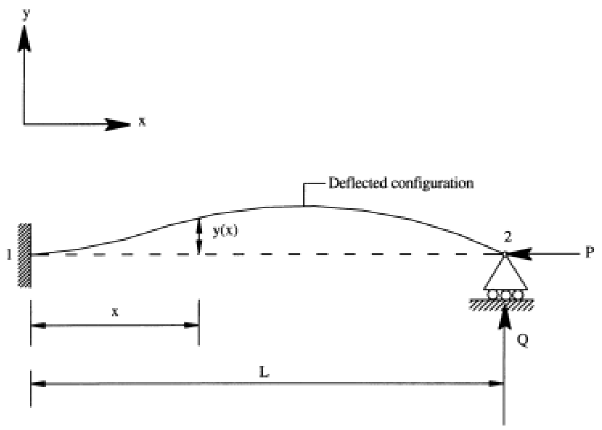
Diferencijalna jednadžba ravnoteže ravnog štapa složenijih rubnih uvjeta (rubni uvjeti su ne samo geometrijski već i fizikalni) kao što je to na primjer upeti – zglobni slučaj glasi:



$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -M = -Q(L-x) - Py$$

gdje je ***Q*** poprečna sila u štapu (koju najčešće u ovoj analizi zanemarujemo).

Dvostrukim deriviranjem prethodne jednadžbe po ***x***, dobivamo:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \alpha^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\,, pri\ čemu\ je\quad \alpha^2 = \frac{P}{EI}.$$

Ovo je sada linearna homogena diferencijalna jednadžba IV. reda čije je moguće opće rješenje oblika

$$y = Asin\alpha x + Bcos\alpha x + Cx + D$$

Deriviranjem jednadžbe rješenja / progiba po ***x***, dobivamo jednadžbu kutova zaokreta duž osi štapa

$$y' = \alpha Acos\alpha x - \alpha Bsin\alpha x + C$$

Narednim deriviranjem pretpostavljenog rješenja slijede:

$$y'' = -\alpha^2 Asin\alpha x - \alpha^2 Bcos\alpha x$$

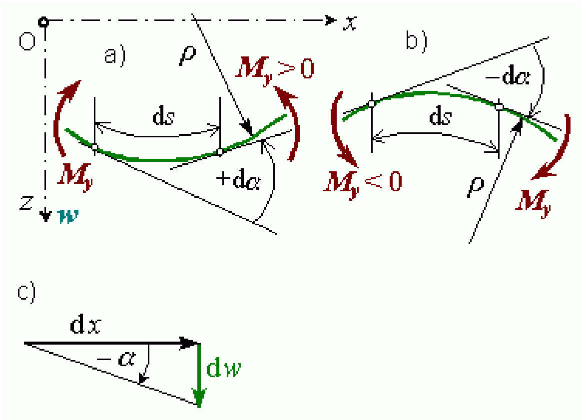
$$y''' = -\alpha^3 Acos\alpha x + \alpha^3 Bsin\alpha x$$

$$y^{IV} = \alpha^4 Asin\alpha x + \alpha^4 Bcos\alpha x = -\alpha^2 y''$$

Nadalje, poveznice pretpostavljenog rješenja i njegovih derivacija s geometrijskim i fizikalnim veličinama su:

- JEDNAŽBA PROGIBA
$$y = Asin\alpha x + Bcos\alpha x + Cx + D$$
- JEDNADŽBA KUTOVA ZAOKRETA
$$y' = \alpha Acos\alpha x - \alpha Bsin\alpha x + C$$
- JEDNADŽBA MOMENATA SAVIJANJA
$$M = -EIy''$$
$$M = -EI(-\alpha^2 Asin\alpha x - \alpha^2 Bcos\alpha x)$$

  pri čemu ovaj predznak ovisi predznaku kod deformacija savijanja ravnog nosača (u većini slučajeva je negativan)



- JEDNAŽBA POSMIKA
$$T = -EIy''' - Py' = -EI(y''' + \alpha^2 y')$$
$$T = -EI[(-\alpha^3 Acos\alpha x + \alpha^3 Bsin\alpha x) + \alpha^2(\alpha Acos\alpha x - \alpha Bsin\alpha x + C)]$$

Primjenom ovih rješenja uz odgovarajuće rubne uvjete može se prilično učinkovito analizirati stabilnost ravnih štapova te sklopova u kojima se osim kritičnog tlačnog elementa utjecaji ostalih priključnih elemenata mogu nadomjestiti odgovarajućim elastičnim elementima / oprugama.

