

Kinematika u dvije dimenzije

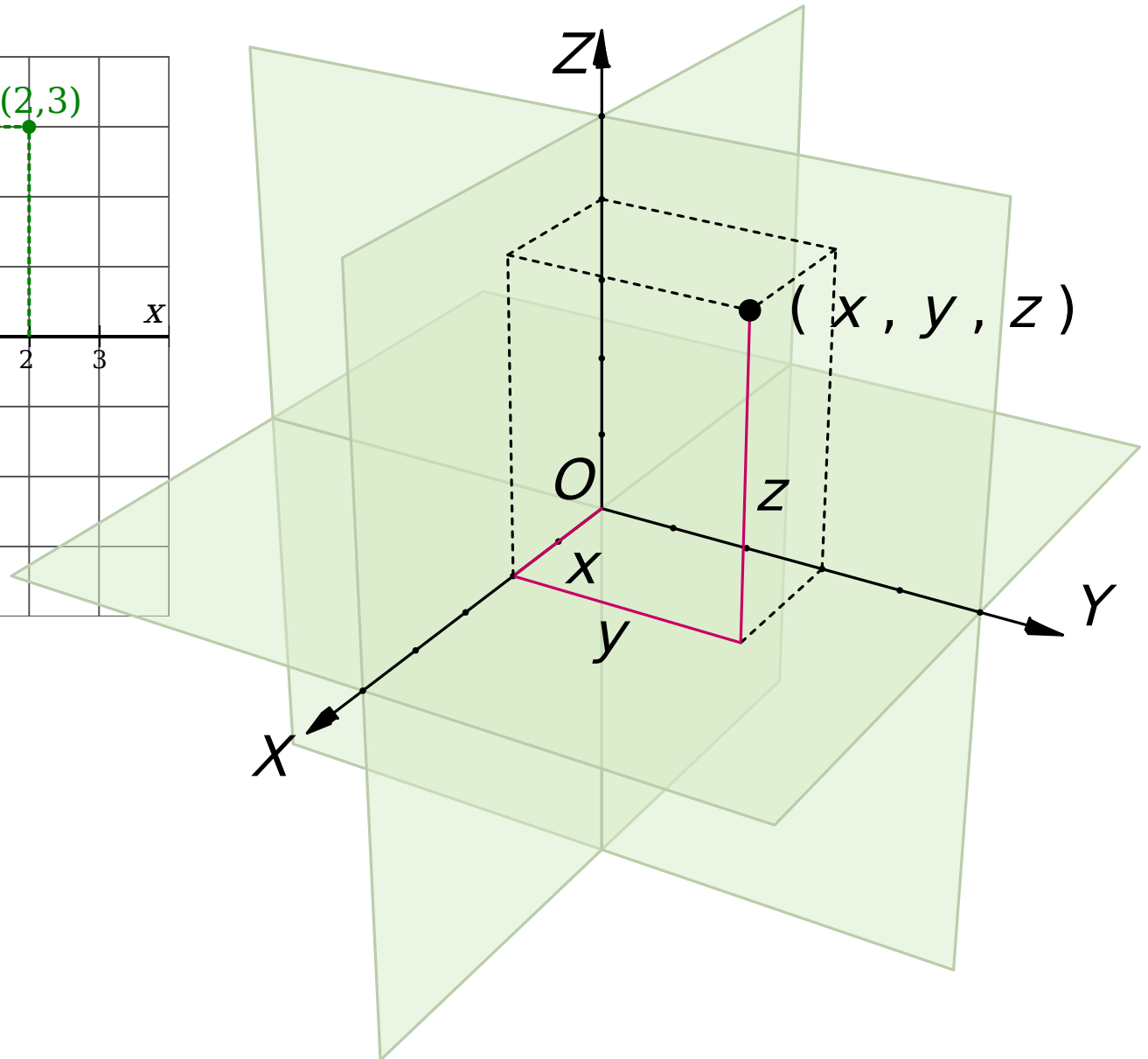
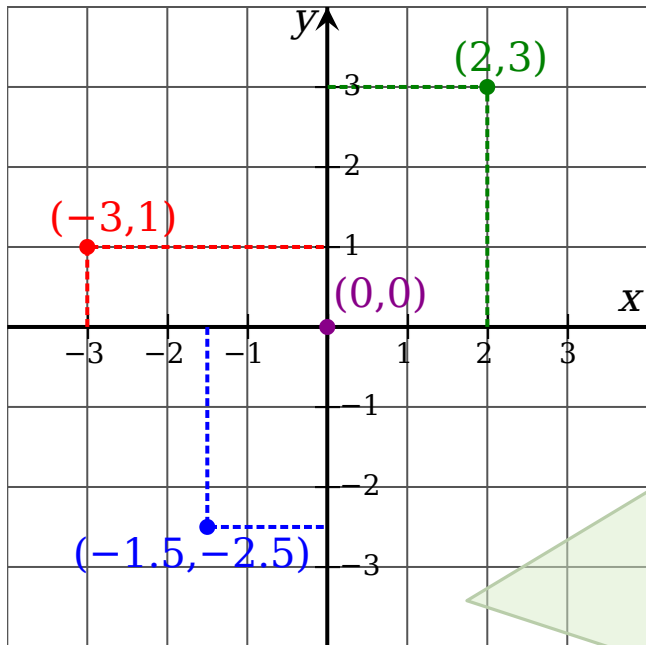
**FIZIKA
PSS-GRAD
14. listopada 2025.**



WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI I

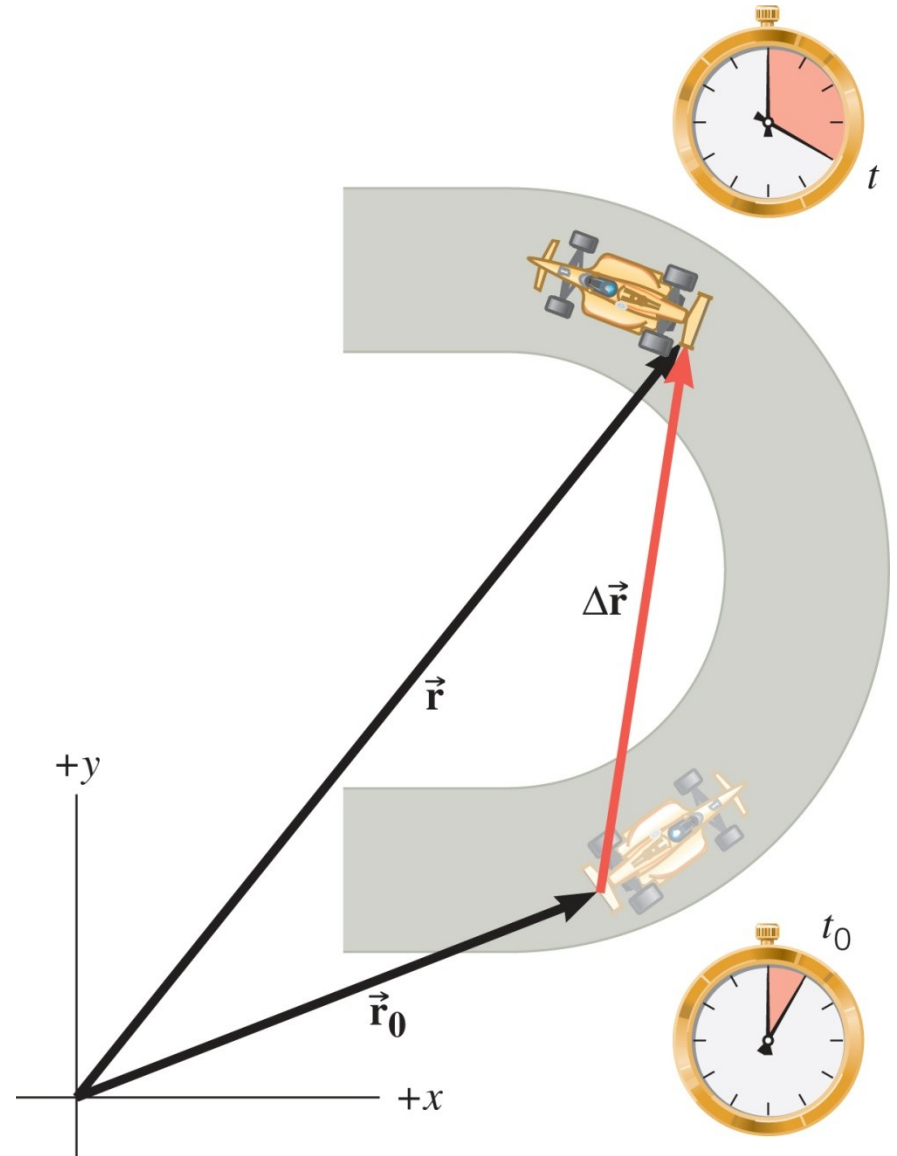


3.1 Pomak, brzina i ubrzanje

$\vec{r}_0$ = početni položaj

$\vec{r}$ = konačni položaj

$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ = pomak

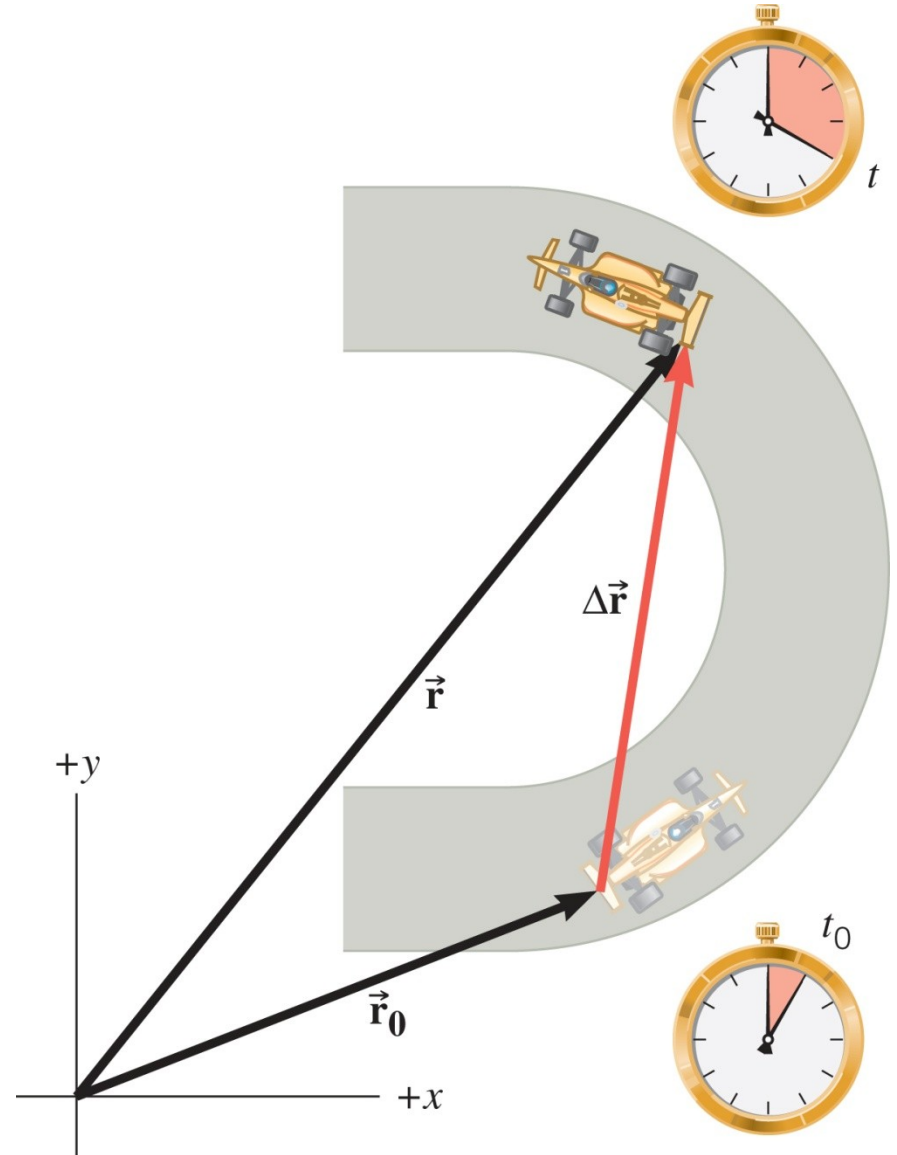


WILEY

3.1 Pomak, brzina i ubrzanje

Prosječna brzina je pomak podijeljen s proteklim vremenom

$$\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



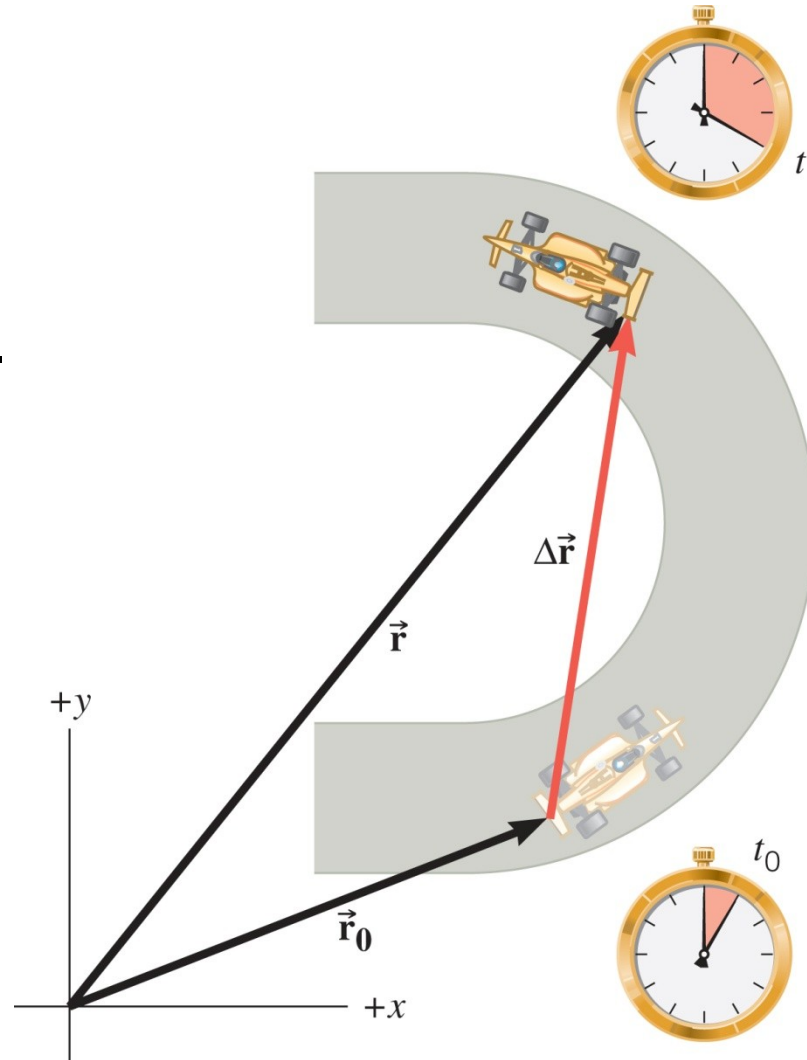
WILEY

3.1 Pomak, brzina i ubrzanje

Trenutačna brzina pokazuje koliko se brzo i u kojem smjeru objekt giba, u svakom pojedinom trenutku.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

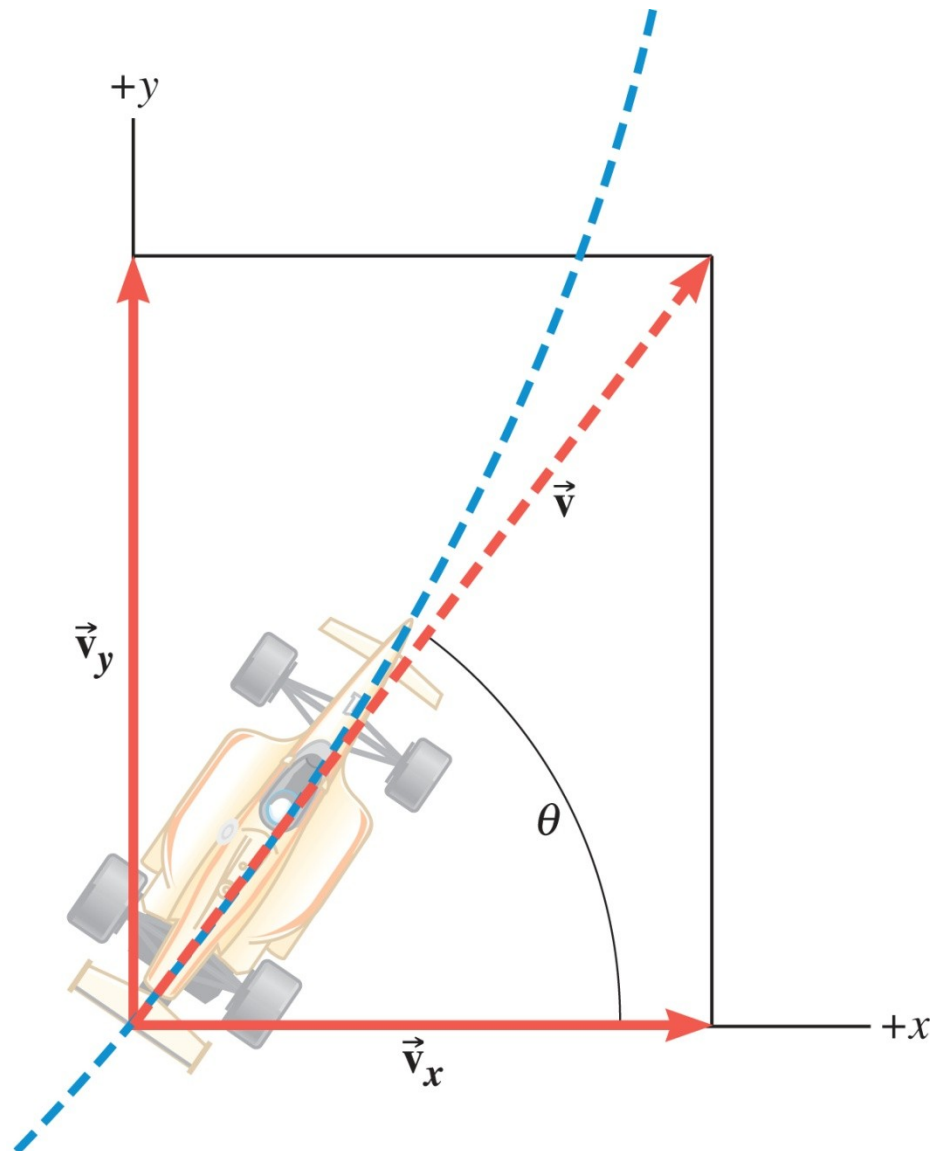
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$



WILEY

3.1 Pomak, brzina i ubrzanje

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



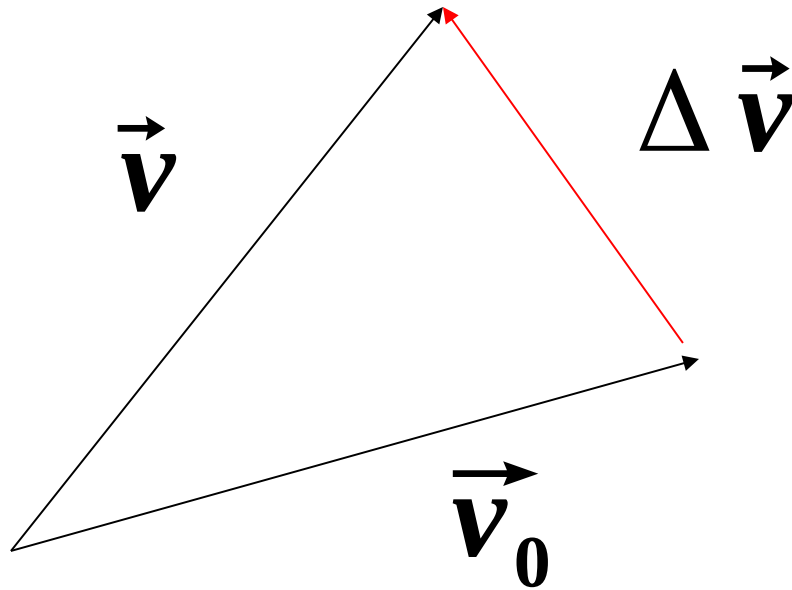
WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

3.1 Pomak, brzina i ubrzanje

DEFINICIJA PROSJEČNE AKCELERACIJE

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

Jednadžbe kinematike

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{0x} + \mathbf{a}_x t$$

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_{0y} + \mathbf{a}_y t$$

$$x = \frac{\mathbf{v}_{0x} + \mathbf{v}_x}{2} t$$

$$y = \frac{\mathbf{v}_{0y} + \mathbf{v}_y}{2} t$$

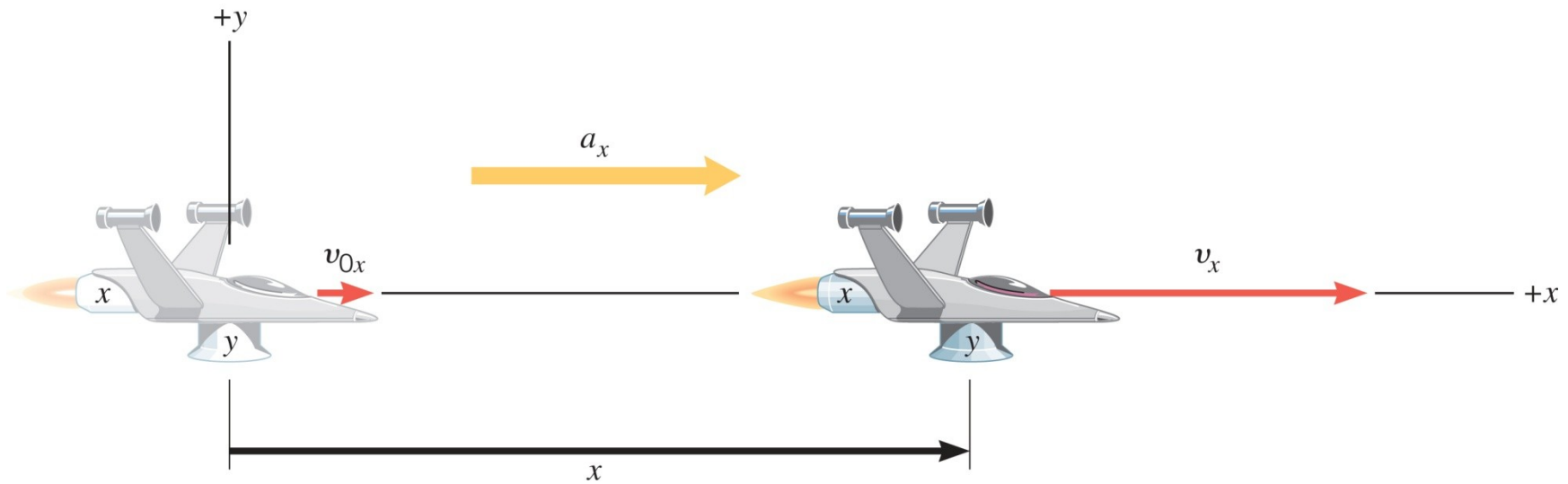
$$\mathbf{v}_x^2 = \mathbf{v}_{0x}^2 + 2 \mathbf{a}_x x$$

