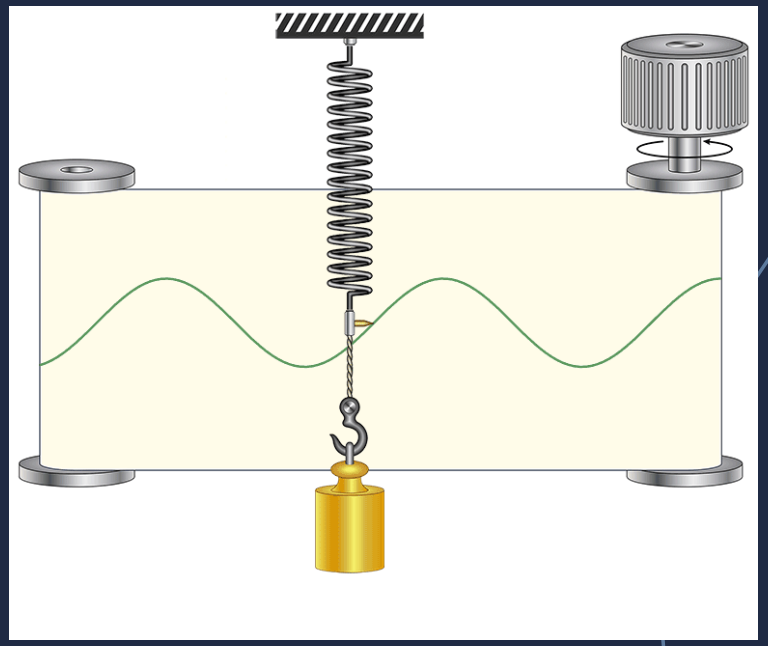
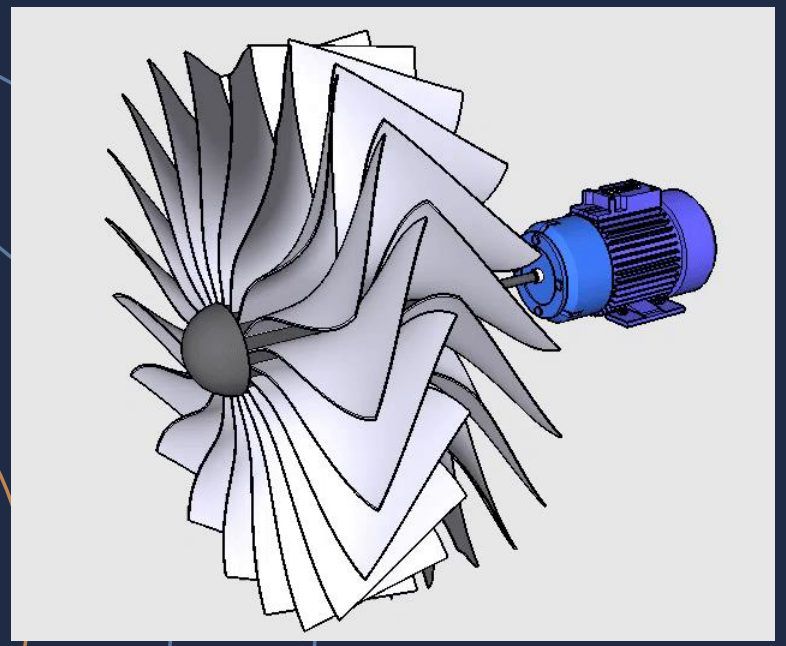






Odziv na harmonijsku uzbudu SDOF

- Harmonijsko opterećenje predstavlja vrstu dinamičkog opterećenja čiji se intenzitet, smjer ili iznos mijenjaju u vremenu po zakonu sinusa ili kosinusa.

$$F(t) = F_0 \sin \Omega \, t$$

$$F(t) = F_0 \cos \Omega \, t$$

Harmonijska uzbuda / opterećenje

Deterministička dinamička opterećenja mogu biti:

Periodička

- *ponovljiva s višeciklusnom promjenom jedne amplitude;*
- *harmonijska i neharmonijska.*

Neperiodička

- *kratkotrajna impulsna djelovanja (udari, eksplozije);*
- *dugotrajna (podrhtavanje tla uslijed potresa).*

Harmonijska uzbuda / opterećenje

Najčešća su u industrijskim i energetskim postrojenjima (alternirajući i rotirajući strojevi, motori i kompresori, turbine, radarski uređaji i sl.) i uzrokuju harmonijske oscilacije dogod su strojevi u pogonu.

Ove se vibracije sastoje od dvije komponente

- ***Prolazna komponenta** – "transient" (uslijed početnih uvjeta s frekvencijom jednakom vlastitoj frekvenciji konstrukcijskog sustava, brzo se prigušuje te se stoga često zanemaruje);*
- ***Stalna (trajna) komponenta** – "steady-state" (pojavljuje se pri frekvenciji uzbudne sile te može dovesti do rezonancije ako se izjednači s vlastitom frekvencijom konstrukcije (može doći do velikih amplituda pomaka i rezultirati preopterećenjem i slomom sustava).*



Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

- *Matematički zapis harmonijske sile* $F(t) = F_0 \sin \Omega t$

  gdje su F_0 *– amplituda uzbudne sile*

  Ω *– kružna frekvencija sile (rad/s)*

- *Jednadžba gibanja* $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$

- *Rješenje jednadžbe u pomacima*

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0/k}{1-(\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t$$

