y')_{x=L} = 0, \text{ gdje je } \gamma = \frac{k_r}{EI} \quad (3)$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3}(x=L) + \alpha^2 y'(x=L) = 0 \rightarrow (y''' + \alpha^2 y')_{x=L} = 0 \quad (4)$$



Uvrštavanjem rubnih uvjeta u odgovarajuće jednačbe, dobije se:

$$y(x=0) = B + D = 0 \rightarrow D = -B \quad (1)$$

$$y''(x=0) = -\alpha^2 B = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow D = 0 \quad (2)$$

$$-\alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma (\alpha A \cos \alpha L + C) = 0, \quad \text{tj. } \alpha \gamma A \cos \alpha L - \alpha^2 A \sin \alpha L + \gamma C = 0 \quad (3)$$

$$-\alpha^3 A \cos \alpha L + \alpha^2 (\alpha A \cos \alpha L + C) = 0, \quad \text{tj. } \alpha^3 A \cos \alpha L - \alpha^3 A \cos \alpha L + \alpha^2 C = 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \gamma \cos \alpha L - \alpha^2 \sin \alpha L & \gamma \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det[\quad] = \alpha^3 \gamma \cos \alpha L + \alpha^4 \sin \alpha L = 0$$

$$\gamma \cos \alpha L + \alpha \sin \alpha L = 0$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 3: portalni okvir s pri dnu zglobno oslonjenim stupovima

Pretpostavimo da su, na primjer, $I_1=I$, $L_1=L$.

Tada je

$$\gamma = \frac{k_r}{EI} = \frac{\frac{6EI}{L}}{EI} = \frac{6}{L}.$$

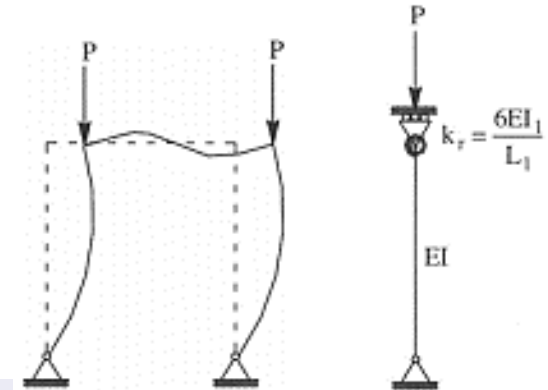
Nadalje,

$$\frac{6}{L} \cos \alpha L - \alpha \sin \alpha L = 0 / L$$

$$6 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L = 0$$

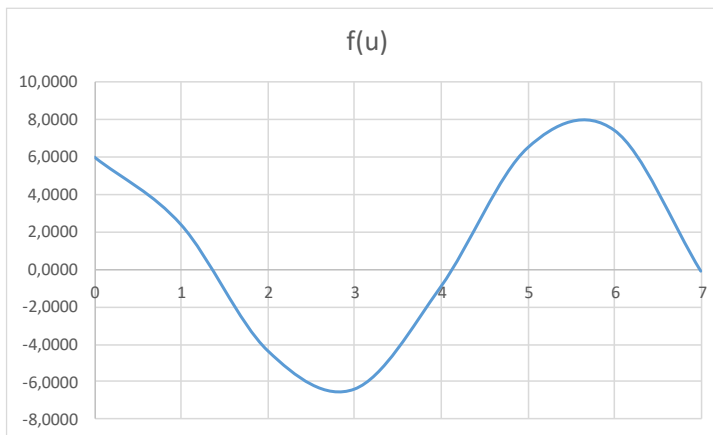
uz supstituciju $u = \alpha L$:

$$f(u) = 6 \cos u - u \sin u = 0$$



Metodom pokušaja i pogreške:

u	f(u)
0	6,0000
1	2,4003
2	-4,3155
1,5	-1,0718
1,4	-0,3598
1,3	0,3524
1,35	-0,0032



$$u = \alpha L = 1,35 \rightarrow \alpha = \frac{1,35}{L}$$

$$\alpha^2 = \frac{1,8225}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI}$$

$$P_{cr} = \frac{1,8225EI}{L^2} = \frac{0,185\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2,327L)^2}$$

