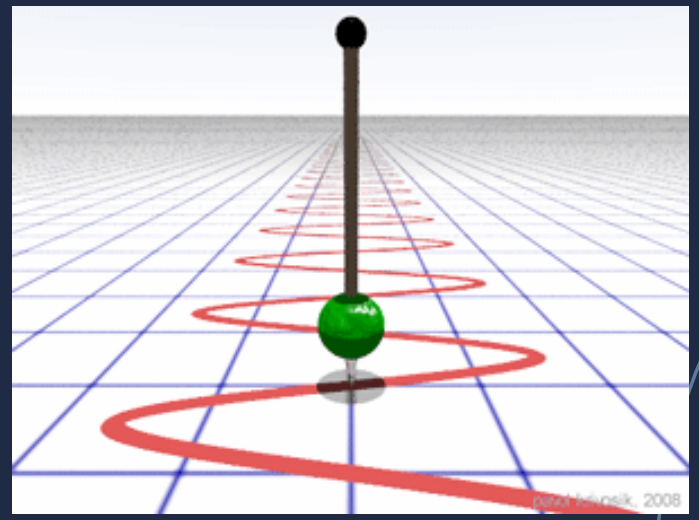
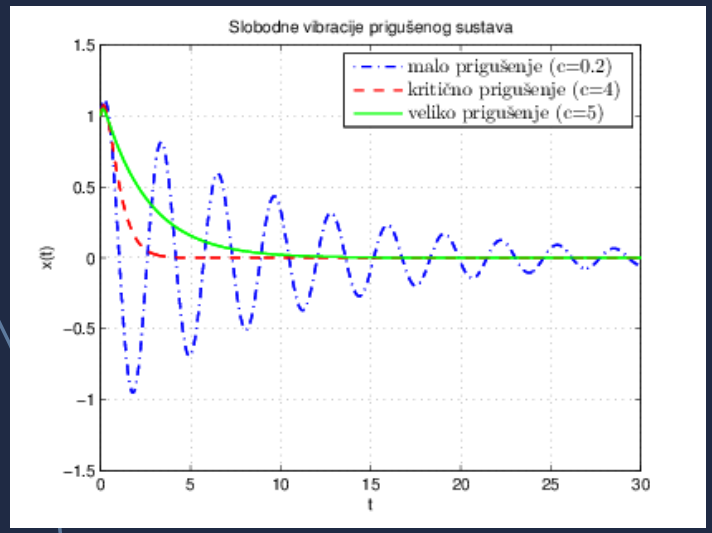




Slobodne prigušene vibracije SDOF

- PRIGUŠENJE („DAMPING”) JE GUBITAK / TROŠENJE (DISIPACIJA) ENERGIJE OSCILATORNOG SUSTAVA ŠTO REZULTIRA POSTUPNIM SMANJENJEM AMPLITUDE TITRANJA DO POTPUNOG ZAUSTAVLJANJA.

