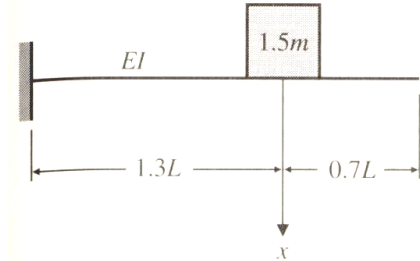


A) JEDNAŽBA GIBANJA I VLASTITA FREKVENCIJA

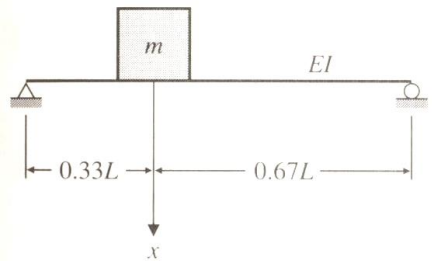
- A1 Konzolna greda zanemarive mase i krutosti na savijanje **EI** podržava teret mase **$1,5m$** . Napišite jednadžbu gibanja po D'Alembertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju.

Rješenje:
$$\ddot{x} + \frac{EI}{1,095 mL^3} x = 0$$



- A2 Prosta greda opterećena je teretom mase **m** . Napišite jednadžbu gibanja po D'Alembertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite krutost na savijanje **EI** i zanemarite masu grede.

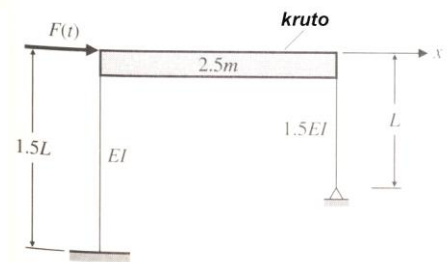
Rješenje:
$$\ddot{x} + \frac{EI}{0,0163 mL^3} x = 0$$



- A3 Za zadani okvir odredite jednadžbu gibanja po D'Alembertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite da je greda kruta, ukupne mase od **$2,5m$** , **$E=206,84\text{GPa}$** , **$I=6,25 \cdot 10^{-5}\text{m}^4$** , **$L=3,7\text{m}$** , **$m=10\text{kg}$** .

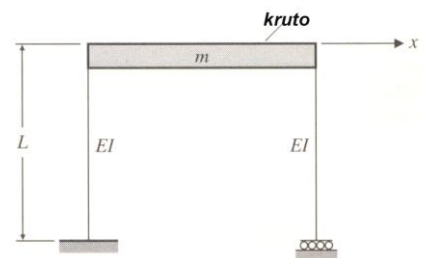
$$\omega = 286,77 \text{ rad/s}$$

Rješenje:
$$\ddot{x} + 82236,55x = \frac{F(t)}{m}$$



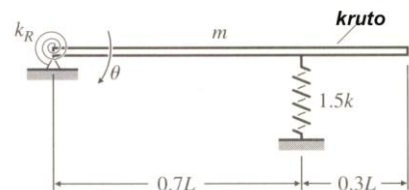
- A4 Za zadani okvir odredite jednadžbu gibanja po D'Alembertovom principu i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite da je greda kruta, ukupne mase **m** . Krutost na savijanje vertikalnih elemenata je **EI** .

Rješenje:
$$\ddot{x} + \frac{24EI}{mL^3} x = 0$$

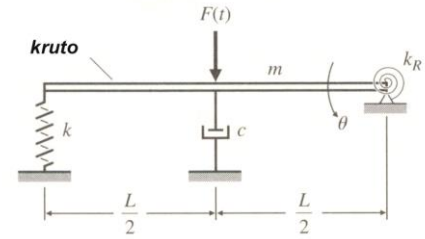


- A5 Kruta greda mase **m** djelomično je upeta rotacijskom oprugom **k_R** na zglobovnom ležaju te pridržana translacijskom oprugom krutosti **$1,5k$** . Odredite jednadžbu gibanja D'Alembertovim principom te izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite male rotacije.

Rješenje:
$$\ddot{\theta} + \frac{2,205kL^2 + 3k_R}{mL^2} \theta = 0$$

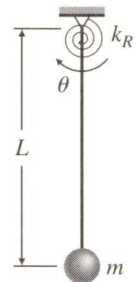


- A6 Pomoću D'Alamberovog principa odredite jednadžbu gibanja zadanog sustava i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Greda je kruta ukupne mase m . Pretpostavite male rotacije.