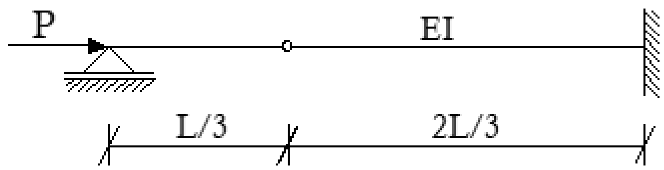
Prema tome, primjena je moguća uz ispunjenje dva neophodna uvjeta a to su:

1. funkcije rješenja (progiba, kutova zaokreta, momenata savijanja i posmika) moraju biti neprekinute i kontinuirane

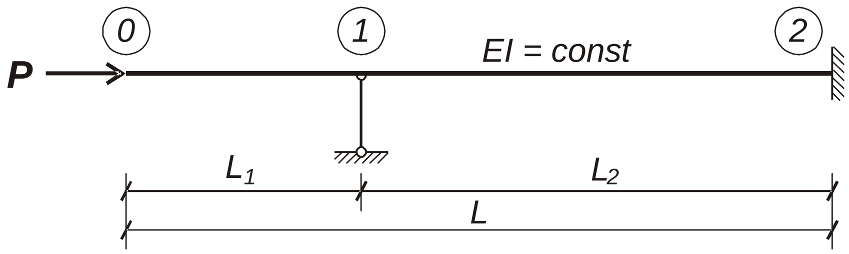
2. cijelom duljinom štapa, moment savijanja mora moći biti definiran izrazom M = P · y.

Međutim, što ako prvi uvjet **nije** ispunjen, tj. neka od nabrojanih funkcija nije neprekinuta tj. negdje duž osi štapa imamo svojevrstan nagli skok kao u sljedećim primjerima?

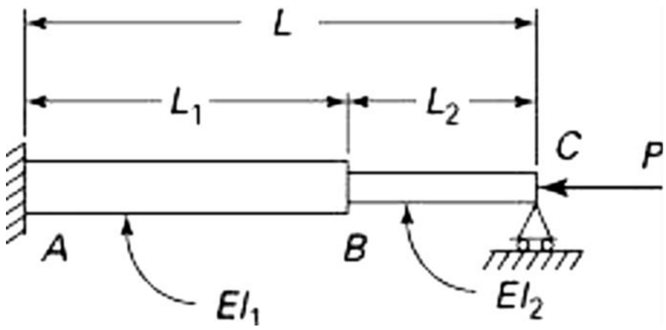
- Lom u dijagramu promjene kuta zaokreta na mjestu unutarnjeg zgloba



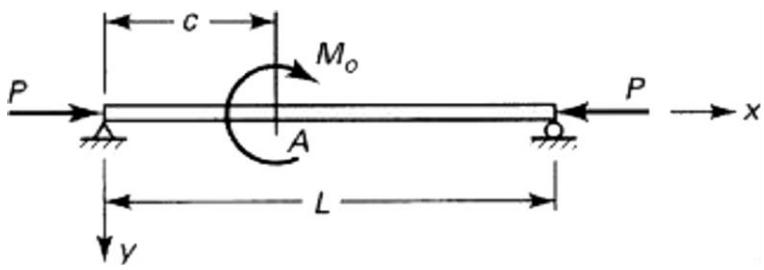
- Skok u dijagramu poprečnih sila na mjestu pomičnog ležaja u točki 1



- Nagla promjena krutosti duž osi štapa

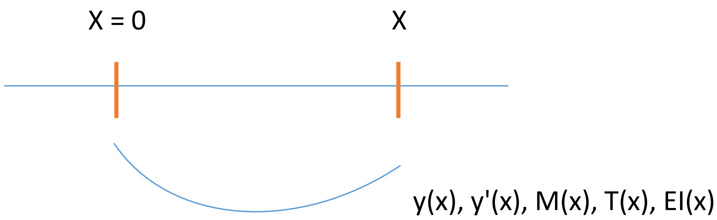


- Skok u dijagramu momenata savijanja uslijed djelovanja unutarnjeg koncentriranog momenta savijanja.



Ove primjere riješit ćemo u nastavku manjom prilagodbom rješenja dif. jednadžbe IV. reda.

METODA POČETNIH PARAMETARA



Odaberimo proizvoljnu točku na štapu i pretpostavimo da nam je to početak odakle mjerimo promjenu geometrijskih i fizikalnih veličina duž osi štapa, tj. u toj točci nam je x = 0 a veličine progiba ***y(x=0)=y₀***, kuta zaokreta ***y'(x=0)=y'₀***, momenta savijanja ***M(x=0)=M₀*** te poprečne sile ***T(x=0)=T₀*** poznate veličine.