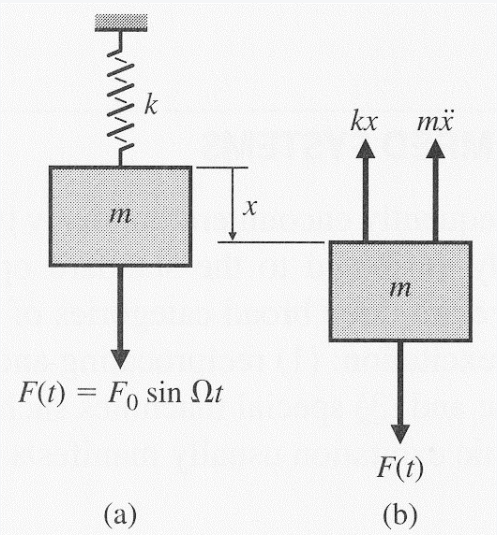
Izvod

gdje su

$X_0 = F_0/k$ *– ekvivalentni statički pomak*

$r = \Omega/\omega$ *– omjer frekvencija*

$\mu_{din} = 1/(1-r^2)$ *– dinamički koeficijent uvećanja*



$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/k}{1-(\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0}{1-r^2} \sin \Omega t$$

Prolazni dio „transient”

Trajni dio odziva „steady - state”

Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

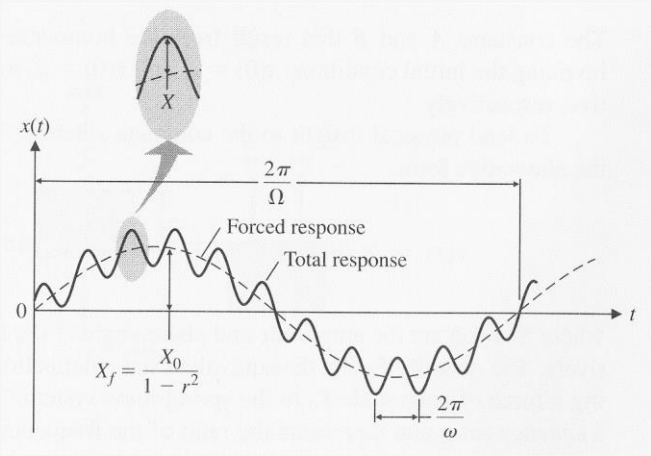
Frekvencijski omjer kod prisilnih vibracija r

- *omjer frekvencije prisilne (uzbudne) sile i vlastite frekvencije sustava;*

  gdje su *Ω – kružna frekvencija vanjske prisilne sile*
  ω – vlastita kružna frekvencija slobodnih oscilacija sustava

$$r = \frac{\Omega}{\omega}$$

- *Ovaj je omjer ključan jer određuje kako će sustav reagirati na vanjsku silu i hoće li doći do pojave rezonancije.*
- ***Tri ključna načina odziva u ovisnosti o omjeru frekvencija***



1. *Podrezonantno područje (r<<1)*

• Vanjska sila se mijenja vrlo sporo u usporedbi s vlastitim vibracijama sustava • Amplituda vibracija je bliska statičkom pomaku (sustav se ponaša kao da na njega djeluje statička sila) • Pomak sustava je u fazi s prisilnom silom.

2. *Rezonantno područje (r≈1)*

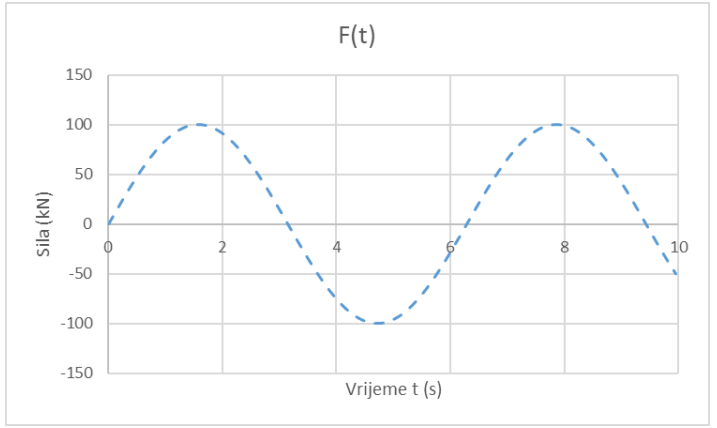
• Frekvencija uzbude se podudara s vlastitom frekvencijom sustava • Dolazi do pojave rezonancije pri čemu amplituda vibracija teorijski teži u beskonačnost (kod sustava bez prigušenja) • U stvarnim sustavima, amplituda u ovoj točki isključivo je ograničena veličinom prigušenja sustava.

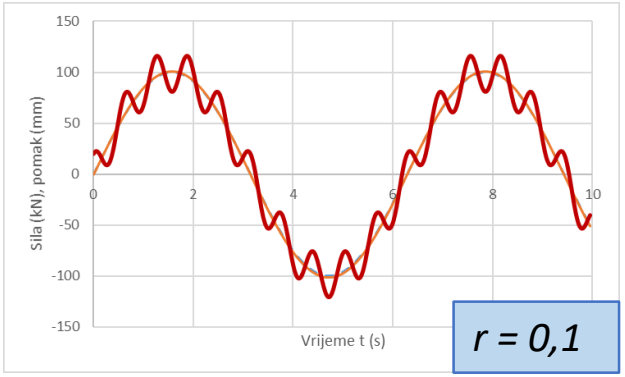
3. *Nadrezonantno područje (r>>1)*

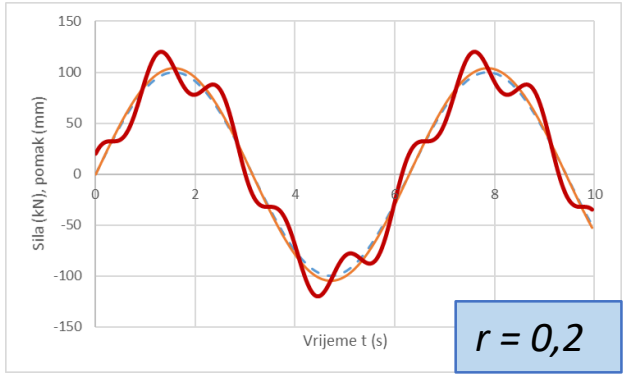
• Frekvencija uzbude je znatno veća od vlastite frekvencije • Amplituda pomaka naglo opada i teži prema nuli • U ovom području gibanje sustava kontrolira njegova masa (inercija). To se svojstvo koristi kod izolacije od vibracija, gdje se teži postizanju omjera r> √2 kako bi se smanjio prijenos sila na podlogu.