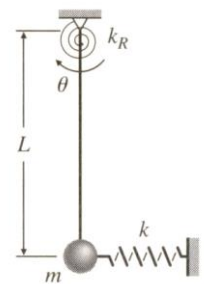
Rješenje:
$$\ddot{\theta} + \frac{3c}{4m} \dot{\theta} + 3 \frac{kL^2 + k_R}{mL^2} \theta = \frac{3F(t)}{2mL}$$

- A7 Kruta greda bez mase, duljine L na svom kraju je opterećena koncentriranom masom m . Na mjestu zglobnog ležaja, rotacija grede je djelomično spriječena rotacijskom oprugom krutosti k_R . D'Alambetovim principom odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite male oscilacije.



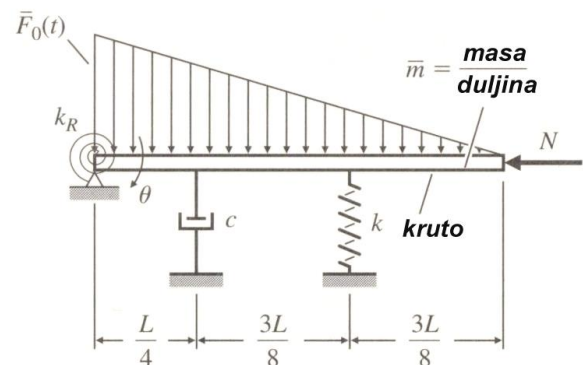
Rješenje:
$$\ddot{\theta} + \frac{mgL + k_R}{mL^2} \theta = 0$$

- A8 Kruta greda bez mase, duljine L na svom kraju je opterećena koncentriranom masom m koja je horizontalno pridržana translacijskom oprugom krutosti k . Na mjestu zglobnog ležaja, rotacija grede je djelomično spriječena rotacijskom oprugom krutosti k_R . Energetskom metodom odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite male oscilacije.



Rješenje:
$$\ddot{\theta} + \frac{mgL + kL^2 + k_R}{mL^2} \theta = 0$$

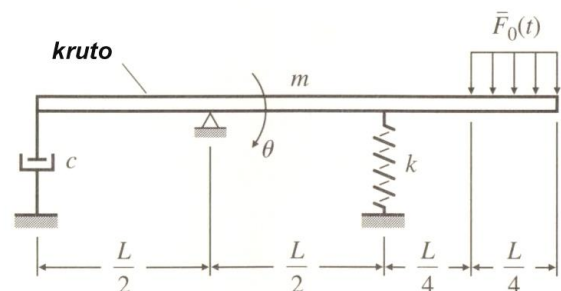
- A9 Odredite jednažbu gibanja krute grede na slici te izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Greda je opterećena jednoliko raspoređenim vremenski promjenjivim trokutastim opterećenjem i konstantnom horizontalnom silom. Pretpostavite male kutove rotacije.



Rješenje:

$$\frac{\bar{m}L^3}{3} \ddot{\theta} + \frac{cL^2}{16} \dot{\theta} + \left(\frac{25kL^2}{64} + k_R - NL \right) \theta = \frac{\bar{F}_0(t)L^2}{6}$$

- A10 Kruta greda mase m izložena je djelovanju vremenski promjenjivog linijski raspoređenog opterećenja maksimalne amplitude $F_0(t)$. Principom virtualnih pomaka odredite jednažbu gibanja i izračunajte vlastitu kružnu frekvenciju. Pretpostavite male kutove rotacije.



Rješenje:
$$\frac{7m}{12} \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k \theta = \frac{7\bar{F}_0(t)}{8}$$

B) NEPRIGUŠENE SLOBODNE VIBRACIJE

- B1 Koncentrirana je masa od **10kg** pridržana linijskom oprugom. Sustav je pobuđen početnom brzinom bez početnog pomaka. Nastalo je gibanje s periodom od **0,2s** te amplitudom vibracija od **60mm**. Odredite:

- krutost opruge
- početnu brzinu.

Rješenje: a) $k = 9869,6 \text{ N/m}$
 b) $x'_0 = 1885,0 \text{ mm/s}$

- B2 Jednostavni sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od mase i linijske opruge i oscilira s maksimalnim ubrzanjem od **1,5m/s²** te vlastitom frekvencijom od **100Hz**. Odredite:

- amplitudu pomaka
- maksimalnu brzinu mase.