(1) $y(x=0) = Asin(\alpha \cdot 0) + Bcos(\alpha \cdot 0) + C \cdot 0 + D = B + D = y_0$

(2) $y'(x=0) = \alpha Acos(\alpha \cdot 0) - \alpha Bsin(\alpha \cdot 0) + C = \alpha A + C = y'_0$

(3) $M(x=0) = -EI(-\alpha^2 Asin(\alpha \cdot 0) - \alpha^2 B\cos(\alpha \cdot 0)) = -EI \cdot (-\alpha^2 B) = M_0$

(4) $T(x=0) = -EI\big(y'''(x=0) + \alpha^2 y'(x=0)\big) = -EI\alpha^2 C = T_0$

Ako riješimo ove četiri jednadžbe s četiri nepoznanice (A, B, C i D), dobijemo da su

$$B = \frac{M_0}{\alpha^2 EI}, \quad C = -\frac{T_0}{\alpha^2 EI}, \quad D = y_0 - \frac{M_0}{\alpha^2 EI}, \quad A = \frac{y'_0}{\alpha} + \frac{T_0}{\alpha^3 EI}$$

Izrazimo sada veličine progiba, kuta zaokreta, momenta savijanja i poprečne sile u sljedećem proizvoljnom presjeku duž osi štapa – u nekoj točci X na način da u jednadžbe rješenja i derivacija rješenja uvrstimo prethodno izračunate koeficijente A, B, C i D.

$$y(x) = \left(\frac{y'_0}{\alpha} + \frac{T_0}{\alpha^3 EI}\right) sin\alpha x + \frac{M_0}{\alpha^2 EI} cos\alpha x - \frac{T_0}{\alpha^2 EI} x + y_0 - \frac{M_0}{\alpha^2 EI} =$$

$$= y_0 + y'_0 \frac{sin\alpha x}{\alpha} - M_0 \frac{1 - cos\alpha x}{\alpha^2 EI} - T_0 \frac{\alpha x - sin\alpha x}{\alpha^3 EI}$$

$$y'(x) = y'_0\, cos\alpha x - M_0 \frac{sin\alpha x}{\alpha EI} - T_0 \frac{1 - cos\alpha x}{\alpha^2 EI}$$

$$M(x) = \alpha EI y'_0\, sin\alpha x + M_0 cos\alpha x + T_0 \frac{sin\alpha x}{\alpha}$$

$$T(x) = T_0$$

Naravno, za početnu točku uvijek odabiremo točku u kojoj su nam neke od ovih veličina poznate a najčešće jednake nuli.

Primjena ovih jednadžbi predstavlja metodu početnih parametara koja dozvoljava uvlačenje u rješavanje skokovitih promjena kuta zaokreta (Δy'), poprečne sile (ΔT), momenta (ΔM) ili krutosti.

RJEŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PROGIBA 4. REDA S PRIPADAJUĆIM DERIVACIJAMA I VEZE S UNUTARNJIM SILAMA

Progib: $y(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Cx + D$

Kut zaokreta: $y'(x) = \alpha(A\cos\alpha x - B\sin\alpha x) + C$

$y''(x) = -\alpha^2 A\sin\alpha x - \alpha^2 B\cos\alpha x$;

$y'''(x) = -\alpha^3 A\cos\alpha x + \alpha^3 B\sin\alpha x$

Jednadžba momenata: $M(x) = -EIy''(x)$

Jednadžba posmika: $T(x) = -EIy'''(x) - Py'(x) = -EI\left(y''' + \alpha^2 y'\right)$

JEDNADŽBE METODE POČETNIH PARAMETARA

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{\alpha}\sin\alpha x - \frac{M_0}{\alpha^2 EI}(1-\cos\alpha x) - \frac{T_0}{\alpha^3 EI}(\alpha x - \sin\alpha x)$$

$$y'(x) = y_0'\cos\alpha x - \frac{M_0}{\alpha EI}\sin\alpha x - \frac{T_0}{\alpha^2 EI}(1-\cos\alpha x)$$