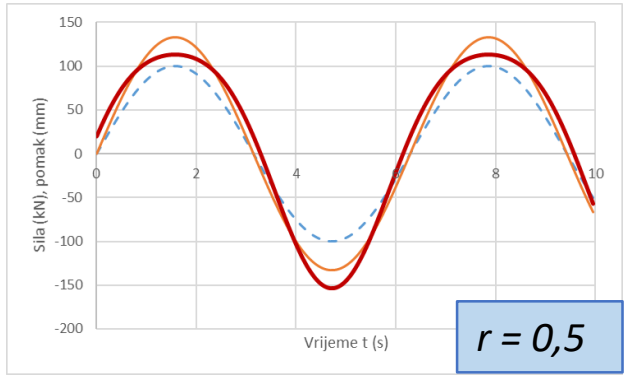
Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

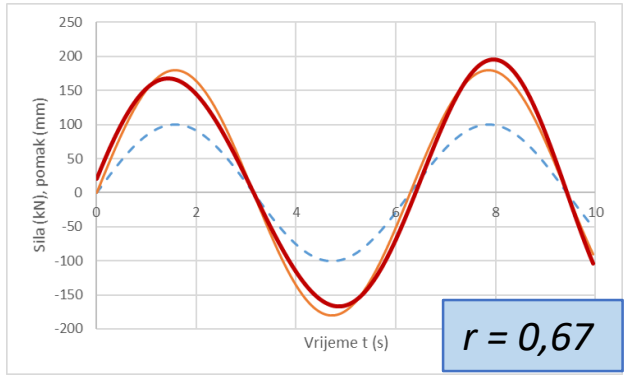
Utjecaj omjera frekvencija r na trajni dio pomaka i na ukupni pomak kod prisilnih harmonijskih vibracija

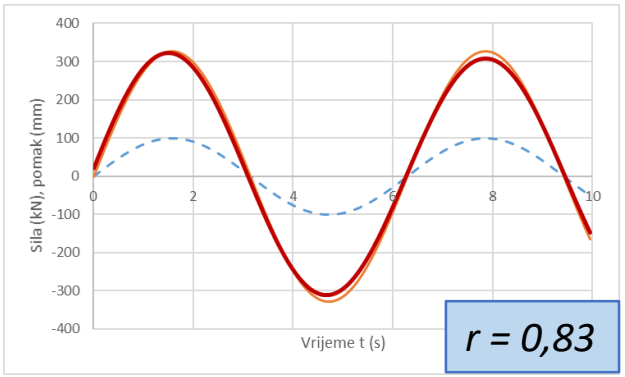


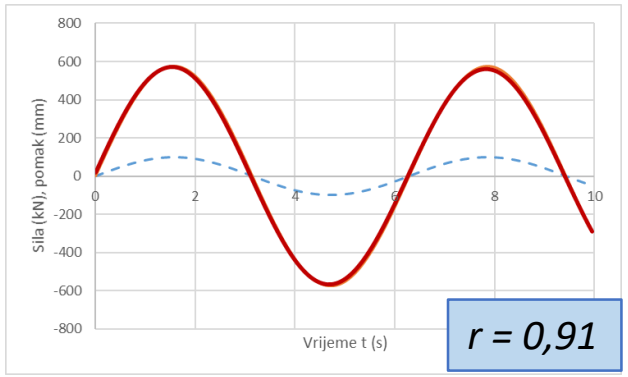


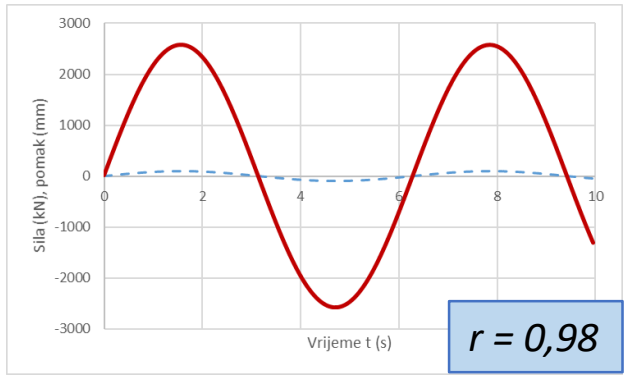


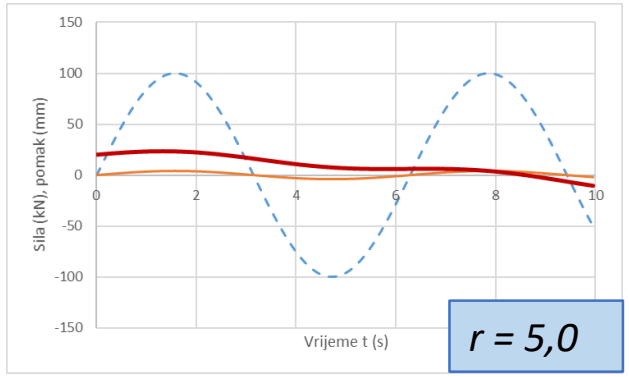












Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

Dinamički koeficijent uvećanja pomaka, μ_{din}

DAF – Dynamic Amplification Factor, DMF – Dynamic Magnification Factor:

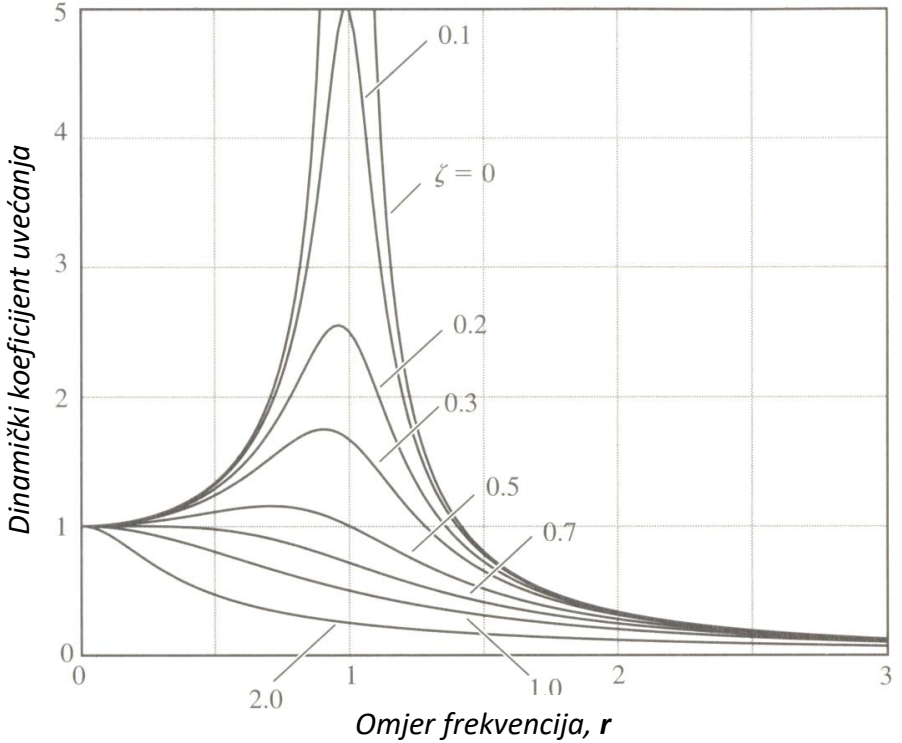
Bezdimenzijski faktor koji pokazuje koliko je maksimalni dinamički pomak konstrukcije veći od statičkog pomaka uzrokovanog istim intenzitetom sile.

- Tri ključna režima rada (ovisno o omjeru frekvencija (r), koeficijent uvećanja se dramatično mijenja:

• Režim niske frekvencije ($r<<1$): Kada sila djeluje vrlo sporo u usporedbi s vlastitom frekvencijom zgrade, μ_{din} je približno 1. Konstrukcija se ponaša gotovo statički.

• Rezonancija ($r \approx 1$): Kada se frekvencija vanjskog opterećenja poklopi s vlastitom frekvencijom konstrukcije, dolazi do rezonancije. U tom slučaju μ_{din} postiže svoju maksimalnu vrijednost. Ako nema prigušenja ($\xi = 0$), pomaci teorijski teže u beskonačnost. U stvarnosti, prigušenje ograničava ovaj vrh (npr. za prigušenje od 5%, pomak se uvećava oko 10 puta).

• Režim visoke frekvencije ($r>>1$): Kada sila titra iznimno brzo, konstrukcija zbog svoje tromosti (inercije) ne stiže reagirati. Koeficijent μ_{din} teži prema 0, što znači da su pomaci minimalni (konstrukcija je "izolirana" od uzbude).



Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

PULSIRANJE I REZONANCIJA

➢ **PULSIRANJE:**

- **Dinamičko ponašanje i periodično titranje (vibracije) građevinskih elemenata ili čitavih objekata pod utjecajem promjenjivih, ritmičkih sila.**
- **U građevinarstvu i strojarstvu, pulsiranje i dinamička opterećenja ključni su čimbenici jer materijali znatno teže podnose ciklička (pulsirajuća) naprezanja nego statička.**

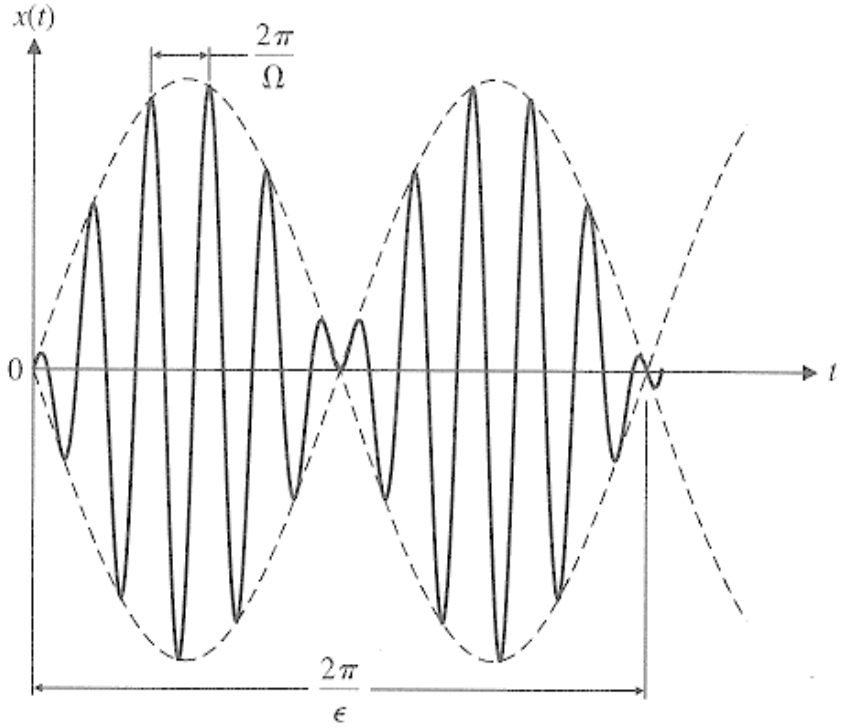
$$r \Rightarrow 1 : \Omega \Rightarrow \omega$$