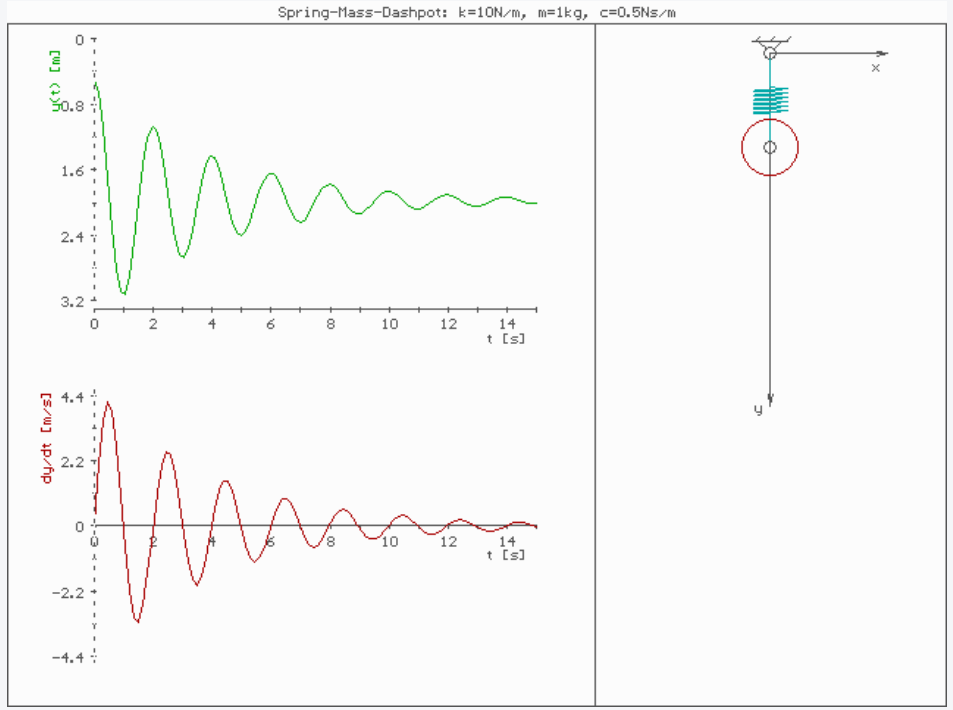
Slobodne prigušene vibracije

Vrste prigušenja s obzirom na fizikalne uzroke i načine trošenja energije:

Viskozno prigušenje

- Sila prigušenja proporcionalna je brzini gibanja tijela (npr. gibanje tijela kroz tekućinu ili rad hidrauličkog amortizera).

$$F_D = -c \cdot v$$



Coulombovo (suho) trenje

- Nastaje uslijed trenja između dviju suhih kliznih površina. Konstantno je i ne ovisi o brzini već o koeficijentu trenja i normalnoj sili.

$$F_D = -\mu \cdot N \cdot sign(v)$$

Konstrukcijsko (unutarnje/histerezno) prigušenje

- Unutarnje trenje unutar samog materijala. Energija se gubi zbog deformacije materijala i pretvara se u toplinu.

$$F_D = -i \cdot \eta \cdot k \cdot x$$

Slobodne prigušene vibracije

Viskozno prigušenje

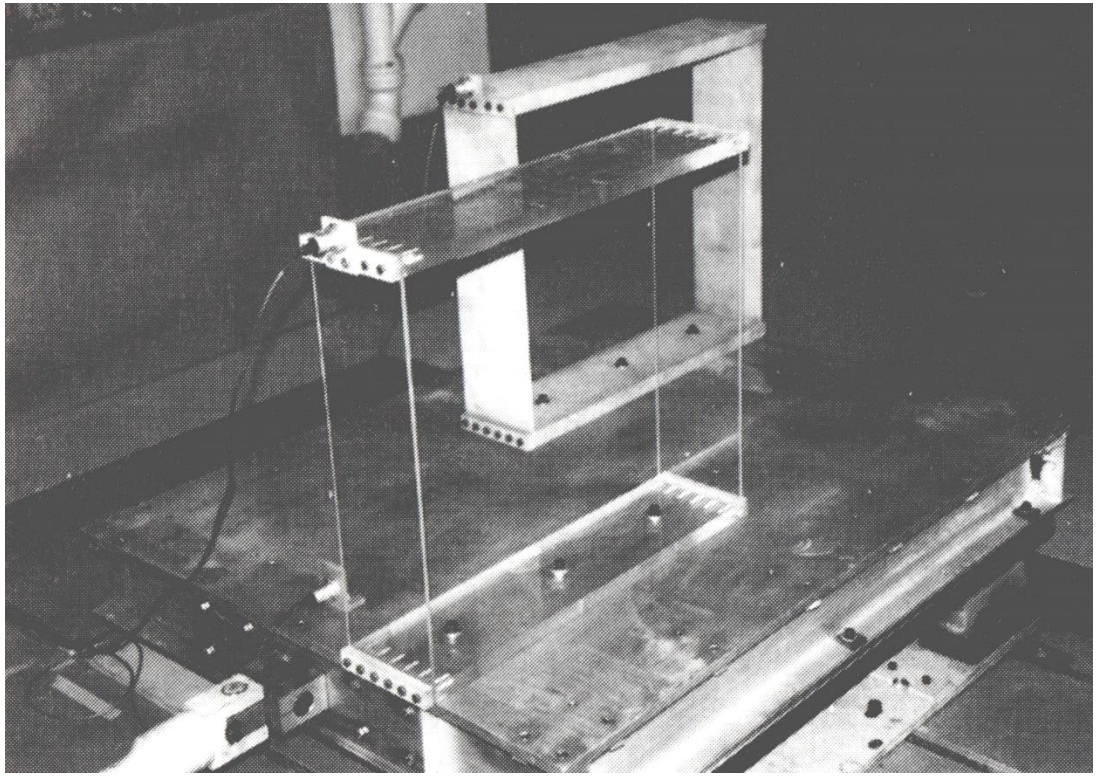
- *Mehanički model prigušenja u kojem je sila otpora (prigušenja) izravno proporcionalna brzini gibanja.*
- *Matematička jednostavnost: Zbog linearne ovisnosti o brzini, najpogodnije je za dinamičke proračune i numeričke integracije u strojarstvu i građevinarstvu.*
- *Disipacija energije: pretvara kinetičku energiju vibracija u toplinu (ili drugi oblik gubitaka) i time smanjuje amplitudu titranja.*