$$\mathbf{v}_y^2 = \mathbf{v}_{0y}^2 + 2 \mathbf{a}_y y$$

$$x = \mathbf{v}_{0x} t + \frac{\mathbf{a}_x}{2} t^2$$

$$y = \mathbf{v}_{0y} t + \frac{\mathbf{a}_y}{2} t^2$$

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*



$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

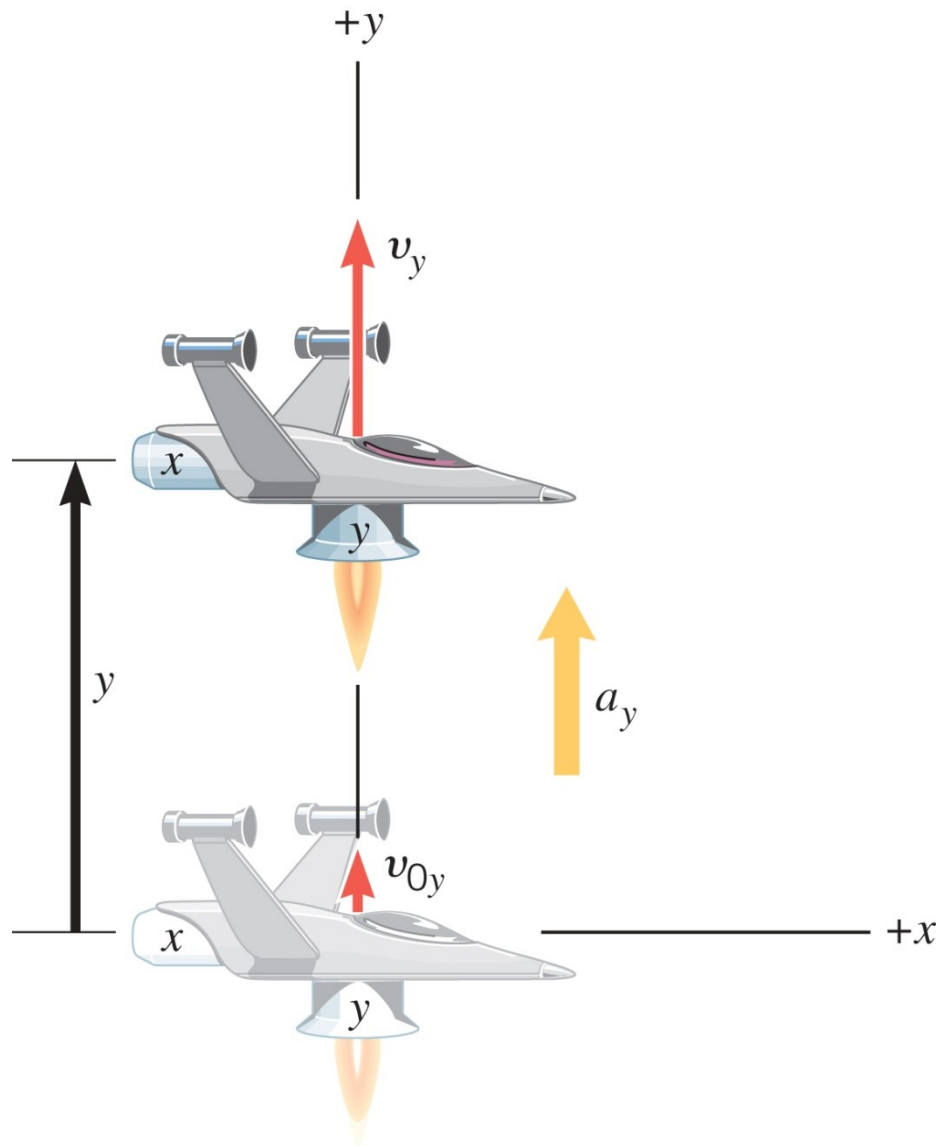
$$x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$$

$$x = v_{0x} t + \frac{a_x}{2} t^2$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2 a_x x$$

WILEY

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*



$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

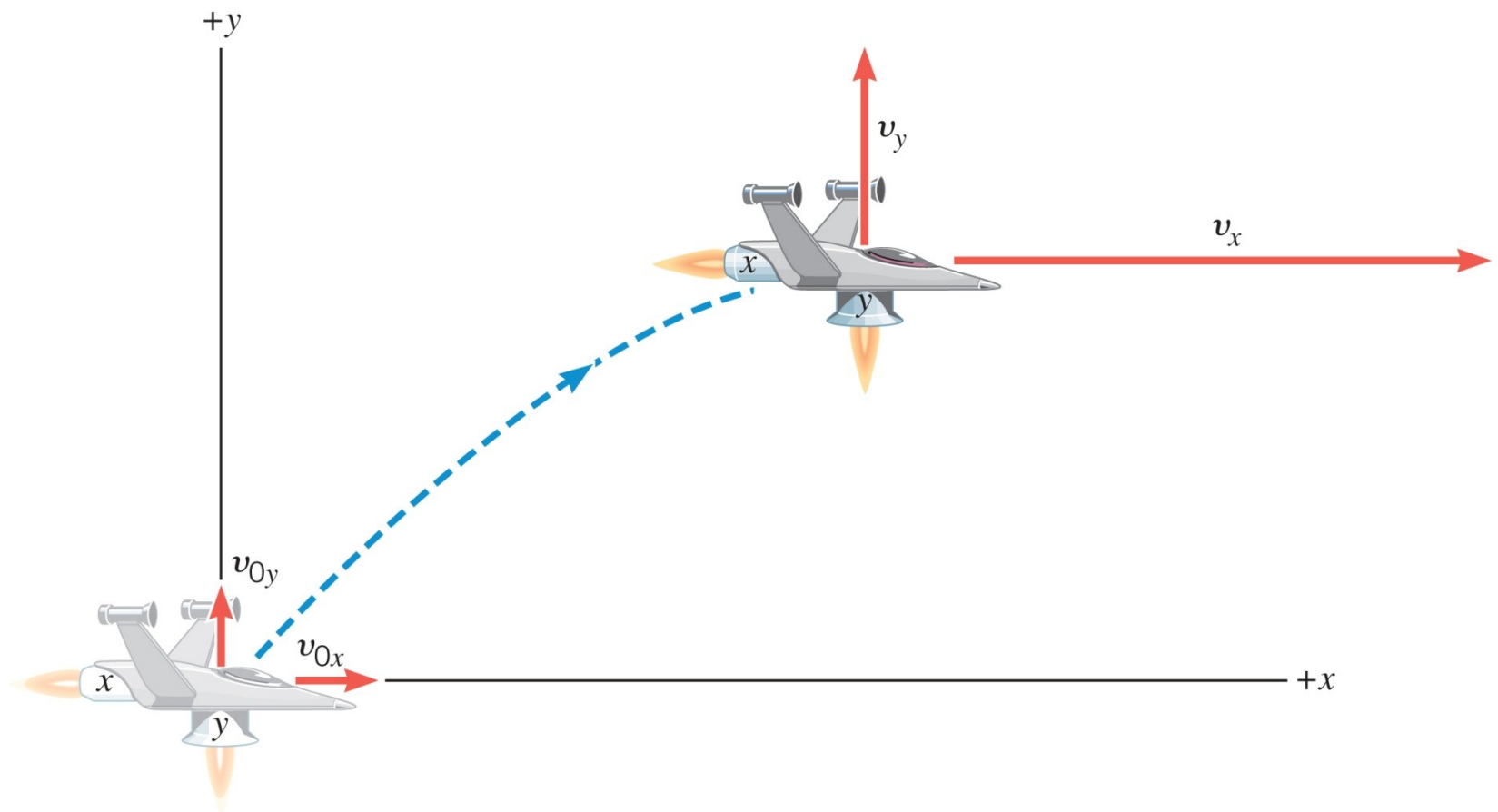
$$y = \frac{v_{0y} + v_y}{2} t$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 a_y y$$

$$y = v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2$$

WILEY

3.2 Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije



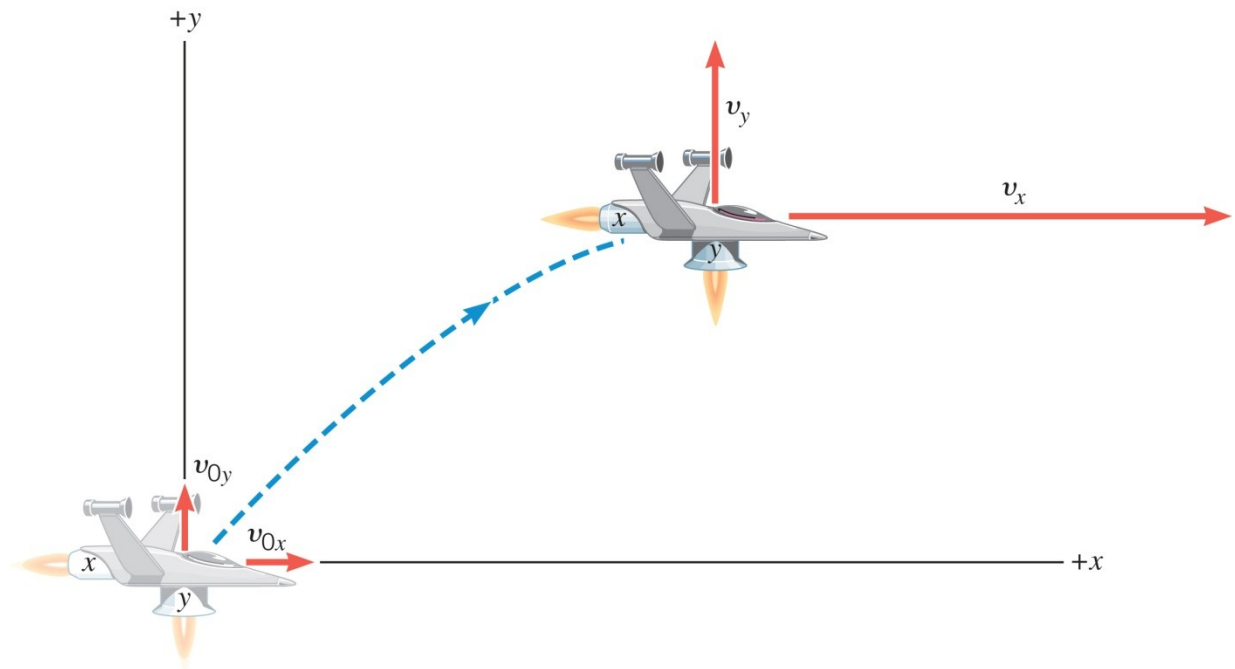
Gibanje u x -smjeru odvija se kao da uopće ne postoji gibanje u y -smjeru, i obrnuto.

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

Primjer 1 Gibanje svemirske letjelice

U smjeru x , letjelica ima komponentu početne brzine $+22 \text{ m/s}$ i komponentu početne akceleracije $+24 \text{ m/s}^2$. U smjeru y , analogne veličine su $+14 \text{ m/s}$ i $+12 \text{ m/s}^2$. Nakon $7,0 \text{ s}$ gibanja odredite:

- (a) x i v_x
- (b) y i v_y
- (c) brzinu letjelice.



3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

Strategija za rješavanje kinematičkih problema

1. Napravite skicu.
2. Odaberite pozitivnu (+) i negativnu (-) orijentaciju.
3. Od pet kinematičkih varijabli, zapišite one vrijednosti koje su zadane.
4. Provjerite jesu li poznate barem tri vrijednosti od pet kinematičkih varijabli. Identificirajte nepoznanice i odaberite odgovarajuće jednadžbe.
5. Kad je gibanje podijeljeno u segmente, uzmite u obzir da konačna brzina jednog segmenta odgovara početnoj brzini drugog segmenta.
6. Ne zaboravite da možda postoje dva rješenja problema.