za početno stanje mirovanja :

$$x(t) = -\frac{X_0 \Omega}{2\varepsilon} \cos \Omega t \sin \varepsilon t$$

gdje je

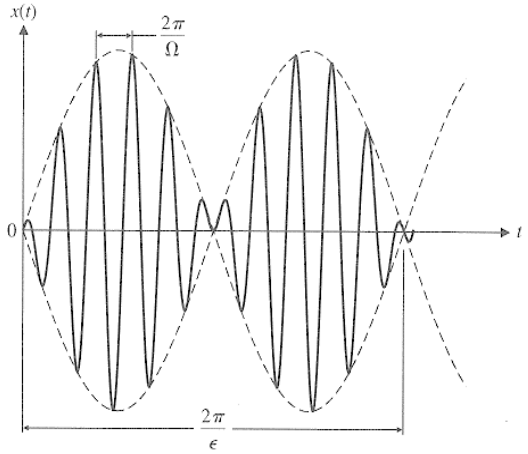
$$\varepsilon = \frac{\omega - \Omega}{2}$$



Period pulsiranja

Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

PULSIRANJE I REZONANCIJA



➢ GLAVNI UZROCI PULSIRANJA I VIBRACIJA:

- **Djelovanje vjetra:**

  Udari vjetra nemaju stalnu silu već dolaze u naletima (pulsiranje vjetra), što kod visokih zgrada, dimnjaka i mostova uzrokuje bočno i torzijsko titranje.

- **Seizmičke aktivnosti (potresi):**

  Tlo tijekom potresa pulsira i prenosi energiju na objekte, prisiljavajući ih na osciliranje.

- **Ljudska aktivnost:**

  Hodanje, skakanje, ples ili trčanje na pješačkim mostovima, stubištima i međukatnim konstrukcijama stvaraju ritmičke impulse.

- **Prometni sustavi:**

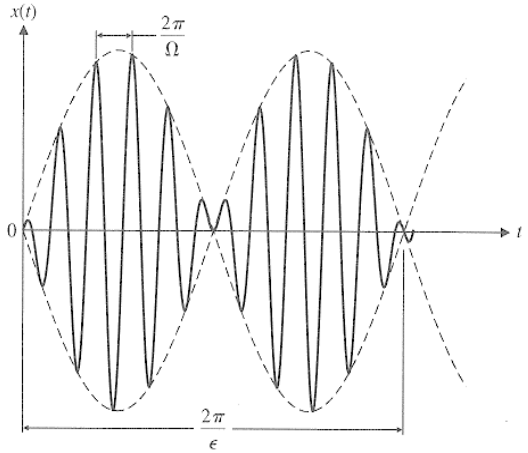
  Prolazak teretnih vozila, vlakova ili tramvaja kroz tlo prenosi pulsirajuće valove na obližnje temelje zgrada.

- **Rad strojeva i opreme:**

  Industrijski pogoni, motori s unutarnjim izgaranjem, kompresori te neizolirani klimatizacijski sustavi stalni su izvori tehnoloških vibracija.

Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

PULSIRANJE I REZONANCIJA



➢ OPASNOSTI I POSLJEDICE ZA KONSTRUKCIJU

- Dugotrajno ili intenzivno pulsiranje može ozbiljno ugroziti stabilnost i funkcionalnost građevine:

  REZONANCIJA

  Nastaje kada se frekvencija vanjske sile (npr. vjetra ili potresa) poklopi s vlastitom frekvencijom titranja zgrade. Amplituda titranja tada ekstremno raste, što može dovesti do trenutnog rušenja.

  UMOR MATERIJALA

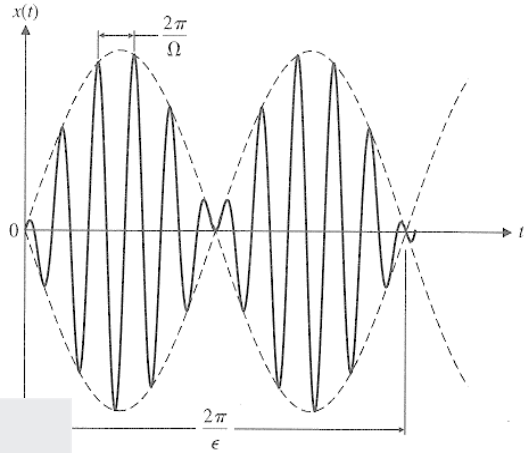
  Stalna ciklička naprezanja s vremenom slabe strukturu mikroskopskim pukotinama. Nosivost pulsiranjem opterećenih elemenata pada na svega oko 2/3 njihove statičke čvrstoće.

  NELAGODA ZA KORISNIKE

  Čak i kada pulsiranje ne ugrožava stabilnost, vibracije međukatnih konstrukcija izazivaju osjećaj nesigurnosti, mučninu i tjeskobu kod ljudi koji borave u objektu.

Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

PULSIRANJE I REZONANCIJA



➢ KAKO ZAŠTITI GRAĐEVINU OD PULSIRANJA

- **Povećanje krutosti ili promjena mase:**

  Promjenom rasporeda nosivih zidova, stupova ili dodavanjem mase, inženjeri pomiču vlastitu frekvenciju zgrade izvan dometa kritičnih vanjskih utjecaja.

- **Ugradnja prigušivača (Dampers):**

  Pasivni sustavi:

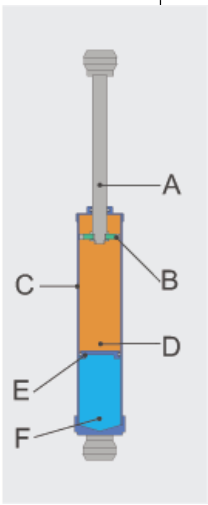
  Viskozni prigušivači (poput automobilskih amortizera) ili elastomerni ležajevi ispod temelja koji apsorbiraju i disipiraju seizmičku energiju.