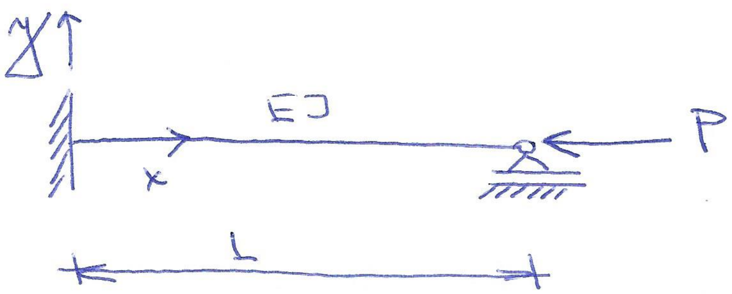
$$M(x) = -EIy''(x) = \alpha EIy_0'\sin\alpha x + M_0\cos\alpha x + \frac{T_0}{\alpha}\sin\alpha x$$

$$T(x) = -EI\left(y''' + \alpha^2 y'\right) = T_0$$

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
GRAĐEVINSKI I ARHITEKTONSKI FAKULTET OSIJEK
Republika Hrvatska - CROATIA
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE OSIJEK
HR 31000 Osijek, Vladimira Preloga 3 • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071
OIB: 04150850819 • Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

PRIMJER Nr. 1.

ISKUŠAJMO PRVO METODU POČETNIH PARAMETARA NA PRIMJERU KOJEG SMO VEĆ PRIJE RIJEŠILI, TJ. ČIJE RJEŠENJE NAM JE VEĆ POZNATO.



Rubni uvjeti:

$x = 0$: $y(x=0) = 0$
$y'(x=0) = 0$
$M(x=0) = M_0$
$T(x=0) = T_0$

$x = L$: $y(x=L) = 0$
$M(x=L) = 0$

Jednadžbe metode početnih parametara:

$$y(x) = \cancelto{0}{y_0} + \cancelto{0}{y_0'}\frac{\sin\alpha x}{\alpha} - M_0\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2 EJ} - T_0\frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^3 EJ}$$

$$y'(x) = \cancelto{0}{y_0'}\cos\alpha x - M_0\frac{\sin\alpha x}{\alpha EJ} - T_0\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2 EJ}$$

$$M(x) = \alpha EJ\cancelto{0}{y_0'}\sin\alpha x + M_0\cos\alpha x + T_0\frac{\sin\alpha x}{\alpha}$$

$$T(x) = T_0$$

HR 31000 Osijek, Vladimira Preloga 3 • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071
OIB: 04150850819 • Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

$$y(x) = -M_0 \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2 EJ} - T_0 \frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^3 EJ}$$

$$y'(x) = -M_0 \frac{\sin\alpha x}{\alpha EJ} - T_0 \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2 EJ}$$

$$M(x) = M_0 \cos\alpha x + T_0 \frac{\sin\alpha x}{\alpha}$$

$$T(x) = T_0$$

OD OVE ČETIRI JEDNADŽBE ODABERIMO ONE ČIJE RJEŠENJE NA KRAJU ŠTAPA TJ. ZA $x = L$ ZNAMO:

$$(1)\quad y(x=L)=\emptyset \qquad i \qquad (2)\quad M(x=L)=\emptyset .$$

$$(1)\quad y(x=L) = -M_0 \frac{1-\cos\alpha L}{\alpha^2 EJ} - T_0 \frac{\alpha L - \sin\alpha L}{\alpha^3 EJ} = \emptyset$$

$$(2)\quad M(x=L) = M_0 \cos\alpha L + T_0 \frac{\sin\alpha L}{\alpha} = \emptyset$$

U MATRIČNOM OBLIKU:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha L - 1}{\alpha^2 EJ} & \dfrac{\sin\alpha L - \alpha L}{\alpha^3 EJ} \\ \cos\alpha L & \dfrac{\sin\alpha L}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{Bmatrix}$$

UVJET NETRIVIJALNOG RJEŠENJA: $\det[\;] = \emptyset$

$$\det[\;] = \frac{\sin\alpha L}{\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha L - 1}{\alpha^2 EJ} - \cos\alpha L \cdot \frac{\sin\alpha L - \alpha L}{\alpha^3 EJ} =$$

$$= \frac{\sin\alpha L \cdot \cos\alpha L - \sin\alpha L}{\alpha^3 EJ} - \frac{\sin\alpha L \cos\alpha L - \alpha L \cos\alpha L}{\alpha^3 EJ} = \emptyset$$