Rješenje: a) $X = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
 b) $x'_{\max} = 0,0024 \text{ m/s}$

- B3 Koncentrirana je masa **m** pridržana linijskom oprugom krutosti **k**. Izmjeren je vlastiti period sustava od **0,35s**. Kada se masi pridoda teret težine **10N**, period se sustava poveća za 10%. Odredite:

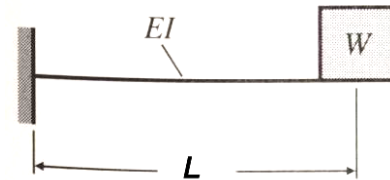
- težinu početne mase **m**
- početnu krutost sustava **k**.

Rješenje: a) $G = 47,72 \text{ N}$
 c) $k = 1567,0 \text{ N/m}$

- B4 Konzoli na slici dan je početni pomak na slobodnom kraju od **5cm** s početnom brzinom od **10cm/s** u istom smjeru. Odredite:

- vlastitu frekvenciju slobodnih vibracija sustava
- maksimalni pomak, brzinu i ubrzanje mase
- fazni kut.

Pretpostavite da je $E=206,8 \text{ GPa}$, $I=0,001 \text{ m}^4$, $L= 3,0 \text{ m}$, $W=3,4 \text{ kN}$.



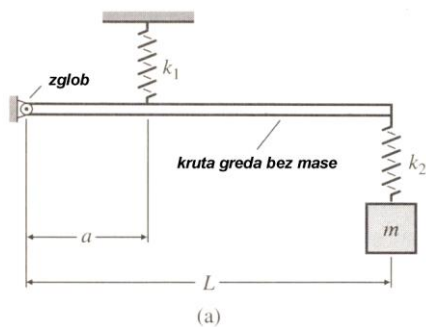
Rješenje: a) $f = 41,0 \text{ Hz}$
 b) $x_{\max} = 5,0 \text{ cm}$; $x'_{\max} = 1287,4 \text{ cm/s}$; $x''_{\max} = 331479,8 \text{ cm/s}^2$
 c) $\varphi = 1,563 \text{ rad}$

- B5 Teretu težine **200N** obješenom o linijsku oprugu dana je početna brzina od **5m/s** bez početnog pomaka. Izmjeren je vlastiti period vibracija od **0,3s**. Odredite:

- krutost opruge
- amplitudu pomaka vibracija
- brzinu i ubrzanje mase u trenutku $t=0,5 \text{ s}$.

Rješenje: a) $k = 8942,90 \text{ N/m}$
 b) $X = 0,239 \text{ m}$
 c) $x'(t=0,5) = -2,511 \text{ m/s}$; $x''(t=0,5) = 90,654 \text{ m/s}^2$

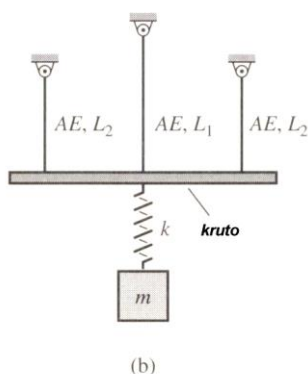
- B6 Za sustave na slici odredite:
- zamjenjujuću krutost opruge
 - jednadžbu gibanja
 - vlastitu kružnu frekvenciju vibracija.



Rješenje: $k_e = \frac{a^2 k_1 k_2}{a^2 k_1 + L^2 k_2}$

$$\ddot{x} + \frac{a^2 k_1 k_2}{m(a^2 k_1 + L^2 k_2)} x = 0$$

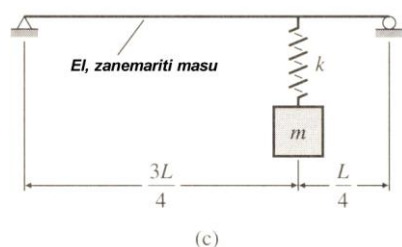
$$\omega = \sqrt{\frac{a^2 k_1 k_2}{m(a^2 k_1 + L^2 k_2)}} \text{ (rad/s)}$$



Rješenje: $k_e = \frac{AEk(2L_1 + L_2)}{L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2)}$

$$\ddot{x} + \frac{AEk(2L_1 + L_2)}{m(L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2))} x = 0$$