  Usklađeni prigušivači mase (Tuned Mass Damper):

  Teški klatni sustavi koji se ugrađuju na vrhove nebodera. Kada vjetar zanjiše zgradu u jednom smjeru, klatno se miče u suprotnom i tako poništava pulsiranje

- **Izolacija izvora vibracija:**

  Postavljanje industrijskih strojeva na posebne amortizirajuće podloge ili ugradnja elastičnih materijala ispod tramvajskih i željezničkih tračnica.



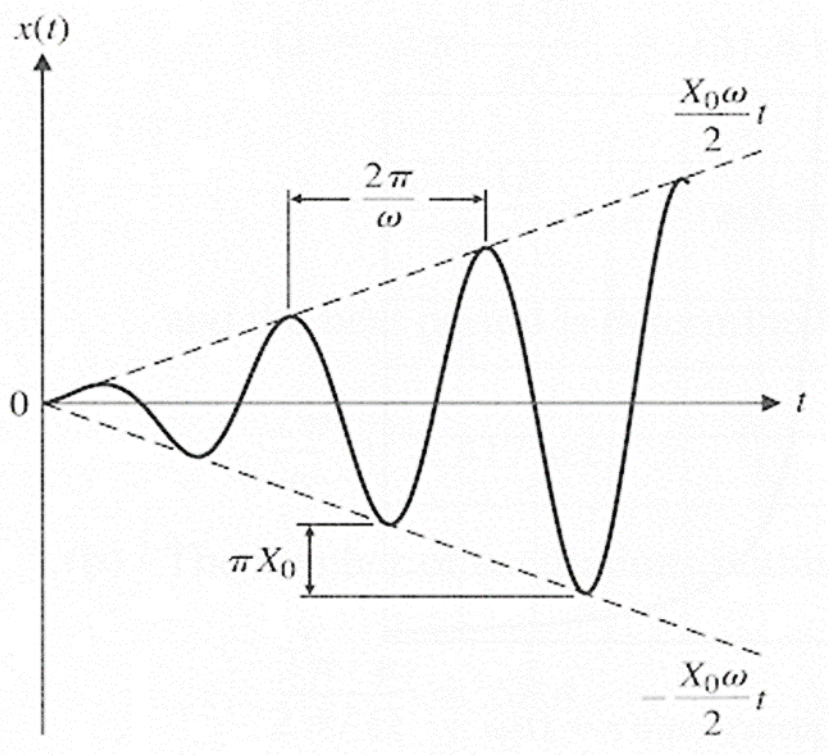




Prisilne neprigušene harmonijske vibracije

PULSIRANJE I REZONANCIJA

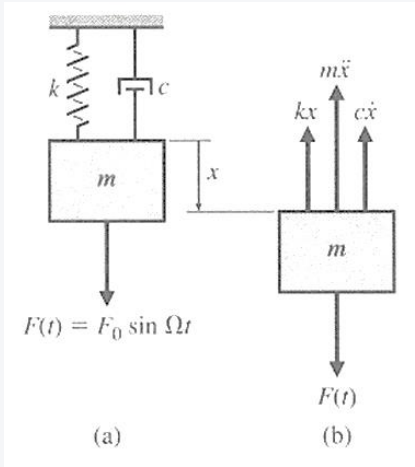
- **REZONANCIJA:**
- Rezonancija u građevinarstvu je pojava drastičnog povećanja amplitude titranja (oscilacija) neke konstrukcije kada se frekvencija vanjske uzbudne sile (primjerice vjetra, potresa, prometa, strojeva ili valova) poklopi s njenom vlastitom (prirodnom) frekvencijom.



r = 1 : Ω = ω, μ ⇒ ∞

$$x(t) = X\sin(\omega t + \varphi) + \frac{X_0\omega}{2}t\sin\omega t$$

Prisilne prigušene harmonijske vibracije

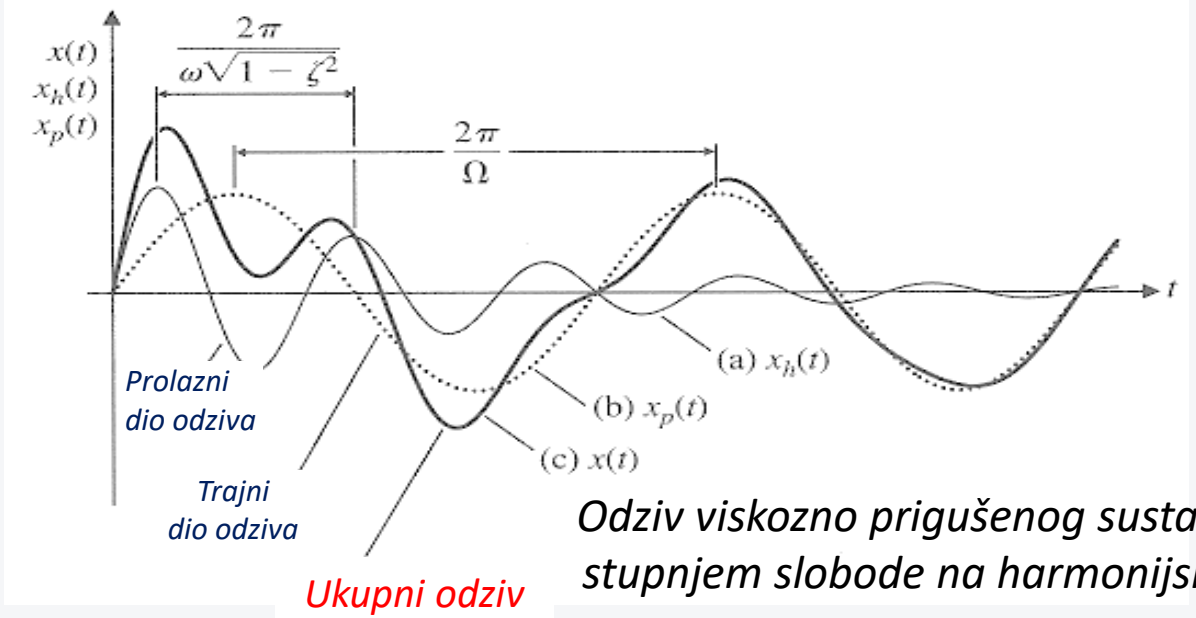


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\sin \omega_d t + B\cos \omega_d t\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \sin\left(\Omega t - \psi\right)$$