WILEY

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

Primjer 1 Gibanje svemirske letjelice

U smjeru x , letjelica ima komponentu početne brzine $+22 \text{ m/s}$ i komponentu početne akceleracije $+24 \text{ m/s}^2$. U smjeru y , analogne veličine su $+14 \text{ m/s}$ i $+12 \text{ m/s}^2$. Nakon $7,0 \text{ s}$ gibanja odredite: (a) x i v_x ; (b) y i v_y ; (c) brzinu letjelice.

x	a_x	v_x	v_{ox}	t
?	$+24,0 \text{ m/s}^2$	?	$+22 \text{ m/s}$	$7,0 \text{ s}$

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
?	$+12,0 \text{ m/s}^2$	?	$+14 \text{ m/s}$	$7,0 \text{ s}$

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

x	a_x	v_x	v_{0x}	t
?	+24,0 m/s ²	?	+22 m/s	7,0 s

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x}{2}t^2$$

$$x = 22 \text{ m/s} \cdot 7,0 \text{ s} + \frac{24 \text{ m/s}^2}{2} (7,0 \text{ s})^2 = 740 \text{ m}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_x = 22 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}^2 \cdot 7,0 \text{ s} = 190 \text{ m/s}$$

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
?	+12,0 m/s ²	?	+14 m/s	7,0 s

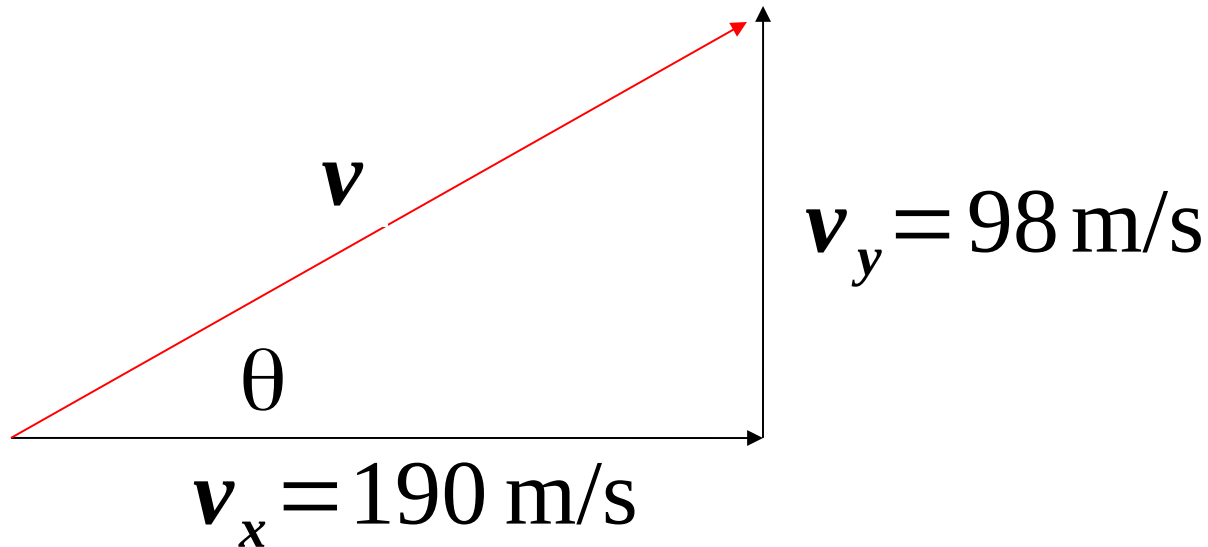
$$y = v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2$$

$$y = 14 \text{ m/s} \cdot 7,0 \text{ s} + \frac{12 \text{ m/s}^2}{2} (7,0 \text{ s})^2 = 390 \text{ m}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$v_y = 14 \text{ m/s} + 12 \text{ m/s}^2 \cdot 7,0 \text{ s} = 98 \text{ m/s}$$

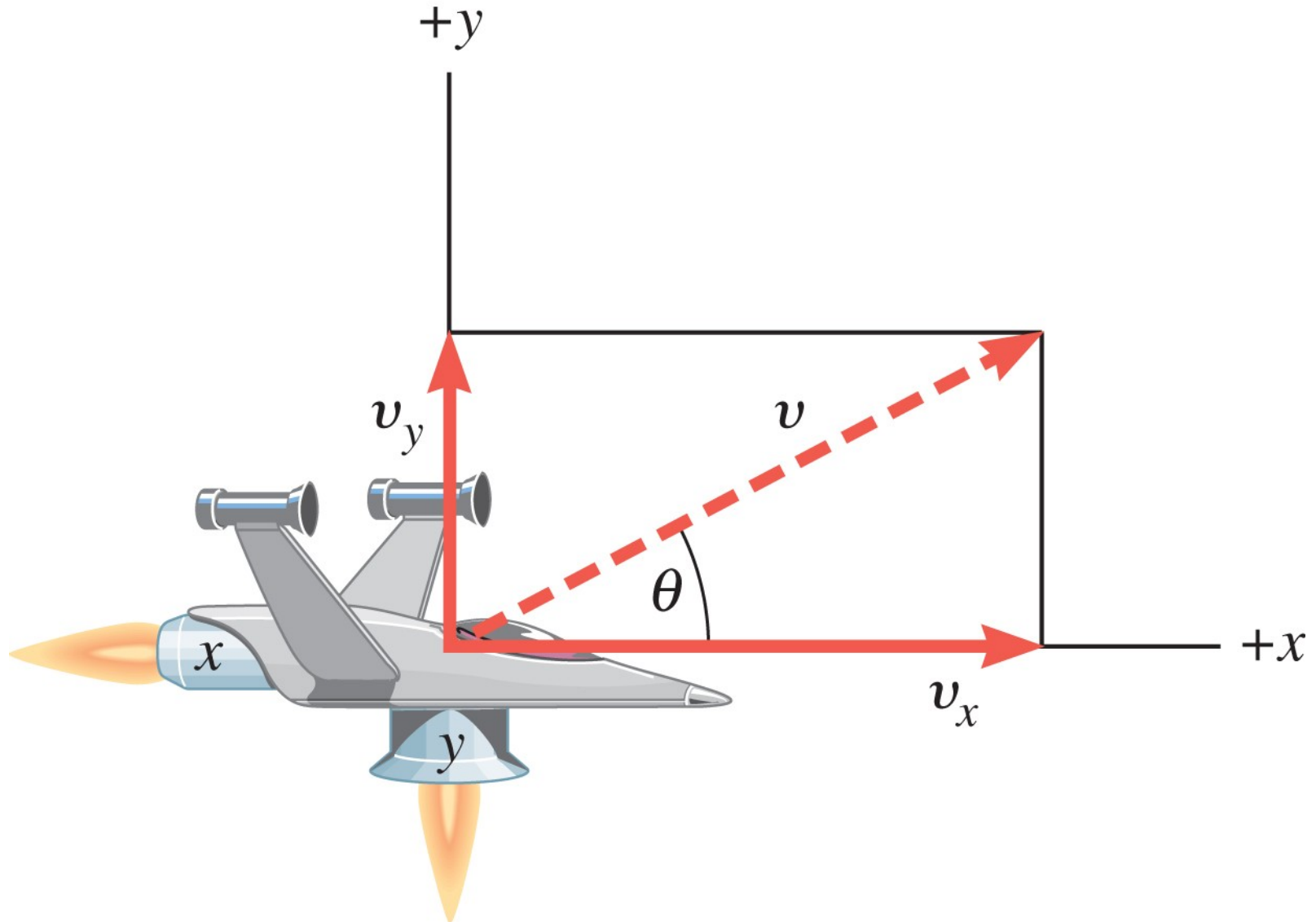
3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*



$$v = \sqrt{(190 \text{ m/s})^2 + (98 \text{ m/s})^2} = 210 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{98}{190}\right) = 27^\circ$$

3.2 *Jednadžbe kinematike u dvije dimenzije*



WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

3.3 Gibanje projektila

Ako na objekt u blizini Zemljine površine djeluje samo gravitacija, on pada prema dolje ubrzanjem $9,80 \text{ m/s}^2$.

$$a_y = -9,8 \text{ m/s}^2 \qquad a_x = 0$$

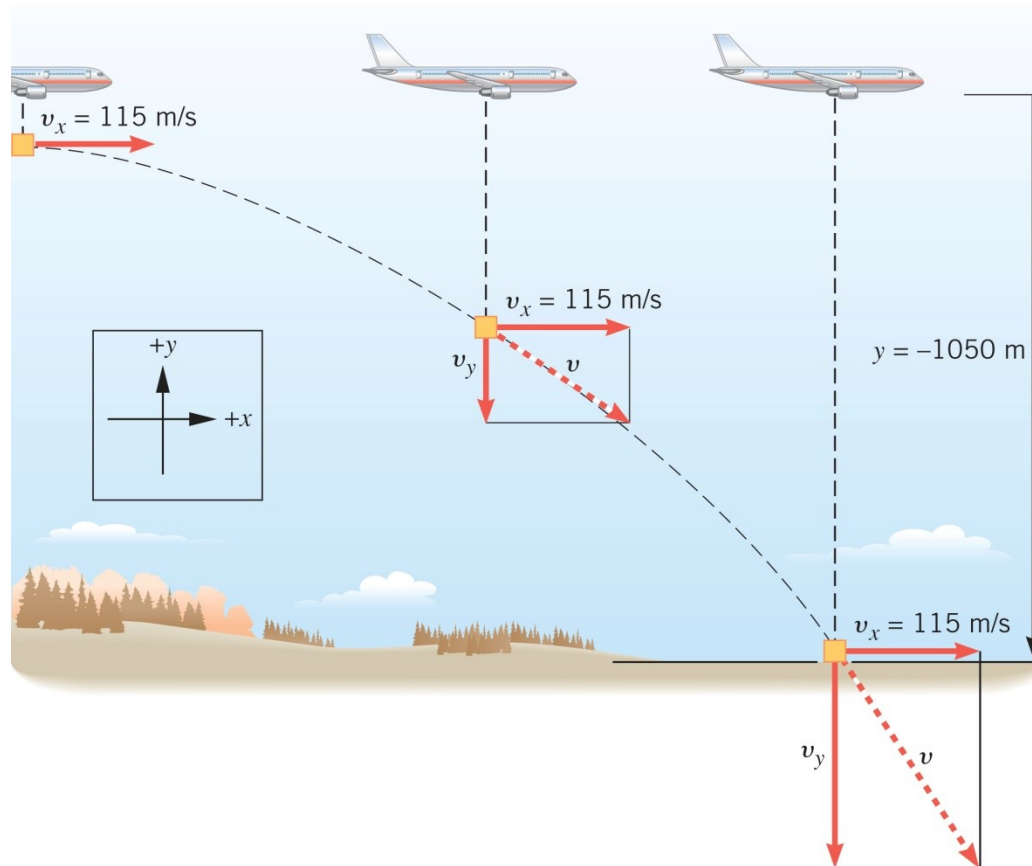


$$v_x = v_{0x} = \text{const}$$

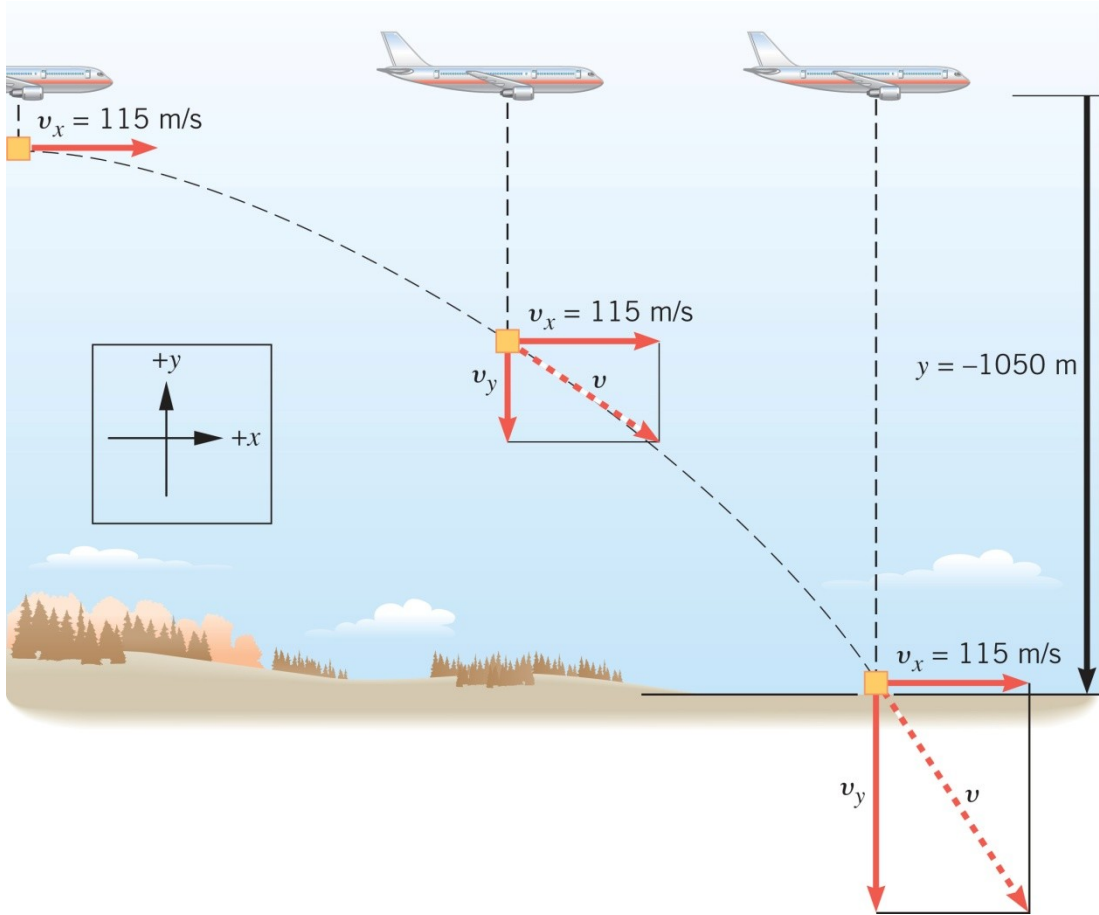
3.3 Gibanje projektila

Primjer 3 Paket koji pada

Avion se giba u vodoravnom smjeru konstantnom brzinom $+115 \text{ m/s}$, na visini 1050 m . Odredite vrijeme za koje će ispušteni paket pasti na tlo.