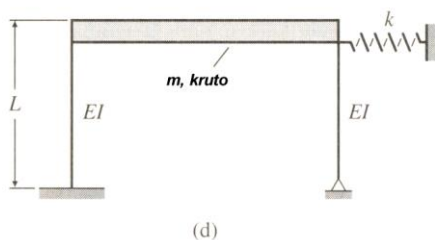
$$\omega = \sqrt{\frac{AEk(2L_1 + L_2)}{m(L_1 L_2 k + AE(2L_1 + L_2))}} \text{ (rad/s)}$$



Rješenje: $k_e = \frac{256 EI k}{3L^3 k + 256 EI}$

$$\ddot{x} + \frac{256 EI k}{m(3L^3 k + 256 EI)} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{256 EI k}{m(3L^3 k + 256 EI)}} \text{ (rad/s)}$$



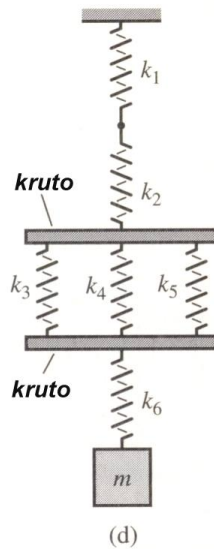
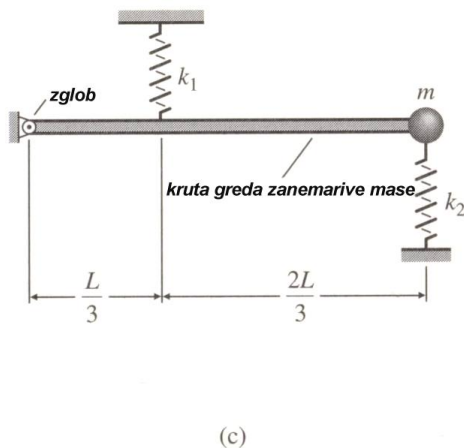
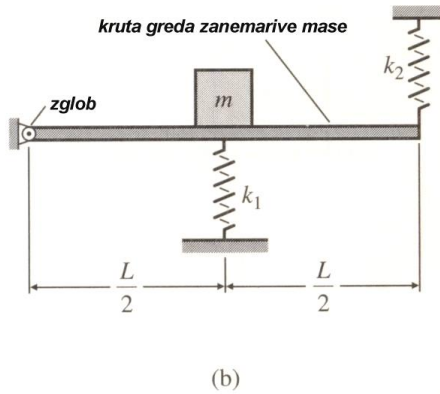
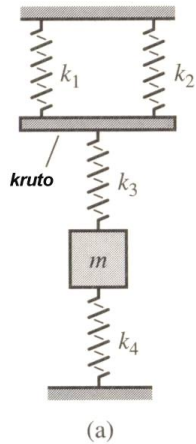
Rješenje: $k_e = \frac{15EI + kL^3}{L^3}$

$$\ddot{x} + \frac{15EI + kL^3}{mL^3} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{15EI + kL^3}{mL^3}} \text{ (rad/s)}$$

- B7 Za sustave na slici odredite:
- zamjenjujuću krutost opruge
 - jednadžbu gibanja
 - vlastitu kružnu frekvenciju vibracija.

Rješenja:



$$a) \quad k_e = \frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{k_1 + k_2 + k_3}$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{m(k_1 + k_2 + k_3)} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)k_4}{m(k_1 + k_2 + k_3)}} \text{ (rad/s)}$$

$$b) \quad k_e = k_1 + 4k_2$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + 4k_2}{m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{m}} \text{ (rad/s)}$$

$$c) \quad k_e = \frac{k_1 + 9k_2}{9}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + 9k_2}{9m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 9k_2}{9m}} \text{ (rad/s)}$$

$$d) \quad k_e = \frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{[(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6] m} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_6 (k_3 + k_4 + k_5)}{[(k_3 + k_4 + k_5)(k_1 k_6 + k_2 k_6 + k_1 k_2) + k_1 k_2 k_6] m}} \text{ (rad/s)}$$

C) PRIGUŠENE SLOBODNE VIBRACIJE

- C1 Viskozno prigušeni sustav s jednim stunjem slobode usljed vlastite težine od **220N** ima statički progib od **1,9cm**. Odredite vrijednost kritičnog prigušenja zadanog sustava.