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
GRAĐEVINSKI I ARHITEKTONSKI FAKULTET OSIJEK
Republika Hrvatska - CROATIA
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE OSIJEK
HR 31000 Osijek, Vladimira Preloga 3 • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071
OIB: 04150850819 • Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

$$\cancel{\sin\alpha L \cos\alpha L} - \sin\alpha L - \cancel{\sin\alpha L \cos\alpha L} + \alpha L \cos\alpha L = 0$$

$$\sin\alpha L = \alpha L \cos\alpha L \quad /: \cos\alpha L$$

$$\operatorname{tg}\alpha L = \alpha L$$

OVO JE VEĆ POZNATA JEDNADŽBA ČIJE JE RJEŠENJE

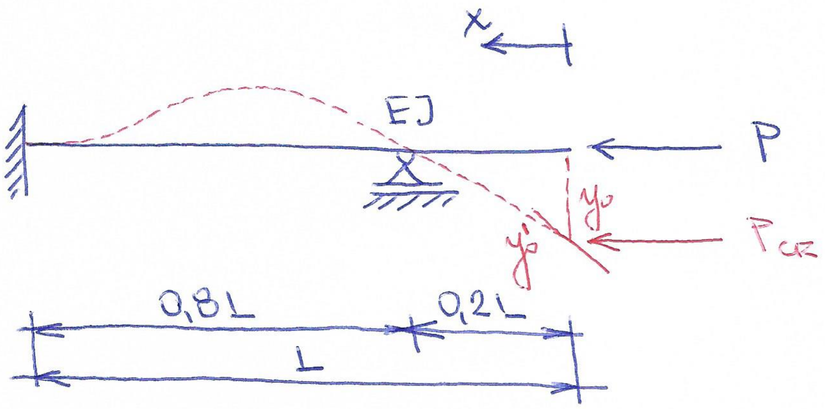
$$P_{cr} = \frac{20{,}2EJ}{L^2} \simeq \frac{2{,}05\pi^2 EJ}{L^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0{,}7L)^2}$$

IPAK, CILJ NAM JE ISKORISTITI OVU METODU NA PRIMJERU ZA KOJE JOŠ NE ZNAMO RJEŠENJE.

POGLEDAJMO ZATO PRIMJER 2.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK
Republika Hrvatska - CROATIA
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING OSIJEK
HR 31000 Osijek, Drinska 16a • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071 • OIB: 04150850819
Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

PRIMJER Nr. 2.



NAPOMENA: POČETAK ŠTAPA ($x=0$) POSTAVLJEN JE S DESNE STRANE (OVO JE PROIZVOLJNO).

Početni parametri, za $x=0$:

$$y(x=0)=y_0$$
$$y'(x=0)=y_0'$$
$$M(x=0)=0$$
$$T(x=0)=0$$

KRENIMO SADA OD POČETKA ŠTAPA PREMA NJEGOVOM KRAJU TJ. PREMA $x=L$ I DEFINIRAJMO VELIČINE KOJE SU NAM POZNATE:

(1) $y(x=0{,}2L)=0$

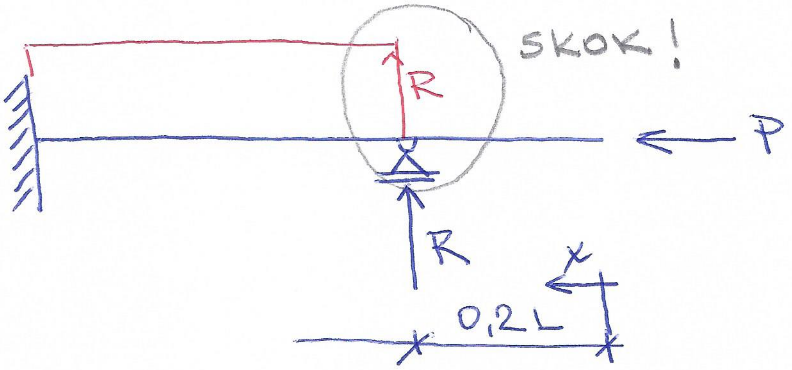
(2) $y(x=L)=0$

(3) $y'(x=L)=0$

UVRSTIMO OVO SVE U OSNOVNE JEDNADŽBE METODE POČETNIH PARAMETARA.

(1): $$y(x=0{,}2L) = y_0 + y_0' \frac{\sin 0{,}2\alpha L}{\alpha} = \emptyset$$

(2): NAPOMENA: DIJAGRAM POPREČNIH SILA:



$$y(x=L) = y_0 + y_0' \frac{\sin \alpha L}{\alpha} - \underbrace{R \cdot \frac{0{,}8\alpha L - \sin 0{,}8\alpha L}{\alpha^3 EJ}}_{} = \emptyset$$

SLIČNO KAO TO ALI NE DUŽ CIJELOG ŠTAPA VEĆ NA POTEZU OD 0,8L.