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega t}\left(\sin \omega_d t + \varphi\right) + \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \sin\left(\Omega t - \psi\right)$$

Izvod

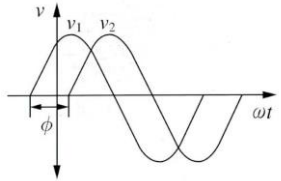


Odziv viskozno prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode na harmonijsku uzbudu

Fazni pomak ψ opisuje kašnjenje odziva sustava (pomične mase) za periodičkom vanjskom uzbudnom silom.

Zbog prisutnosti prigušenja i tromosti (inercije) sustava, masa ne prati uzbudnu silu u koraku, već njezino maksimalno odstupanje kasni za maksimalnom vrijednošću sile.

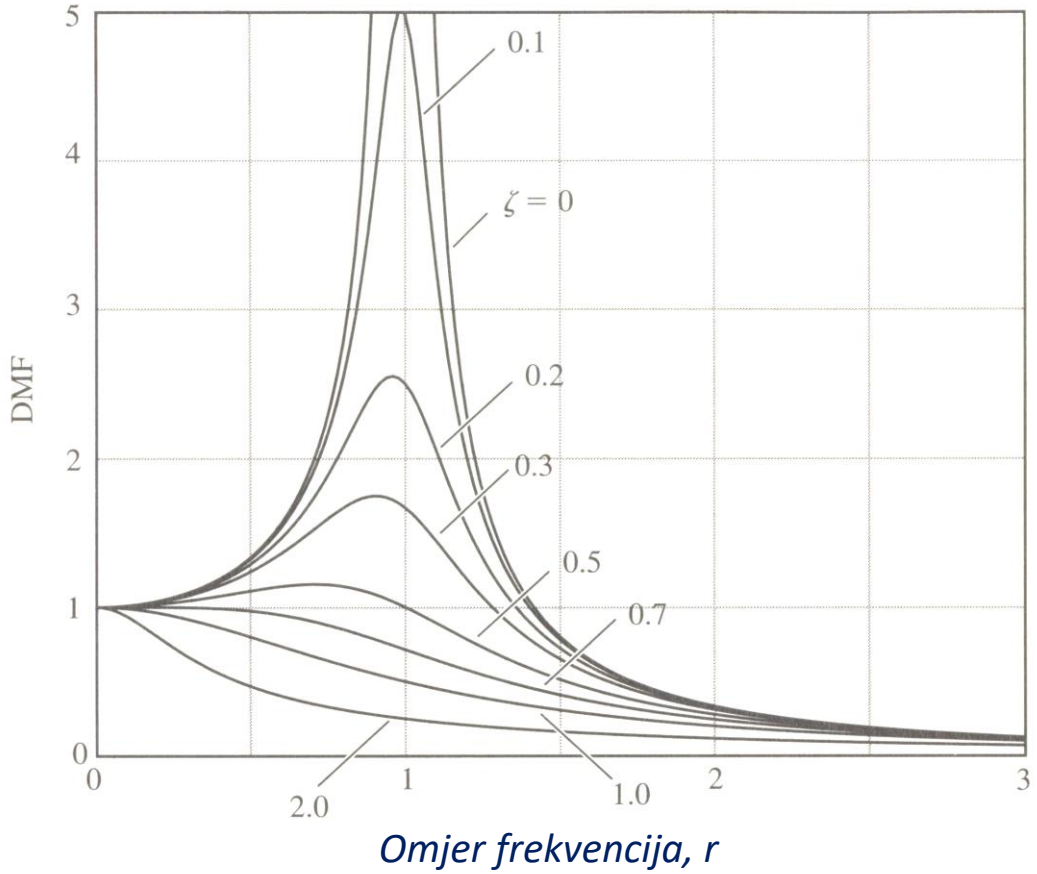
$$\psi = tg^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$



Prisilne prigušene harmonijske vibracije

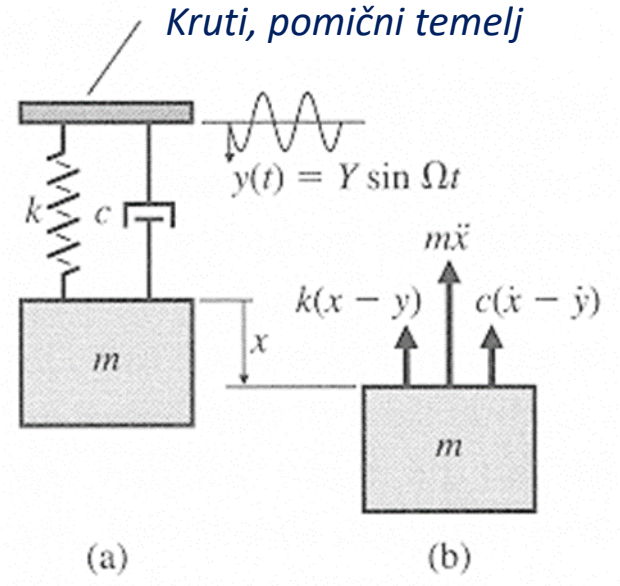
UTJECAJ KOEFICIJENTA PRIGUŠENJA NA TRAJNI DIO ODZIVA

Odnos koeficijenta dinamičkog uvećanja **(DMF)** i omjera frekvencija **r** za različite stupnjeve prigušenja