Rješenje: $C_c = 1019,2 \text{ Ns/m}$

- C2 Slabo prigušeni konstrukcijski sustav težine **22,2N**, krutosti **$k=3502,6\text{N/m}$** i viskoznog prigušenja **$c=35,0\text{Ns/m}$** dobije početni pomak od **5,1cm**. Odredite amplitudu vibracija nakon 10 i nakon 20 oscilacija.

Rješenje: $X(n=10) = 1,726 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$; $X(n=20) = 5,689 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$

- C3 Odredite omjer uzastopnih amplituda vibracija viskozno prigušenog sustava kojem je logaritamski dekrement prigušenja **$\delta=0,3$** .

Rješenje: **1,35**

- C4 Sustav koji vibrira spojen je s uređajem za viskozno prigušenje s mogućnošću skaliranja. Za zadani nivo prigušenja, omjer je uzastopnih amplituda vibracija 1:5. Odredite novonastali omjer uzastopnih amplituda ako se veličina prigušenja udvostruči.

Rješenje: **1 : 36**

- C5 Viskozno prigušeni konstrukcijski sustav prigušenja **$c=14,0\text{Ns/m}$** , čine masa težine **178,0N** i opruga krutosti **$k=17513,0\text{N/m}$** . Sustav slobodno vibrira usljed početnog pomaka od **10cm**. Odredite amplitude vibracija nakon 10, 15 i 20 ciklusa.

Rješenje: $X(n=10) = 4,59\text{cm}$; $X(n=15) = 3,11\text{cm}$; $X(n=20) = 2,11\text{cm}$

- C6 Viskozno prigušeni konstrukcijski sustav s težinom od **444,8N** usljed vlastite težine poprimi statički progib od **1,3cm**. Nakon toga je masi dan početni pomak od **0,6cm** što je dovelo do vibriranja sustava. Nakon 3 ciklusa, izmjerena je amplituda slobodnih vibracija od **0,25cm**. Odredite:

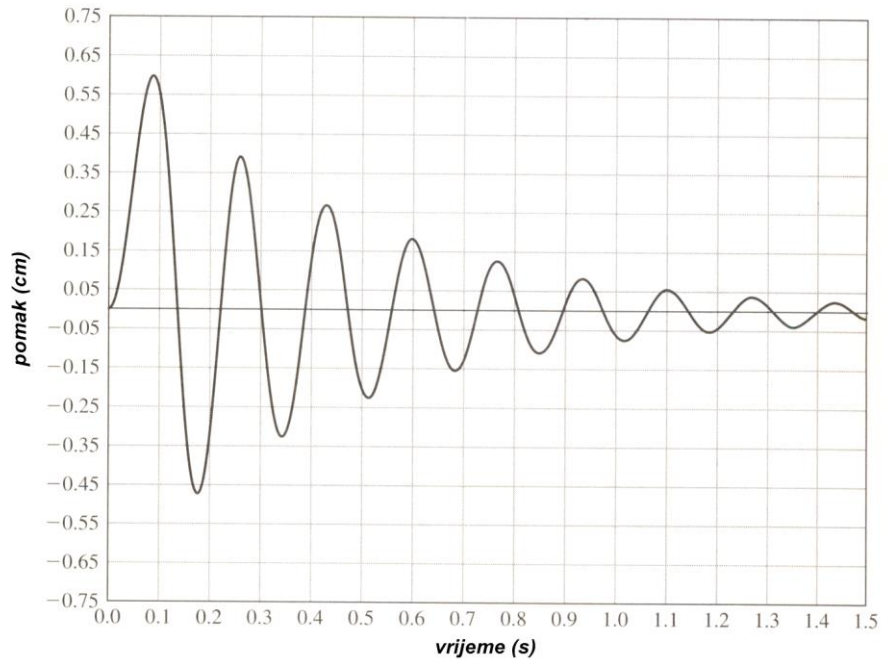
- a) logaritamski dekrement prigušenja δ
- b) bezdimenzionalni koeficijent prigušenja ζ
- c) koeficijent viskoznog prigušenja c
- d) frekvenciju prigušenih vibracija.

Rješenje: a) $\delta = 0,292$; b) $\zeta = 4,6\%$; c) $c = 114,6\text{Ns/m}$; d) $f_D = 4,37\text{Hz}$

- C7 Konstrukcija s viskoznim prigušenjem slobodno vibrira usljed početne brzine. Nastale prigušene oscilacije prikazane su na slici. Odredite:

- a) vlastiti period vibracija
- b) logaritamski dekrement prigušenja
- c) bezdimenzionalni koeficijent prigušenja ζ .