(3): $$y'(x=L) = y_0' \cos \alpha L - R \cdot \frac{1 - \cos 0{,}8\alpha L}{\alpha^2 EJ} = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin 0{,}2\alpha L}{\alpha} & \emptyset \\ 1 & \frac{\sin \alpha L}{\alpha} & \frac{\sin 0{,}8\alpha L - 0{,}8\alpha L}{\alpha^3 EJ} \\ \emptyset & \cos \alpha L & \frac{\cos 0{,}8\alpha L - 1}{\alpha^2 EJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{Bmatrix}$$

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK
Republika Hrvatska - CROATIA
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING OSIJEK
HR 31000 Osijek, Drinska 16a • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071 • OIB: 04150850819
Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

$$\det[\,] = \frac{\sin\alpha L}{\alpha}\cdot\frac{\cos 0{,}8\alpha L-1}{\alpha^2 EJ} - \cos\alpha L\,\frac{\sin 0{,}8\alpha L - 0{,}8\alpha L}{\alpha^3 EJ} -$$

$$-\frac{\sin 0{,}2\alpha L}{\alpha}\cdot\frac{\cos 0{,}8\alpha L-1}{\alpha^2 EJ} = \emptyset \quad /\cdot \alpha^3 EJ$$

$$\sin\alpha L\cdot\cos 0{,}8\alpha L - \sin\alpha L - \sin 0{,}8\alpha L\cdot\cos\alpha L + 0{,}8\alpha L\cdot\cos\alpha L -$$

$$-\sin 0{,}2\alpha L\cdot\cos 0{,}8\alpha L + \sin 0{,}2\alpha L = \emptyset$$

OVU TRANSCENDENTALNU JEDNADŽBU RIJEŠIT ĆEMO METODOM POKUŠAJA I POGREŠKE TJ. TRAŽIMO NUL TOČKU FUNKCIJE:

$$f(u) = \sin u\cdot\cos 0{,}8u - \sin u - \sin 0{,}8u\cdot\cos u + 0{,}8u\cdot\cos u -$$

$$-\sin 0{,}2u\cdot\cos 0{,}8u + \sin 0{,}2u$$

GDJE JE $u = \alpha L$.

Iz Excel-a:

u	$f(u)$
∅	∅
1	−0,1503
2	−0,7849
3	−0,9714
4	0,8159
3,69	0,0086

$$\alpha L = 3{,}69 \Rightarrow \alpha = \frac{3{,}69}{L}$$

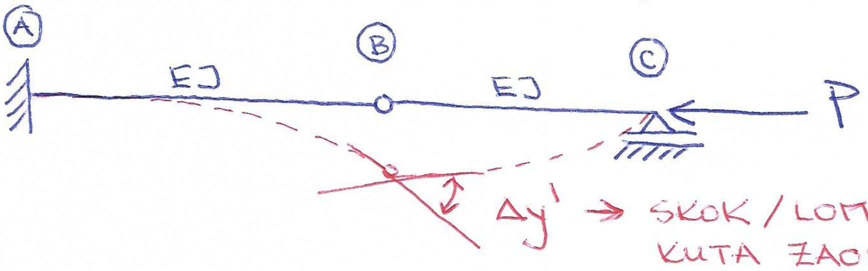
$$\alpha^2 = \frac{13{,}62}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EJ}$$

$$P_{cr} = \frac{13{,}62\,EJ}{L^2} = \frac{1{,}38\pi^2 EJ}{L^2}$$

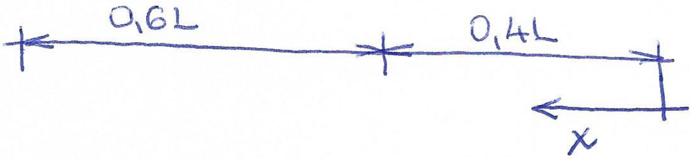
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK
Republika Hrvatska - CROATIA
Josip Juraj Strossmayer University of Osijek • FACULTY OF CIVIL ENGINEERING OSIJEK
HR 31000 Osijek, Drinska 16a • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071 • OIB: 04150850819
Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

PRIMJER Nr. 3.