Prisilne prigušene harmonijske vibracije

VIBRACIJE TEMELJA - Prijenos dinamičkih opterećenja i potresnih valova preko temeljnog tla do objekta



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY\,sin\,\Omega t + c\Omega Y\,cos\,\Omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Y\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}\;sin(\Omega t - \gamma)$$

$$\gamma = tg^{-1}\left(-\frac{c\Omega}{k}\right) = tg^{-1}(-2\xi r)$$

X_f

$$x(t) = \frac{Y\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}\,sin(\Omega t - \beta)$$

Trajni dio pomaka mase (konstrukcije nad temeljima)

$$\beta = \gamma + \psi, \quad \psi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

Prisilne prigušene harmonijske vibracije

IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST

Prenosivost vibracija s temelja na gornju konstrukciju (*eng. vibration Transmissibility*) definira se kao omjer amplitude pomaka (ili sile) gornje konstrukcije i amplitude uzbude koja dolazi iz temelja.

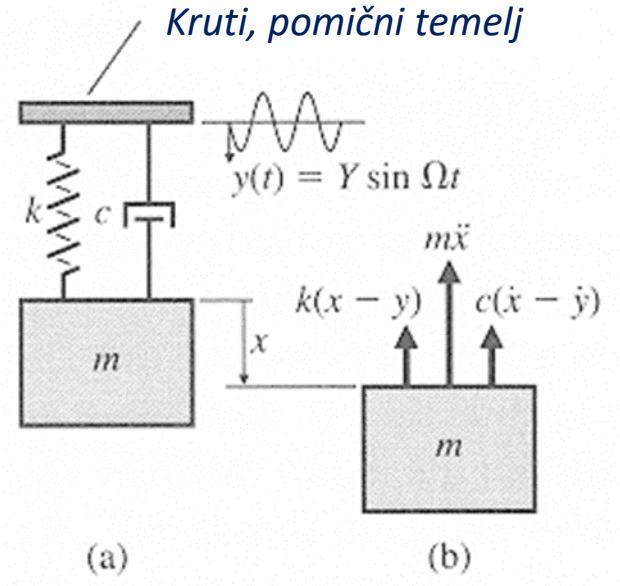
Izravno utječe na stabilnost objekta, umor materijala te funkcionalnost i ugodu unutar samog prostora.

Ovisno o vrijednosti omjera frekvencija r, prijenos vibracija prolazi kroz tri potpuno različite faze:

1. **Područje niske frekvencije (r < 1):**
   - Gornja konstrukcija giba se gotovo sinkronizirano s temeljem.
   - Ako je prenosivost blizu vrijednosti 1, gornja konstrukcija trpi jednake amplitude kao i sam temelj.
   - Prigušenje ovdje ima minimalan utjecaj.
2. **Područje rezonancije (r ≈ 1):**
   - Frekvencija uzbude podudara se s prirodnom frekvencijom zgrade.
   - Dolazi do ekstremnog skoka amplituda (teorijski idu u beskonačnost ako nema prigušenja).
   - Prijenos vibracija je maksimalan i opasan za integritet objekta.
3. **Područje izolacije (r > √2):**
   - Tek kada frekvencija uzbude prijeđe vrijednost √2 puta veću od prirodne frekvencije sustava, prenosivost pada ispod 1.
   - Što je frekvencija uzbude viša (ili što je vlastita frekvencija konstrukcije niža), gornja konstrukcija biva mirnija, čime se postiže učinak vibroizolacije.

Prisilne prigušene harmonijske vibracije

IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST



PRENOSIVOST (Transmissibility)

mjera gibanja koje se prenosi na masu usljed oscilacija temelja

$$\mathrm{Tr} = \left|\frac{X_f}{Y}\right| = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

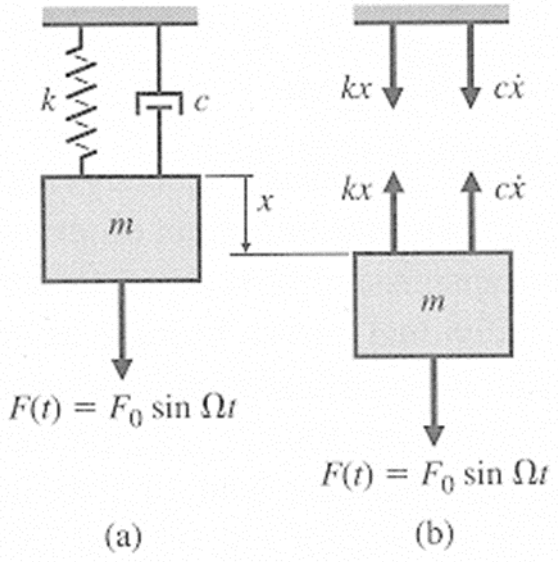
IZOLACIJA VIBRACIJA

$$I = 1 - Tr$$



Prisilne prigušene harmonijske vibracije

IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST



Prenosivost sila s gornje konstrukcije na temelje

Sila koja se prenosi na temelje

$$F_T = kx + c\dot{x} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}\, sin(\Omega t - \beta)$$

$$(F_T)_{max} = X_f \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} = \frac{X_0 \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

PRENOSIVOST

$$Tr = \frac{(F_T)_{max}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \mu_{din} \sqrt{1 + (2\xi r)^2}$$

Prisilne prigušene harmonijske vibracije

IZOLACIJA VIBRACIJA I PRENOSIVOST

Prenosivost TR

u funkciji omjera frekvencija r

i koeficijenta prigušenja ζ