Rješenje: a) $T_D = 0,17\text{s}$; b) $\delta = 0,414$; c) $\zeta = 6,6\%$



- C8 Teret težine $W=20N$ ovješten je o oprugu krutosti $k=130N/m$ te mu je zadan početni pomak od **6,4cm** nakon čega nastavlja slobodno oscilirati. Nakon 150 ciklusa oscilacija, amplituda vibracija iznosi **3,2cm**. Odredite koeficijent histerezisnog prigušenja i ekvivalentni koeficijent viskoznog prigušenja.

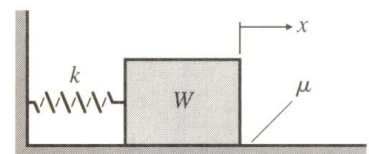
Rješenje: $\eta = 0,0015$; $c_e = 0,024Ns/m$

- C9 Konstrukcija s histerezisnim prigušenjem ima period vibracija od **0,5s**. Praćenjem slobodnih vibracija zabilježena je amplituda desetog ciklusa veličine 90% od amplitude prvog ciklusa. Odredite koeficijent histerezisnog prigušenja.

Rješenje: $\eta = 0,0033$

- C10 Konstrukcijski sustav na slici ima masu težine $W=6,7kN$, krutost $k=613,0kN/m$ i koeficijent trenja između mase i podloge $\mu=0,15$. Masa je pomaknuta iz svog stanja statičke ravnoteže početnim pomakom od **19,1cm** te otpuštena. Odredite:

- amplitudu pomaka vibracija nakon 5 ciklusa
- broj ciklusa do mirovanja mase.



Rješenje: a) $X(n=5) = 15,8cm$; b) $n=29,1$

D) ODZIV NA HARMONIJSKU UZBUĐU

- D1 Na neprigušeni sustav s jednim stupnjem slobode djeluje harmonijska sila amplitude $F_0=80N$ i frekvencije **8 okretaja/s**. Masa je **6kg** a krutost opruge **3N/m**. Odredite amplitudu pomaka trajnog dijela odziva X_f .

Rješenje: $X_f = 5,3mm$

- D2 Amplituda pomaka trajnog dijela odziva neprigušenog sustava iznosi **1,27cm**. Ako je krutost opruge **3502,6N/m** a harmonijska uzbudna sila oblika **222,4sin3t [N]**, izračunajte težinu mase.

Rješenje: $W = 15,12kN$

- D3 Sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od opruge krutosti **4378,25N/m** i koncentrirane mase težine **89,0N** i izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=133,4N$ i frekvencije **120Hz**. Odredite:

- a) amplitudu trajnog dijela pomaka
 b) potrebnu težinu mase kojoj bi se amplituda vibracija smanjila za 50%.

Rješenje: a) $X_f = 2,59 \cdot 10^{-5}m$; b) $G = 177,87N$

- D4 Neprigušeni sustav s masom od **10kg** i oprugom krutosti $k=4,0kN/m$, izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=0,5kN$. Tijekom odziva, izmjerena je amplituda pomaka trajnog dijela od **11mm**. Odredite frekvenciju uzbudne sile.

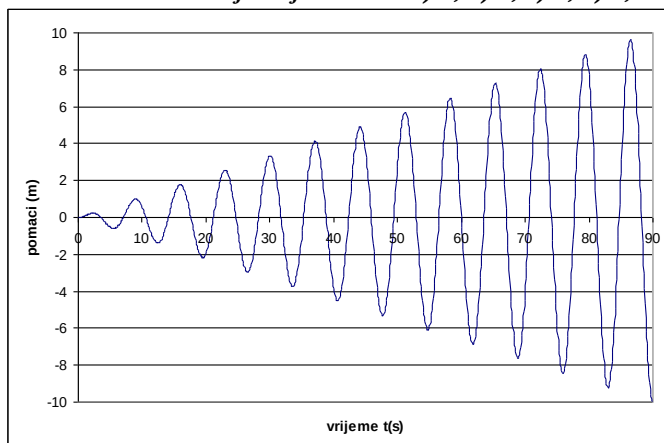
Rješenje: $\Omega = 64,4 \text{ rad/s}$

- D5 Neprigušeni sustav s masom od **10kg** i oprugom krutosti $k=8,0N/mm$, izložen je djelovanju harmonijske sile amplitude $F_0=200N$ i kružne frekvencije od **35rad/s**. Za početne uvjete $x(0)=21mm$ i $x'(0)=175mm/s$, izračunajte ukupni pomak, brzinu i ubrzanje mase za a) $t=2s$, b) $t=4s$ i c) $t=6s$.