3.3 Gibanje projektila



y	a_y	v_y	v_{oy}	t
-1050 m	-9,80 m/s ²		0 m/s	?

3.3 Gibanje projektila

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
-1050 m	-9,80 m/s ²		0 m/s	?

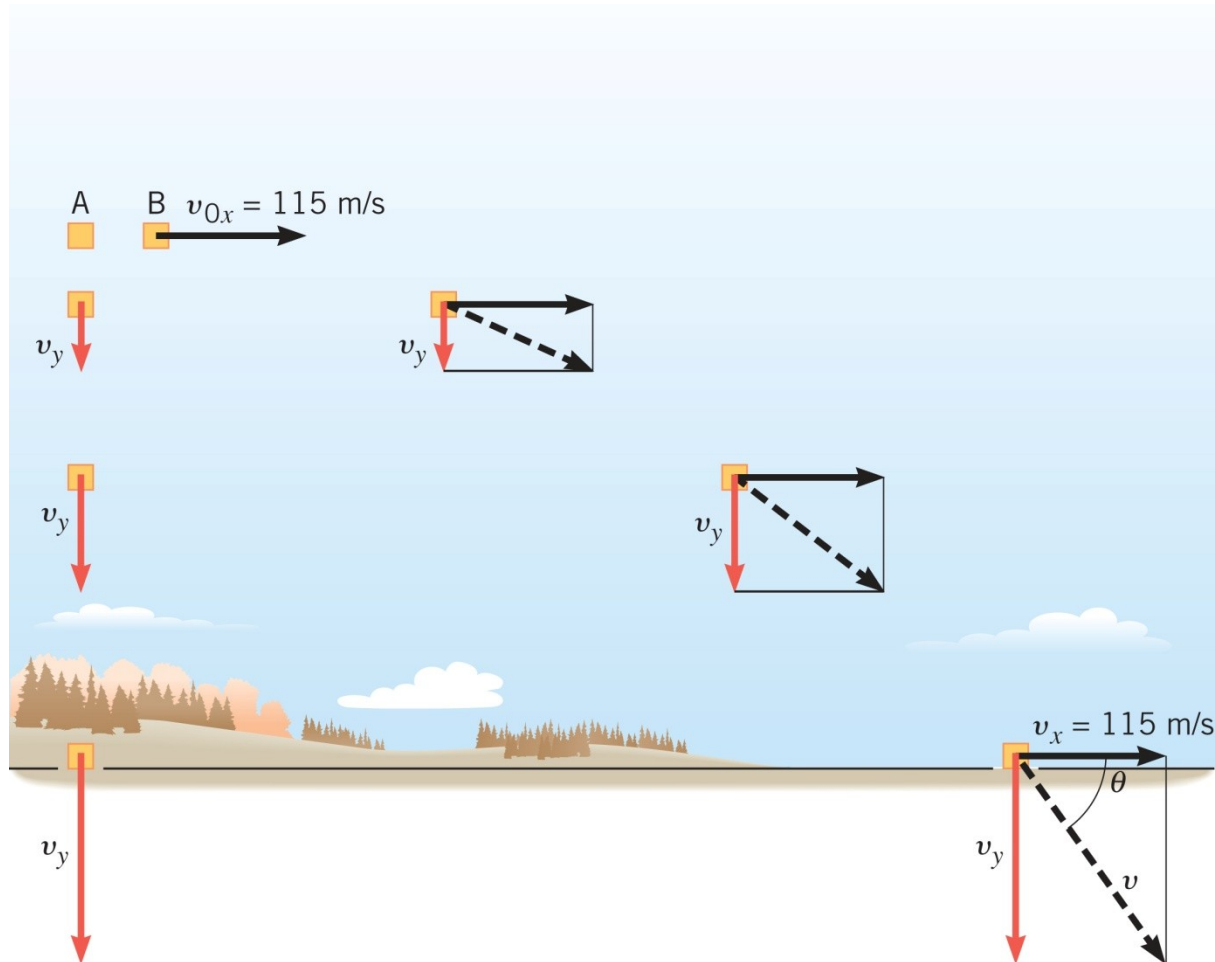
$$y = v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{a_y}{2} t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{a_y}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1050 \text{ m})}{-9,8 \text{ m/s}^2}} = 14,6 \text{ s}$$

3.3 Gibanje projektila

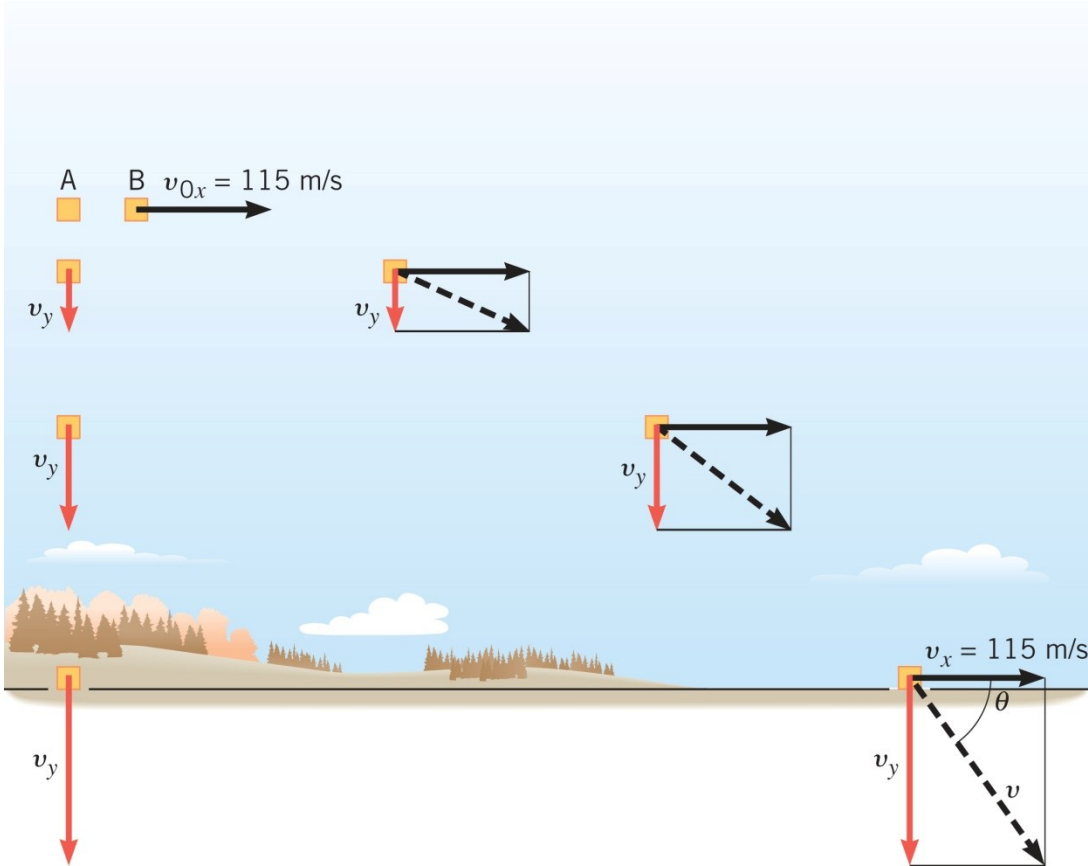
Primjer 4 Brzina paketa

Odredite iznos i smjer konačne brzine paketa.



WILEY

3.3 Gibanje projektila



y	a_y	v_y	v_{oy}	t
-1050 m	-9,80 m/s ²	?	0 m/s	14,6 s

3.3 Gibanje projektila

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
-1050 m	-9,80 m/s ²	?	0 m/s	14,6 s

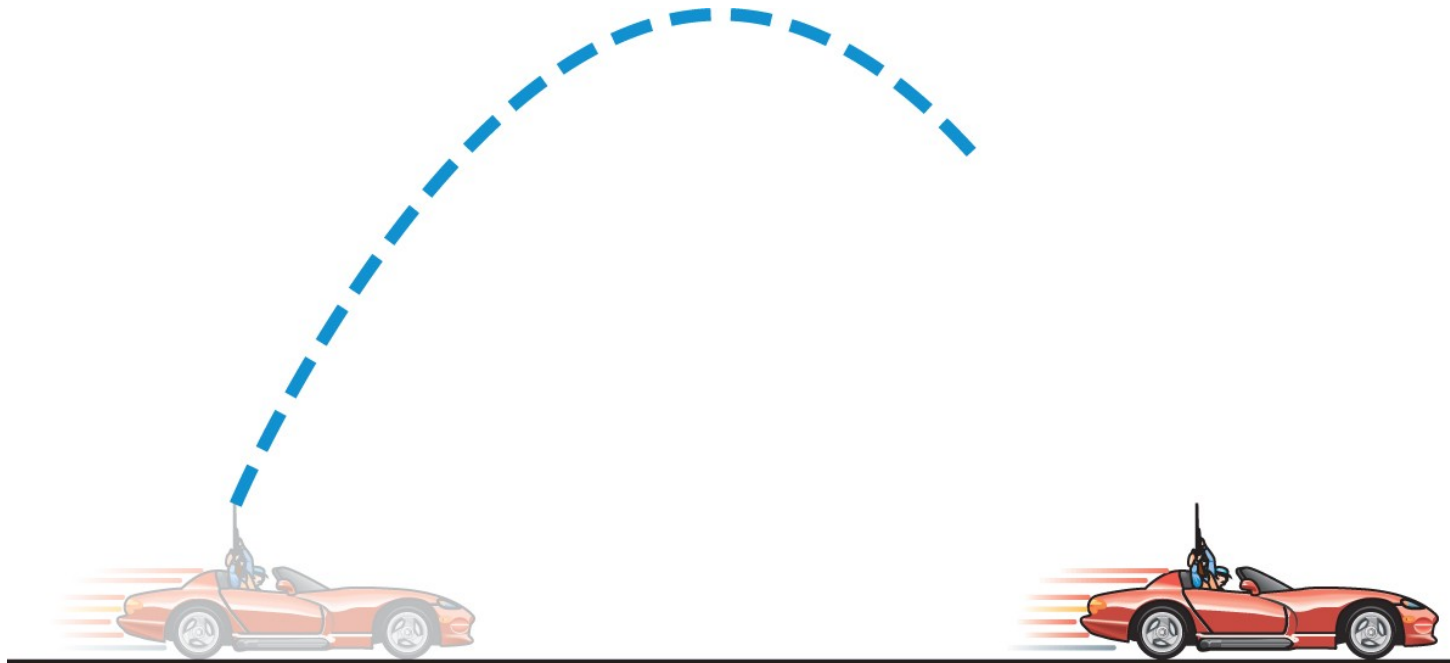
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$v_y = 0 + (-9,8 \text{ m/s}^2) \cdot 14,6 \text{ s} = -143 \text{ m/s}$$

3.3 Gibanje projektila

Konceptualni primjer 5 Ispaljujem hitac u zrak...

Pretpostavimo da vozite kabriolet sa spuštenim krovom. Auto se giba stalnom brzinom, a vi opalite okomito u zrak. Gdje će pasti tane (ako je otpor zraka zanemariv) - iza vas, ispred vas ili natrag u puščanu cijev?