STABILNOST ŠTAPA S UNUTARNJIM ZGLOBOM:



$\Delta y'$ → SKOK / LOM U JEDNAŽBI KUTA ZAKRETA



Početni parametri (za $x = \emptyset$):

$$y(x=\emptyset) = \emptyset$$
$$y'(x=\emptyset) = y'_0$$
$$M(x=\emptyset) = \emptyset$$
$$T(x=\emptyset) = T_0$$

POZNATI RUBNI/PRIJELAZNI UVJETI:

(1) $M(x = 0{,}4L) = \emptyset$

(2) $y(x = L) = \emptyset$

(3) $y'(x = L) = \emptyset$

$$(1)\quad M(x=0{,}4L) = \alpha EJ\, y'_0 \sin 0{,}4\alpha L + T_0 \frac{\sin 0{,}4\alpha L}{\alpha} = \emptyset$$

$$(2)\quad y(x=L) = y'_0 \frac{\sin\alpha L}{\alpha} - T_0 \frac{\alpha L - \sin\alpha L}{\alpha^3 EJ} + \Delta y' \frac{\sin 0{,}6\alpha L}{\alpha} = \emptyset$$

$$(3)\quad y'(x=L) = y'_0 \cos\alpha L - T_0 \frac{1-\cos\alpha L}{\alpha^2 EJ} + \Delta y' \cos 0{,}6\alpha L = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} \alpha EJ \sin 0{,}4\alpha L & \dfrac{\sin 0{,}4\alpha L}{\alpha} & \phi \\ \dfrac{\sin \alpha L}{\alpha} & \dfrac{\sin \alpha L - \alpha L}{\alpha^3 EJ} & \dfrac{\sin 0{,}6\alpha L}{\alpha} \\ \cos \alpha L & \dfrac{\cos \alpha L - 1}{\alpha^2 EJ} & \cos 0{,}6\alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0' \\ T_0 \\ \Delta y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix}$$

Uvjet rješenja: $\det[\ ] = \phi$

$$\alpha EJ \sin 0{,}4\alpha L \left(\frac{\sin \alpha L - \alpha L}{\alpha^3 EJ} \cdot \cos 0{,}6\alpha L - \frac{\cos \alpha L - 1}{\alpha^2 EJ} \cdot \frac{\sin 0{,}6\alpha L}{\alpha} \right) -$$

$$- \frac{\sin 0{,}4\alpha L}{\alpha} \left(\frac{\sin \alpha L}{\alpha} \cdot \cos 0{,}6\alpha L - \frac{\sin 0{,}6\alpha L}{\alpha} \cdot \cos \alpha L \right) = \phi$$

$$\cancel{\alpha EJ} \sin 0{,}4\alpha L \cdot \frac{\sin \alpha L \cdot \cos 0{,}6\alpha L - \alpha L \cos 0{,}6\alpha L - \sin 0{,}6\alpha L \cdot \cos \alpha L + \sin 0{,}6\alpha L}{\alpha^{\cancel{3}2} \cancel{EJ}}$$

$$- \frac{\sin 0{,}4\alpha L}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha L \cos 0{,}6\alpha L - \sin 0{,}6\alpha L \cos \alpha L}{\alpha} = \phi \quad / \cdot \alpha^2$$

$$\sin \cancel{0{,}4\alpha L \cdot \sin \alpha L} \cdot \cos 0{,}6\alpha L - \alpha L \sin 0{,}4\alpha L \cos 0{,}6\alpha L -$$

$$- \sin \cancel{0{,}4\alpha L \sin 0{,}6\alpha L} \cos \alpha L + \sin 0{,}4\alpha L \sin 0{,}6\alpha L -$$

$$- \sin \cancel{0{,}4\alpha L \sin \alpha L} \cos 0{,}6\alpha L + \sin 0{,}4\alpha L \cancel{\sin 0{,}6\alpha L} \cos \alpha L = \phi$$

$$\sin 0{,}4\alpha L \sin 0{,}6\alpha L - \alpha L \sin 0{,}4\alpha L \cos 0{,}6\alpha L = \phi$$

HR 31000 Osijek, Drinska 16a • Tel. +385 (0)31 274 377, +385 (0)31 540 070 • Fax: +385 (0)31 274 444, +385 (0)31 540 071 • OIB: 04150850819
Poslovna banka: Addiko Bank d.d., IBAN: HR0425000091102002438, BIC (SWIFT kod): HAABHR22

$$\sin 0{,}4\alpha L \left(\sin 0{,}6\alpha L - \alpha L \cos 0{,}6\alpha L\right) = 0$$

I. rješenje: $\sin 0{,}4\alpha L = 0 \Rightarrow 0{,}4\alpha L = n\pi$

za $n=1$: $\alpha = \dfrac{\pi}{0{,}4L}$, $\alpha^2 = \dfrac{\pi^2}{(0{,}4L)^2} = \dfrac{P_{cr}}{EJ}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0{,}4L)^2} = \frac{61{,}69EJ}{L^2}$$