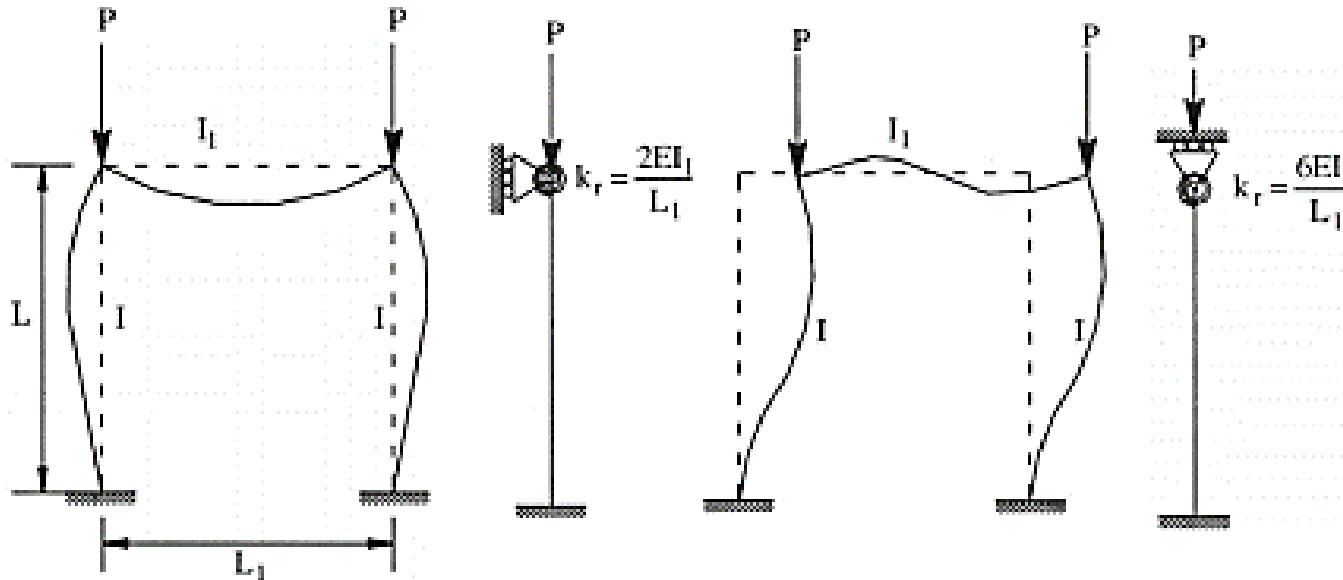
Efektivna duljina je 2,327L.

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Primjer 4: portalni okvir s pri dnu upetim stupovima

SIMETRIČNI OBLIK IZVIJANJA:

ANTISIMETRIČNI OBLIK IZVIJANJA:











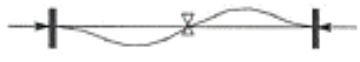



Uz pretpostavku da su $I_1=I$ i $L_1=L$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,626L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(1,156L)^2}$$

Dokažite!

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

Vrsta štapa	$P_{cr} = \pi^2 EI / (KL)^2$		Opaska
	Rubni uvjeti	K	
1. Kruti rubovi			
<i>(a) Standardni slučajevi</i>			
	upeto	slobodno	2.00
	zglobno	pomično	2.00
	zglobno	zglobno	1.00
	upeto	pomično	1.00
	upeto	zglobno	0.70
	upeto	upeto	0.50
<i>(b) Specijalni slučajevi</i>			
	upeto	unutarnji zglob zglobno	1.3495
	zglobno	kontinuirano zglobno	0.50
	upeto	kontinuirano upeto	0.33
1. Elastični rubovi			
	zglobno	zglobno s elastičnom oprugom	0.82 $k_r = 4EI/L$ 0.875 $k_r = 2EI/L$
	upeto	zglobno s elastičnom oprugom	0.626 $k_r = 2EI/L$
	upeto	slobodno s uzdužnom oprugom	0.64 $k_n = 2EI/L^3$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

RJEŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PROGIBA 4. REDA
S PRIPADAJUĆIM DERIVACIJAMA I VEZE S UNUTARNJIM SILAMA

Progib:
$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D$$

Kut zaokreta:
$$y'(x) = \alpha(A \cos \alpha x - B \sin \alpha x) + C$$

$$y''(x) = -\alpha^2 A \sin \alpha x - \alpha^2 B \cos \alpha x$$
$$y'''(x) = -\alpha^3 A \cos \alpha x + \alpha^3 B \sin \alpha x$$

Jednadžba momenata:
$$M(x) = -EIy''(x)$$

Jednadžba posmika:
$$T(x) = -EIy'''(x) - Py' = -EI(y'''' + \alpha^2 y')$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$$

Izvijanje štapova s različitim rubnim uvjetima

› Dodatni zadatci za vježbu:

M.L.Gambhir: Stability Analysis and Design of Structures

- *Problem 4.1*
- *Problem 4.2*
- *Problem 4.3*
- *Problem 4.4*
- *Problem 4.5*
- *Problem 4.6*
- *Problem 4.7*