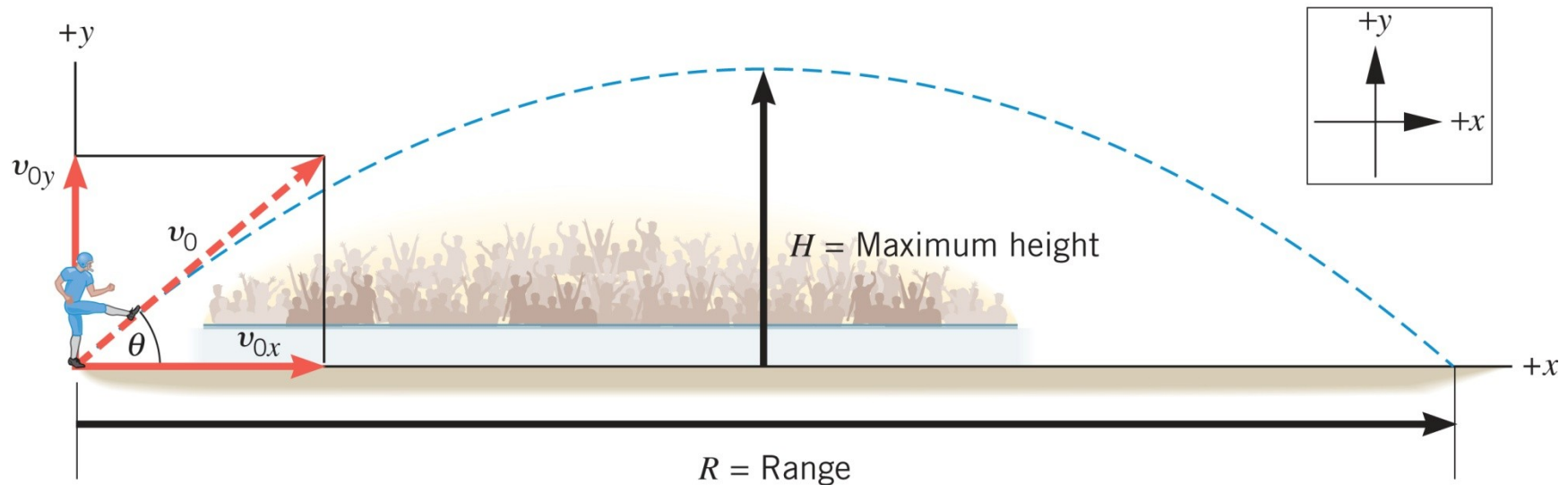


WILEY

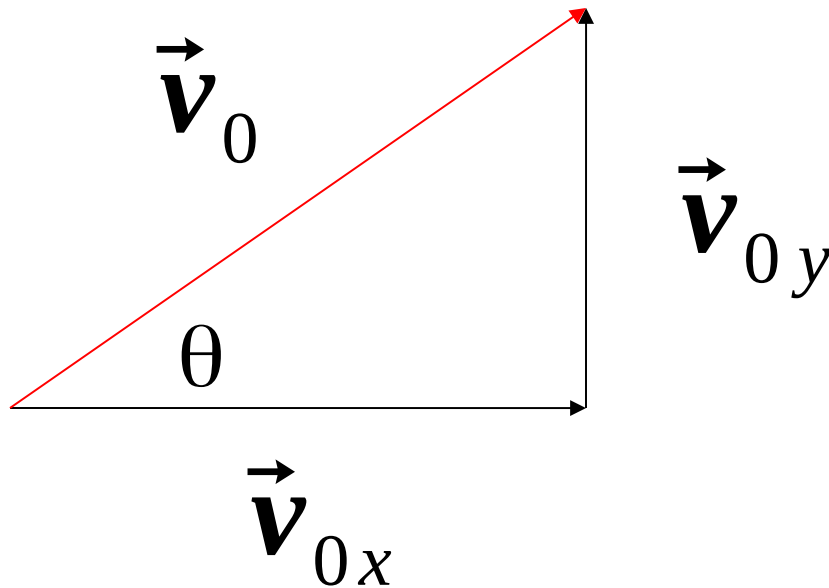
3.3 Gibanje projektila

Primjer 6 Visina šuta

Igrač šutira loptu pod kutom od $40,0$ stupnjeva, početnom brzinom 22 m/s . Koju visinu lopta dosegne? Zanimarite otpor zraka.



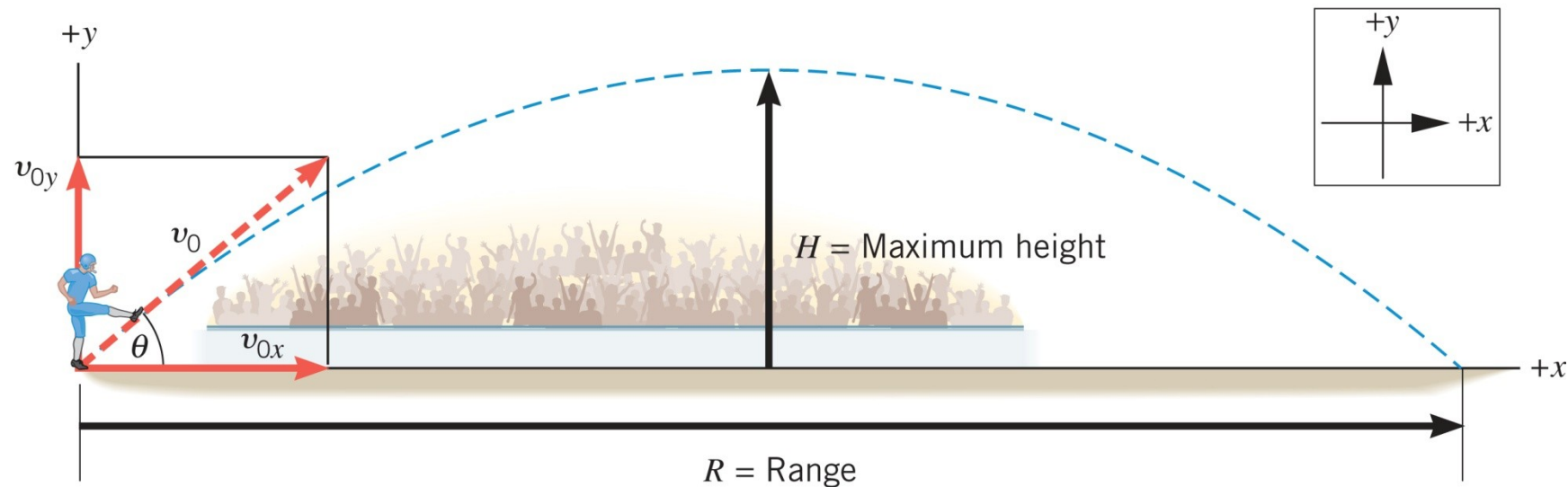
3.3 Gibanje projektila



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 22 \text{ m/s} \cdot \cos 40^\circ = 17 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 22 \text{ m/s} \cdot \sin 40^\circ = 14 \text{ m/s}$$

3.3 Gibanje projektila



y	a_y	v_y	v_{oy}	t
?	$-9,80 \text{ m/s}^2$	0	14 m/s	

3.3 Gibanje projektila

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
?	-9,80 m/s ²	0	14 m/s	

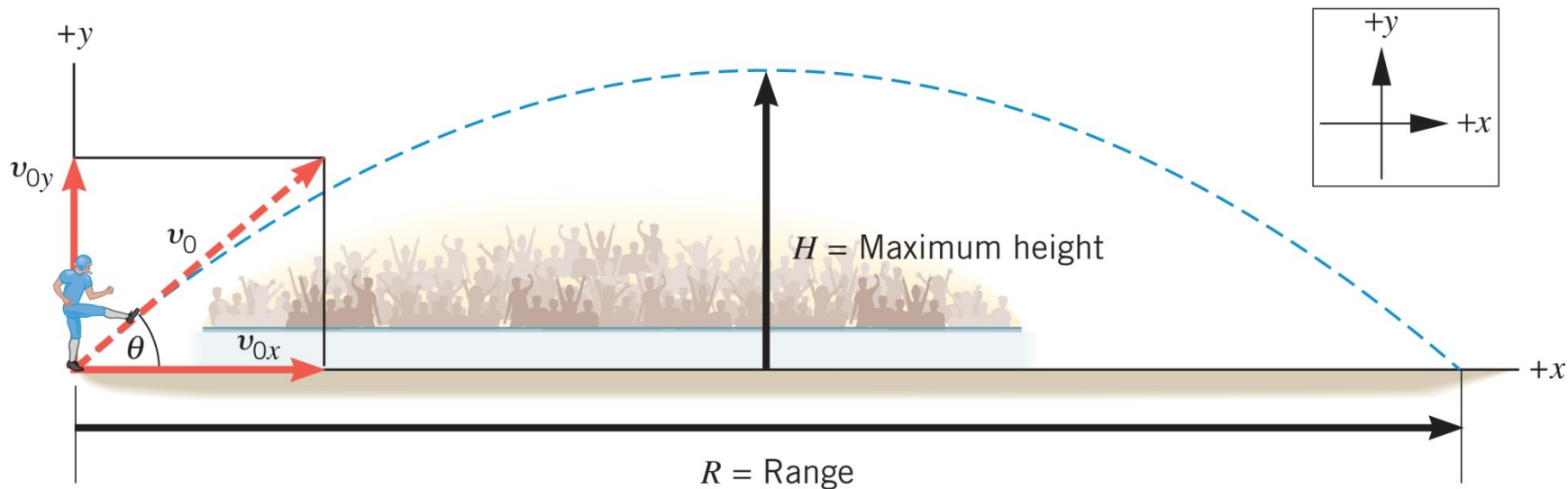
$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 a_y y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2 a_y}$$

$$y = \frac{0 - (14 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-9,8 \text{ m/s}^2)} = 10 \text{ m}$$

3.3 Gibanje projektila

Primjer 7 Trajanje šuta

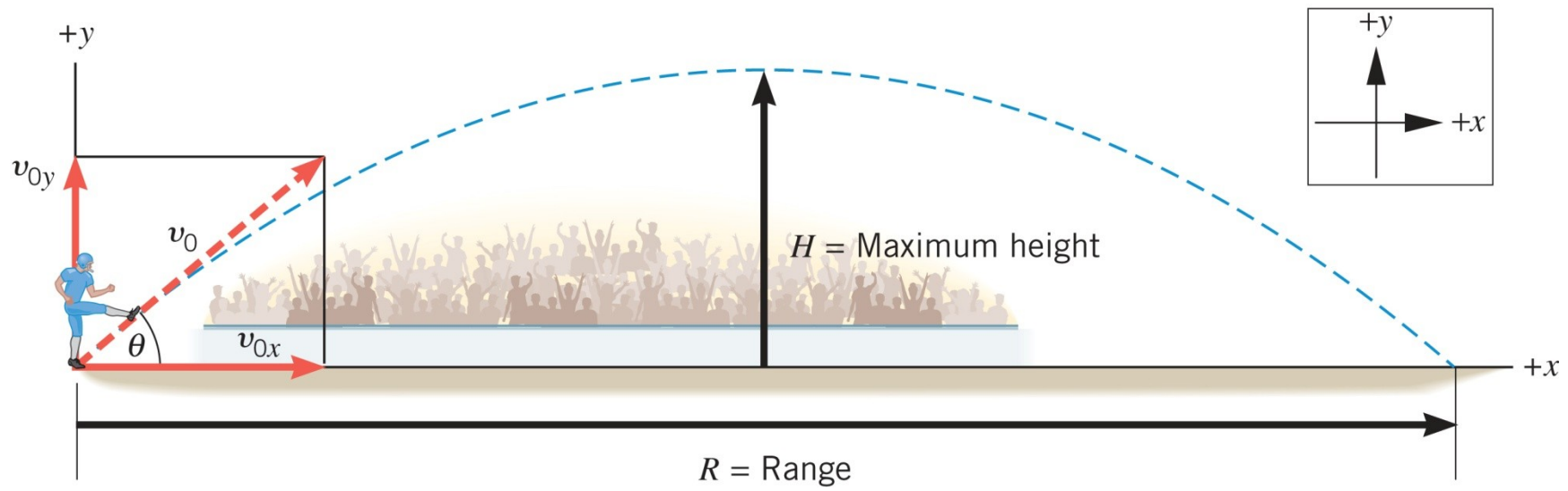
Koliko vremena prođe od udarca do pada lopte na tlo?