Rješenje: a) $x(t=2) = -63,71mm$; $x'(t=2) = 770,51mm/s$; $x''(t=2) = 27123,46mm/s^2$
 b) $x(t=4) = -23,56mm$; $x'(t=4) = 2128,90mm/s$; $x''(t=4) = 38409,59mm/s^2$
 c) $x(t=6) = 1,22mm$; $x'(t=6) = 3248,73mm/s$; $x''(t=6) = 8361,91mm/s^2$

- D6 Sustav s jednim stupnjem slobode s masom od **10kg** i oprugom krutosti $k=8N/m$ u rezonanciji je s uzbudnom harmonijskom silom amplitude $F_0=2,0N$. Izračunajte pomake trajnog dijela odziva nakon a) $2 \frac{1}{2}$ ciklusa, b) $5 \frac{1}{2}$ ciklusa, c) $8 \frac{1}{2}$ ciklusa i d) $8 \frac{1}{4}$ ciklusa.

Rješenje: a) 0; b) 0; c) 0; d) 6,46m



- D7 Neprigušeni je sustav uzbuđen blizu rezonancije što je rezultiralo njegovim pulziranjem. Vlastita je kružna frekvencija sustava **1800 okretaja/min** dok je frekvencija uzbudne sile **1785 okretaja/min**. Odredite period pulziranja i broj oscilacija jednog pulsa.

Rješenje: 7,95s; 236,6 oscilacija

- D8 Omjer amplituda pomaka trajnog dijela odziva za $r=0,5$ i $r=1$ iznosi **1:4** zadanog viskozno prigušenog sustava. Odredite bezdimenzionalni koeficijent prigušenja sustava ζ .

Rješenje: $\zeta = 9,4\%$

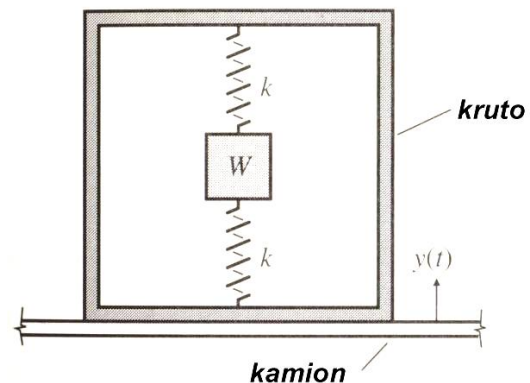
- D9 Sustav s jednim stupnjem slobode sastoji se od mase težine **444,8N**, opruge krutosti **$k=2627,0N/m$** i viskoznog prigušivača s koeficijentom prigušenja **$c=8,8Ns/m$** . Ako se sustav uzbuđi harmonijskom silom amplitude **$F_0=111,2N$** , odredite amplitudu pomaka trajnog dijela odziva pri rezonanciji.

Rješenje: $X_f = 1,615m$

- D10 Viskozno prigušeni sustav uzbuđen je harmonijskom silom **$F(t)=F_0\sin\Omega t$** . Amplituda pomaka trajnog dijela odziva pri rezonanciji iznosi **1,9cm** dok je pri 75% rezonantne frekvencije izmjerena amplituda pomaka od **1,6cm**. Odredite veličinu bezdimenzionalnog koeficijenta prigušenja $\zeta(\%)$ sustava.

Rješenje: $\zeta = 23,8\%$

- D11 Specijalni teret težine **222,4N** pričvršćen je u zatvorenoj kutiji s dvije opruge podjednakih krutosti **$k=43782,5N/m$** (vidi sliku). Kutija se nalazi na kamionu koji tijekom vožnje izaziva vertikalne harmonijske vibracije amplitude **$y(t)=3,8\sin 4t$ [cm]**. Odredite maksimalni pomak, brzinu i ubrzanje tereta u kutiji.