– što je i razumljivo, naime štap $\overline{BC}$ duljine 0,4L jeste obostrano zglobno oslonjena greda

II. rješenje: $\sin 0{,}6\alpha L - \alpha L \cos 0{,}6\alpha L = 0$, $u = \alpha L$

$$f(u) = \sin 0{,}6u - u \cdot \cos 0{,}6u$$

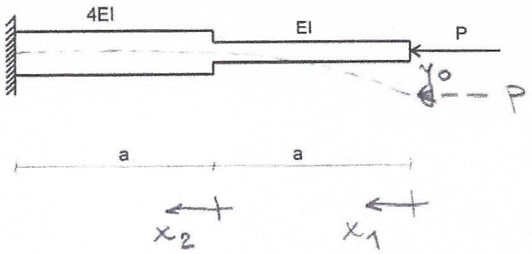
u	$f(u)$
0	0
1	-0,2607
2	0,2073
1,5	-0,1491
1,755	0,0002

$$\alpha^2 = \frac{3{,}08}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EJ}$$

$$P_{cr} = \frac{3{,}08EJ}{L^2}$$ ✓

$$\alpha = \frac{1{,}755}{L}$$

4. Odredite kritičnu silu konzole duljine ***2a*** promjenjive krutosti, metodom početnih parametara.



$$\alpha_1^2 = \frac{P}{EJ} \equiv \alpha^2 \quad ; \quad \alpha_2^2 = \frac{P}{4EJ} = 0{,}5\alpha$$

$$0 \le x_1 \le a$$

$$y(x_1 = a) = y_a = y_0 + y_0' \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1}$$

$$y'(x_1 = a) = y_a' = y_0' \cos \alpha_1 a$$

$$M(x_1 = a) = M_a = \alpha_1 EJ\, y_0' \sin \alpha_1 a$$

$$T(x_1 = a) = T_0 = \emptyset$$

$$0 \le x_2 \le a$$

$$y(x_2 = a) = y_a + y_a' \frac{\sin \alpha_2 a}{\alpha_2} - M_a \frac{1 - \cos \alpha_2 a}{\alpha_2^2 \cdot 4EJ} = \emptyset$$

$$y'(x_2 = a) = y_a' \cos \alpha_2 a - M_a \frac{\sin \alpha_2 a}{\alpha_2 \cdot 4EJ} = \emptyset$$

$$y(x_2 = a) = y_0 + y_0' \frac{\sin \alpha a}{\alpha} + y_0' \cos \alpha a \cdot \frac{\sin 0{,}5\alpha a}{0{,}5\alpha} -$$

$$- EJ\alpha\, y_0' \sin \alpha a \cdot \frac{1 - \cos 0{,}5\alpha a}{4EJ \cdot (0{,}5\alpha)^2} = \emptyset$$

$$y'(x_2 = a) = y_0' \cos \alpha a \cdot \cos 0{,}5\alpha a - EJ\alpha\, y_0' \sin \alpha a \frac{\sin 0{,}5\alpha a}{0{,}5\alpha \cdot 4EJ} = \emptyset$$

$$y_0 + y_0' \frac{\sin \alpha a}{\alpha} + y_0' \cos \alpha a \cdot \frac{\sin 0{,}5 \alpha a}{0{,}5 \alpha} -$$

$$- y_0' \sin \alpha a \cdot \frac{1 - \cos 0{,}5 \alpha a}{\alpha} = \emptyset \qquad (1)$$

$$y_0' \cos \alpha a \cdot \cos 0{,}5 \alpha a - y_0' \sin \alpha a \cdot \frac{\sin 0{,}5 \alpha a}{2} = \emptyset \qquad (2)$$

Iz jednadžbe (2) slijedi:

$$y_0' (2 \cos \alpha a \cos 0{,}5 \alpha a - \sin \alpha a \cdot \sin 0{,}5 \alpha a) = \emptyset$$

$$2 \cos \alpha a \cdot \cos 0{,}5 \alpha a - \sin \alpha a \cdot \sin 0{,}5 \alpha a = \emptyset$$

supstitucija: $u = \alpha a$

$$f(u) = 2 \cos u \cdot \cos 0{,}5 u - \sin u \cdot \sin 0{,}5 u = \emptyset$$

Metodom pokušaja: $u = 1{,}231$

$$\alpha = \frac{1{,}231}{a} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EJ}} \Big/^{2}$$

$$P_{cr} = \frac{1{,}52\, EJ}{a^2}$$