WILEY

Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

3.3 Gibanje projektila



y	a_y	v_y	v_{oy}	t
0	-9,80 m/s ²		14 m/s	?

3.3 Gibanje projektila

y	a_y	v_y	v_{oy}	t
0	-9,80 m/s ²		14 m/s	?

$$y = v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2$$

$$0 = (14 \text{ m/s}) \cdot t + \frac{-9,8 \text{ m/s}^2}{2} t^2$$

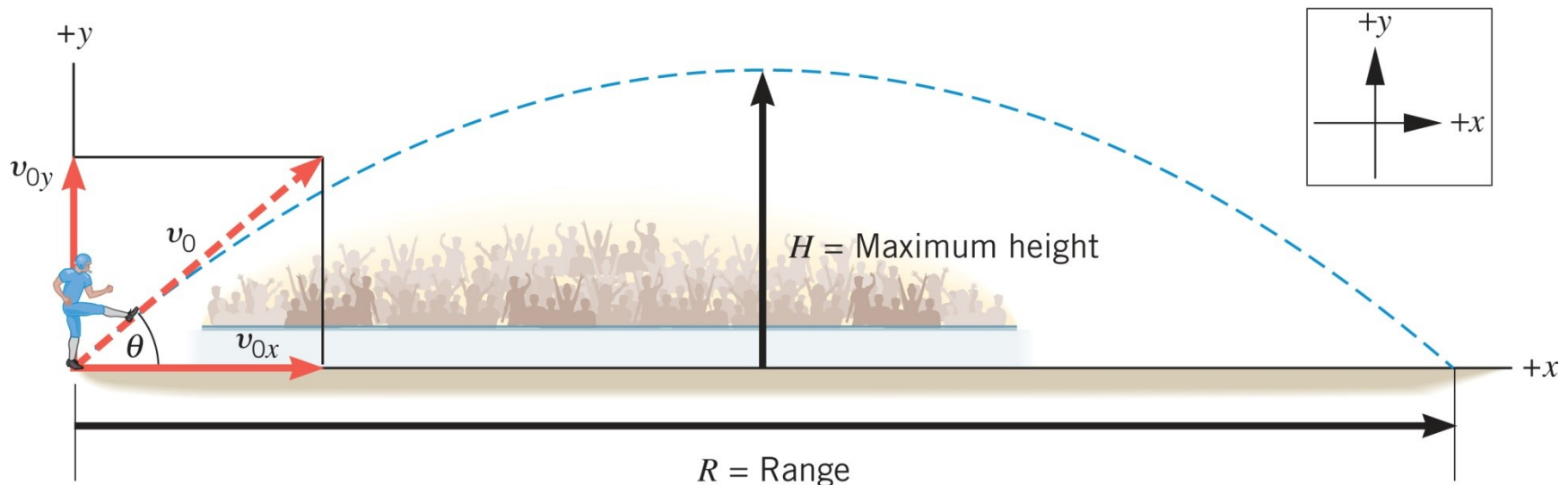
$$0 = 2 \cdot 14 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

$$t_1 = 0 \quad t_2 = 2,9 \text{ s}$$

3.3 Gibanje projektila

Primjer 8 Domet šuta

Izračunajte domet projektila.



$$x = v_{0x} t + \frac{a_x}{2} t^2 = v_{0x} t$$

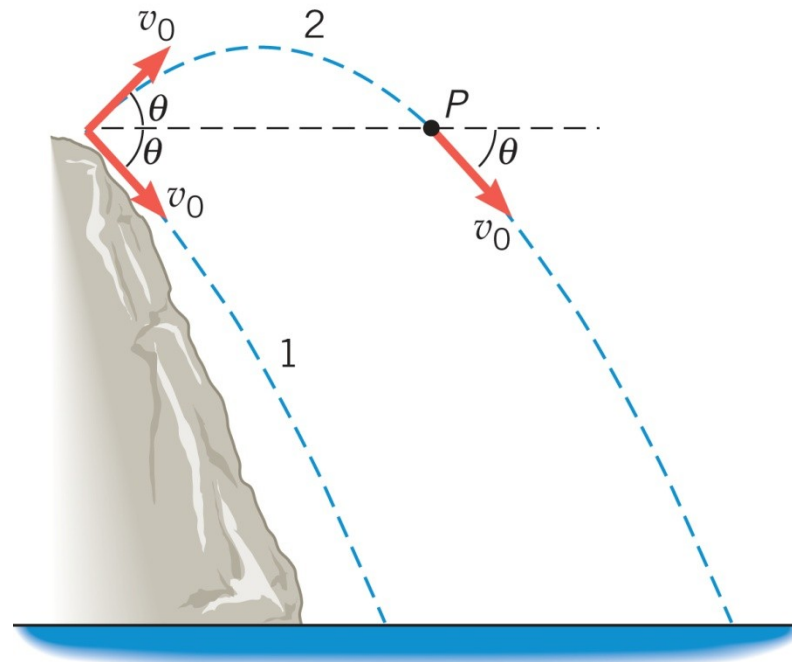
$$x = 17 \text{ m/s} \cdot 2,9 \text{ s} = 49 \text{ m}$$

WILEY

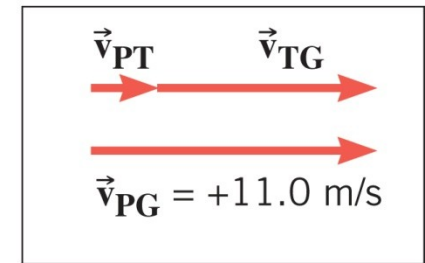
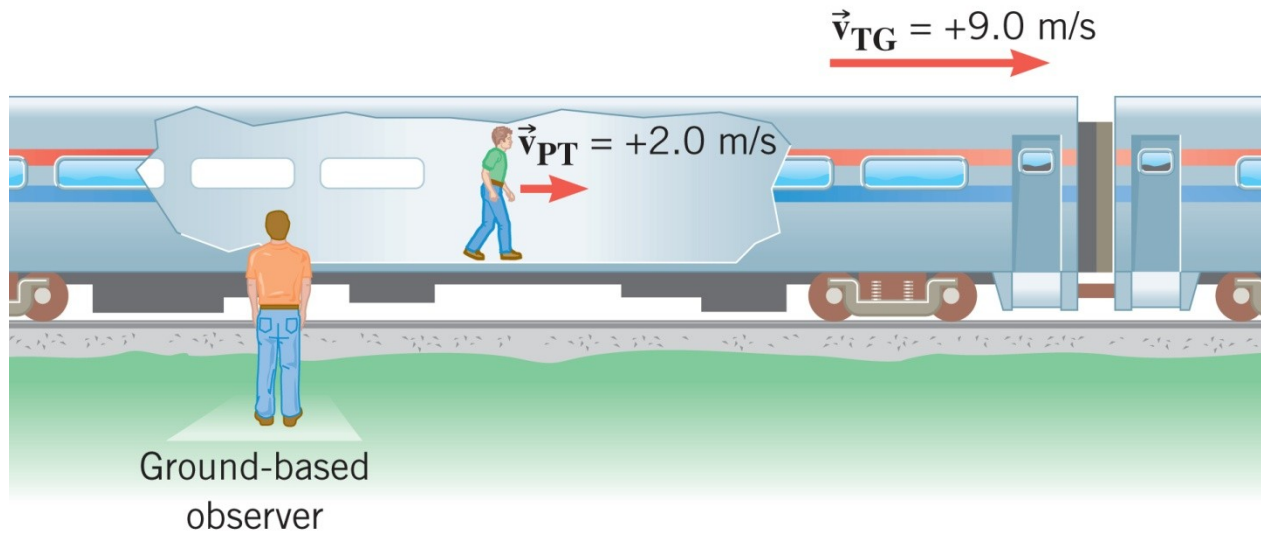
3.3 Gibanje projektila

Konceptualni primjer 10 Dva načina bacanja kamena

Osoba baci dva kamena s vrha litice. Početne brzine su iste, no prvi je kamen bačen pod nekim kutem iznad horizontale, dok je drugi kamen bačen pod istim kutom ispod horizontale. Koji kamen – ako uopće postoji razlika – padne većom brzinom na površinu vode?



3.4 Relativna brzina



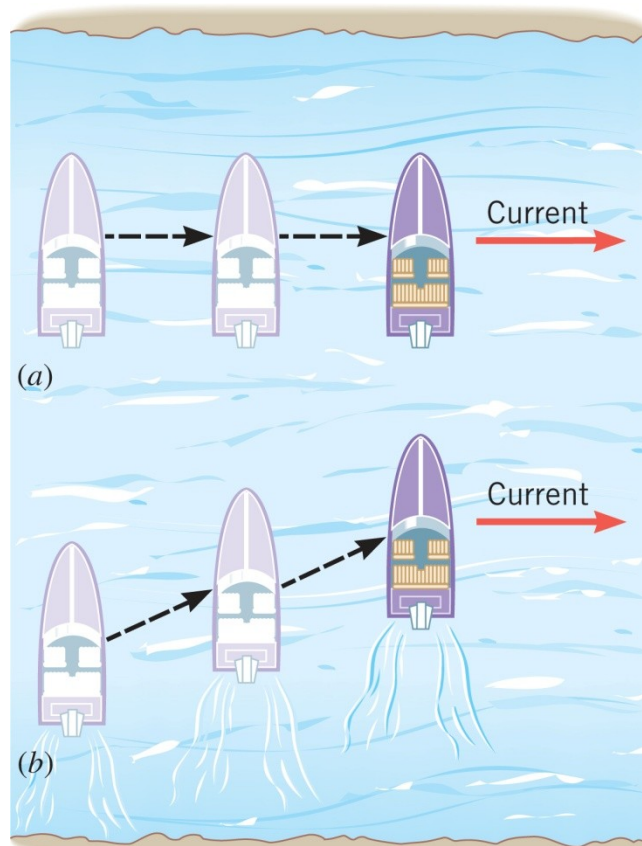
$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PT} + \mathbf{v}_{TG}$$

3.4 Relativna brzina

Primjer 11 Prelazak rijeke

Motorni čamac prelazi rijeku široku 1800 m. Brzina čamca s obzirom na vodu je $4,0 \text{ m/s}$, okomito na smjer toka rijeke. Brzina vode s obzirom na obalu je $2,0 \text{ m/s}$.

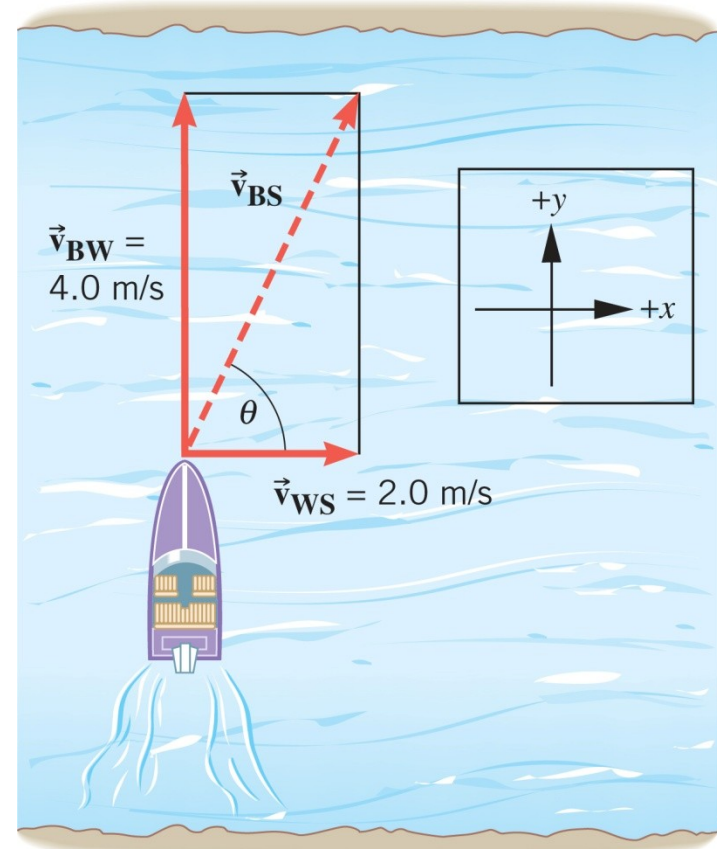
- (a) Kolika je brzina čamca s obzirom na obalu?
- (b) Koliko vremena čamcu treba za prelazak rijeke?