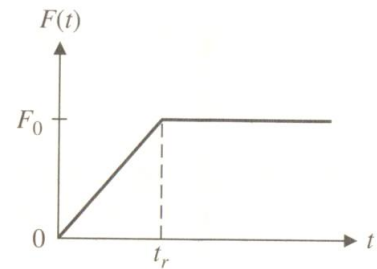


Rješenje: $X_{max} = 3,816cm$; $X'_{max} = 15,264cm/s$; $X''_{max} = -61,056cm/s^2$

E) ODZIV NA OPĆU DINAMIČKU UZBUĐU

- E1 Odredite jednadžbe pomaka neprigušenog sustava pod djelovanjem promjenjivog opterećenja sa slike pomoću Duhamelovog integrala.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_r}, & 0 \leq t \leq t_r \\ F_0, & t_r < t \end{cases}$$

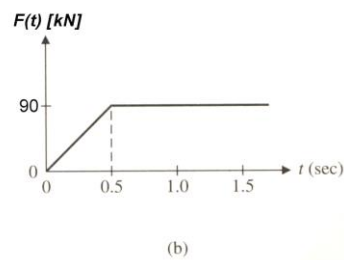
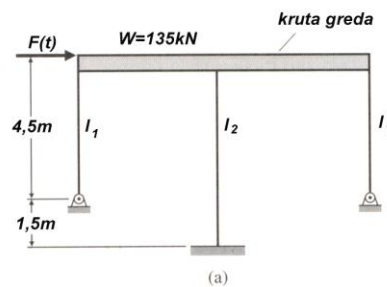


Rješenje:

$$x(t) = \frac{F_0}{kt_r} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad 0 \leq t \leq t_r$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega t_r} [\sin \omega(t - t_r) - \sin \omega t] \right\}, \quad t_r < t$$

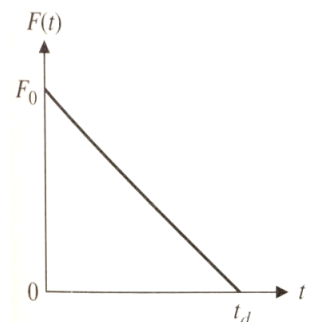
- E2 Primjenom jednadžbi pomaka iz prethodnog zadatka (E1), odredite horizontalni pomak okvira u trenutku $t=0,7s$. Nosivi se okvir sastoji od krute grede težine $W=135 \text{ kN}$ i fleksibilnih stupova ($E=206844 \text{ MPa}$, $I_1=3446 \text{ cm}^4$, $I_2=7076 \text{ cm}^4$); utjecaj prigušenja zanemarite.



Rješenje: $x(0,7s) = 0,078m$

- E3 Odredite jednadžbe pomaka neprigušenog sustava pod djelovanjem promjenjivog trokutastog pulsa sa slike pomoću Duhamelovog integrala.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right), & 0 \leq t \leq t_d \\ 0, & t_d < t \end{cases}$$

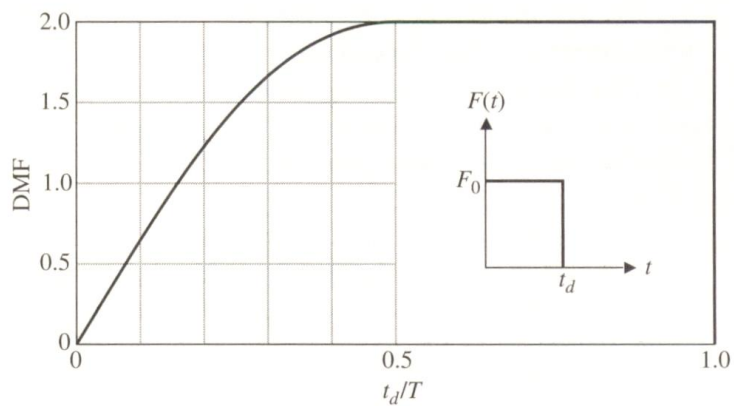


Rješenje:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \omega t - \frac{t}{t_d} + \frac{\sin \omega t}{\omega t_d} \right), \quad 0 \leq t \leq t_d$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k\omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d) - \omega t_d \cos \omega t], \quad t_d < t$$

- E4 Odredite maksimalni horizontalni pomak okvira iz zadatka (E2) izloženog djelovanju pravokutnog pulsnog opterećenja pomoću njegovog spektra odziva prikazanog na slici. Pretpostavite da je $F_0 = 67 \text{ kN}$ a $t_d = 0,45 \text{ s}$.



Rješenje:

$$x_{max} = 0,087 \text{ m}$$