3.4 Relativna brzina

$$\mathbf{V}_{BS} = \mathbf{V}_{BW} + \mathbf{V}_{WS}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4,0}{2,0}\right) = 63^\circ$$

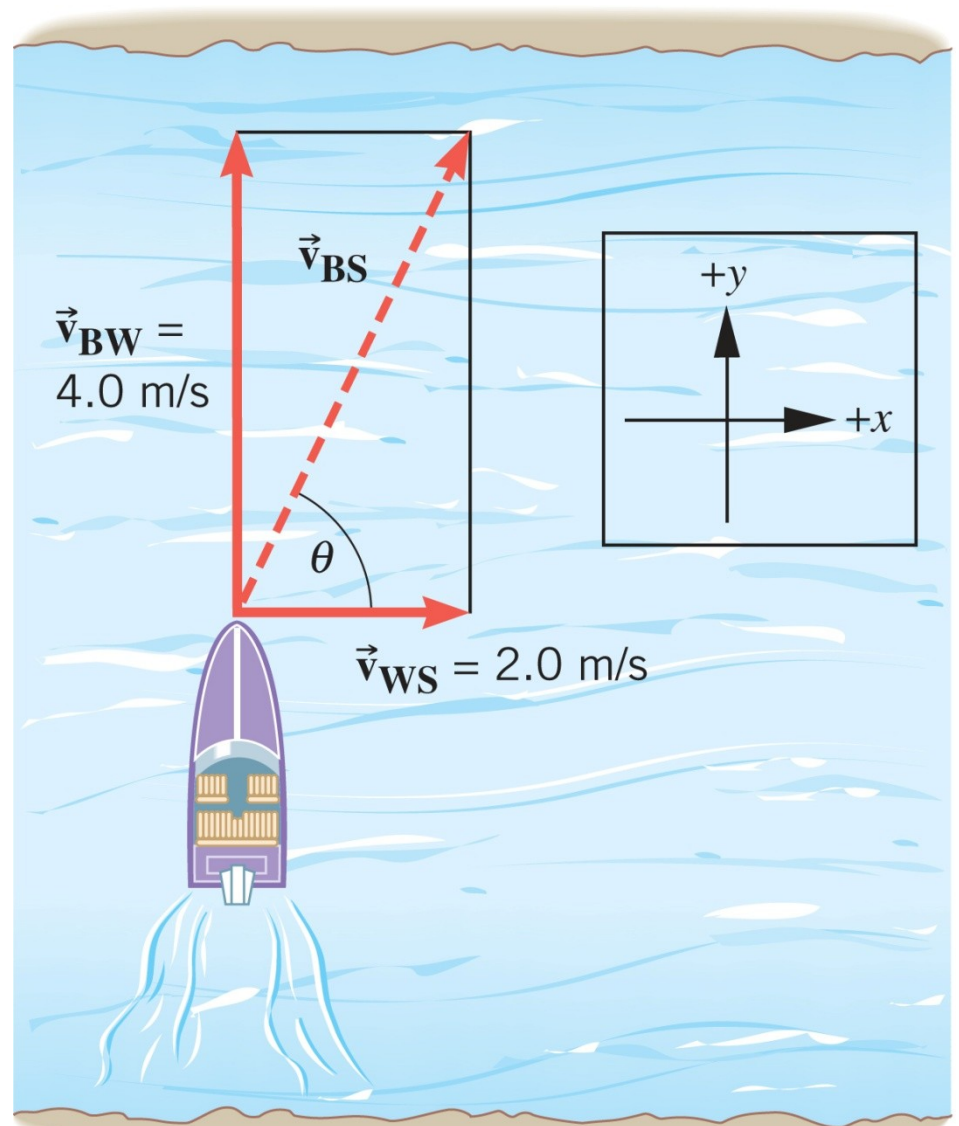


$$v_{BS} = \sqrt{v_{BW}^2 + v_{WS}^2} = \sqrt{(4,0 \text{ m/s})^2 + (2,0 \text{ m/s})^2}$$

$$v_{BS} = 4,5 \text{ m/s}$$

3.4 Relativna brzina

$$t = \frac{1800 \text{ m}}{4,0 \text{ m/s}} = 450 \text{ s}$$

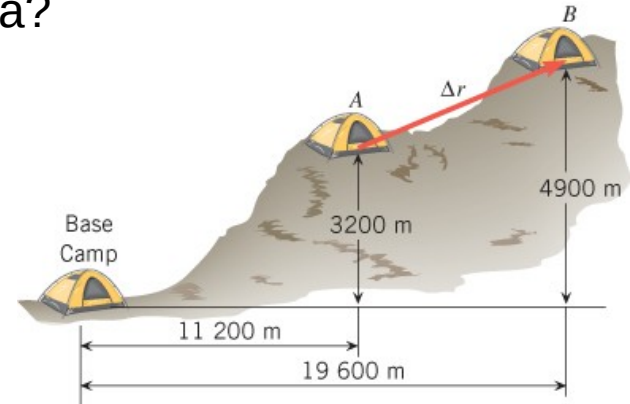


WILEY

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Meteoroid se kroz atmosferu giba u smjeru istoka brzinom $18,3 \text{ km/s}$, a prema dolje brzinom $11,5 \text{ km/s}$. Koja mu je ukupna brzina?

RJEŠENJE: $21,6 \text{ km/s}$



2. Iznad nizinskog kampa, planinarska je ekspedicija postavila još dva kampa, na slici označena s A i B. Odredite iznos pomaka između kampa A i B.

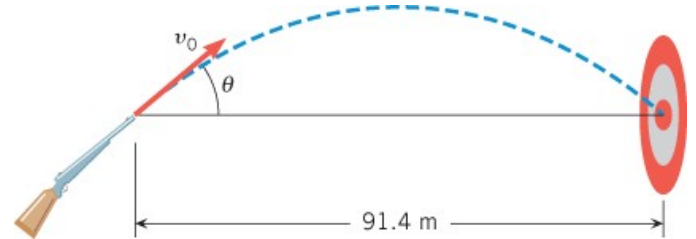
RJEŠENJE: 8600 m

3. S vrha svake od dviju zgrada bačen je, istom početnom brzinom u vodoravnom smjeru, po jedan kamen. Prvi kamen padne dvostruko dalje nego drugi, mjereno od podnožja zgrade. Koji je omjer visina dviju zgrada?

RJEŠENJE: 4

ZADACI ZA VJEŽBU

4. Cijev puške položena je pod kutom θ u odnosu na horizontalu. Meta je udaljena 91,4 m, a brzina metka 427 m/s. Nađite dva moguća kuta θ_1 i θ_2 pod kojima se ostvaruje pogodak u metu. Jedan od tih kutova je tako velik da se nikad ne koristi pri gađanju.



RJEŠENJE: 0,141°; 89,9°

5. Neki fanovi Michaela Jordana tvrdili su da je Jordan u zraku mogao ostati pune dvije sekunde. Da je to istina, do koje bi visine Jordan skakao? Za usporedbu, rekord u najvišem okomitom skoku drži Gerald Sensabaugh: 117 cm. Koliko je dugo Sensabaugh bio u zraku pri tom skoku?

RJEŠENJE: 4,9 m; 0,98 s

6. Skakačica udalj skoči 7,52 m u vodoravnom smjeru. Izračunajte njezinu brzinu pri odrazu, ako vektor brzine tada s horizontalom zatvara kut od 23°.

RJEŠENJE: 10 m/s

ZADACI ZA VJEŽBU

7. Balon na topli zrak diže se brzinom $3,0 \text{ m/s}$. Balast se ispušta početnom brzinom nula u odnosu na balon, na visini od $9,5 \text{ m}$ iznad tla. Koliko vremena balastu treba da padne na tlo?

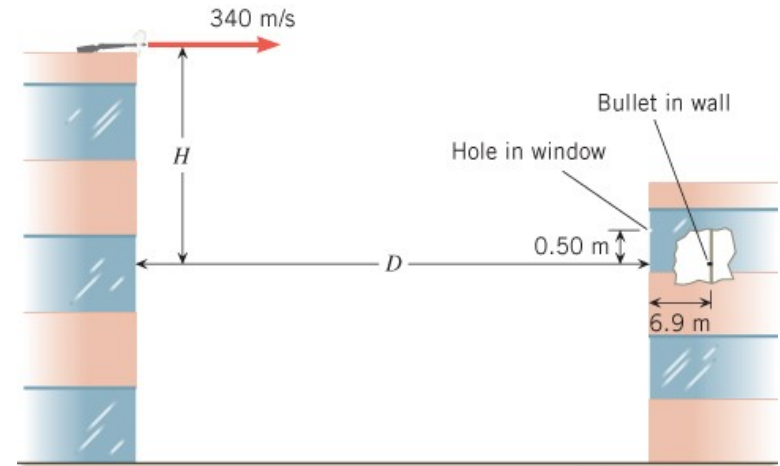
RJEŠENJE: $1,7 \text{ s}$

8. Loptica koja je bačena pod kutom 52° u odnosu na vodoravni smjer, dosegne najveću visinu od $7,5 \text{ m}$. Koju bi visinu loptica dosegla da je bačena istom početnom brzinom okomito uvis?

RJEŠENJE: 12 m

9. S vrha visoke zgrade ispaljen je hitac. Početna brzina taneta je 340 m/s , usporedno s tlom. Tane probije rupu u prozoru druge zgrade i zabije se u zid $0,5 \text{ m}$ niže i $6,9 \text{ m}$ dalje. Odredite H i D (drugim riječima, locirajte mjesto ispaljivanja).

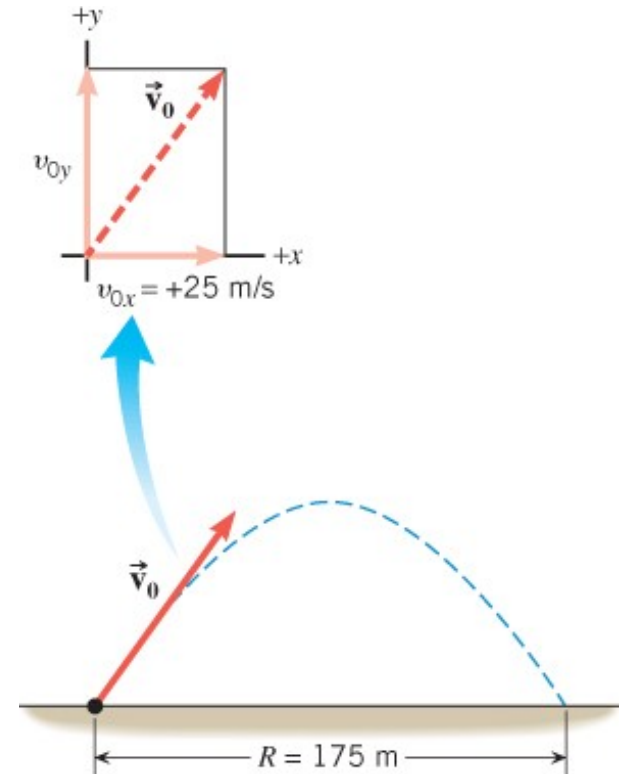
RJEŠENJE: 31 m ; 850 m



ZADACI ZA VJEŽBU

10. Projektil je ispaljen kao na slici. Vodoravna komponenta brzine je 25 m/s, a domet 175 m. Odredite okomitu komponentu brzine. Otpor zraka zanemarite.

RJEŠENJE: 34 m/s



PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. pravokutni koordinatni sustav u ravnini i prostoru
2. pomak u 2D i 3D
3. prosječna brzina u 2D i 3D
4. trenutačna brzina u 2D i 3D
5. prosječna akceleracija u 2D i 3D
6. trenutačna akceleracija u 2D i 3D
7. jednadžbe kinematike u 2D
8. neovisnost gibanja u x i y-smjeru
9. gibanje projektila
10. relativna brzina