UKUPNO SE PRIGUŠENJE SASTOJI OD JEDNE ILI KOMBINACIJE NAVEDENIH VRSTA PRIGUŠENJA.

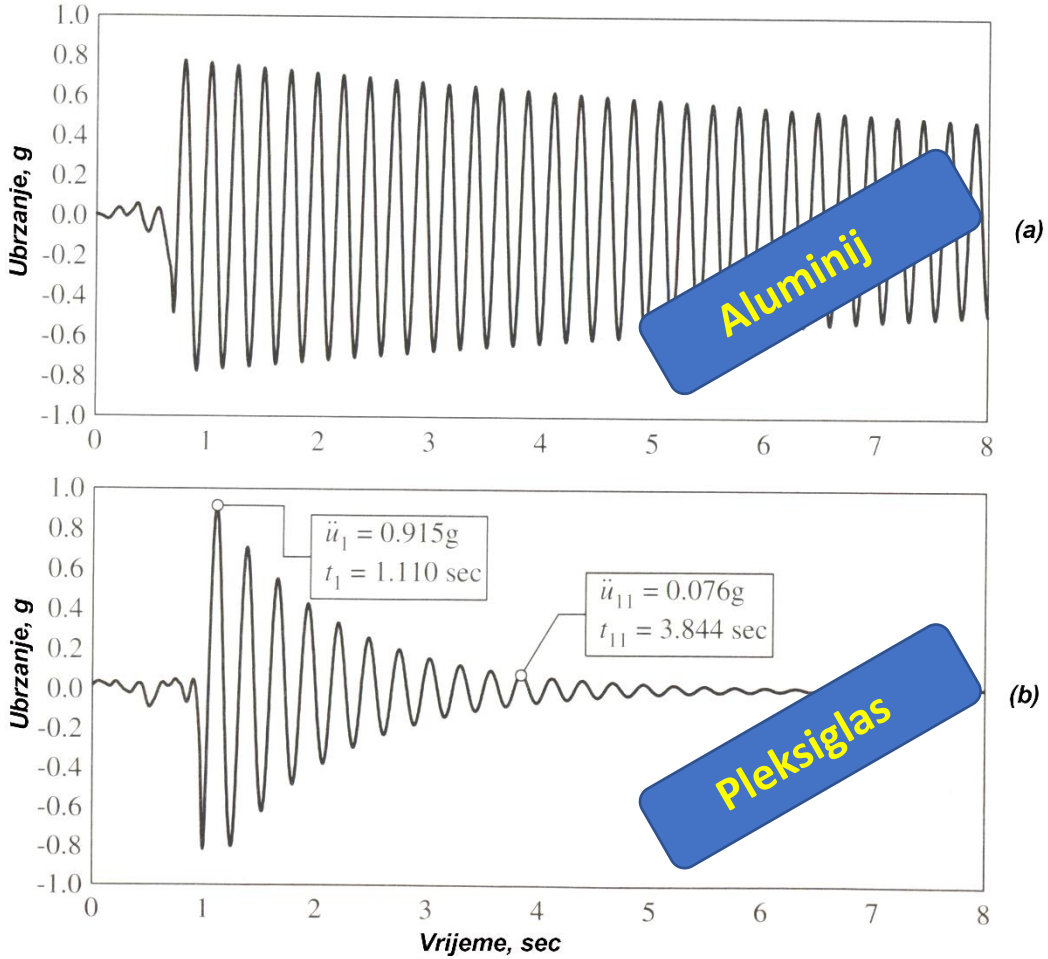
- *Sustavi s prevladavajućim drugim vrstama prigušenja se najčešće analiziraju kao sustavi sa **zamjenjujućim (ekvivalentnim) viskoznim** prigušenjem. Zamjenjujuće se viskozno prigušenje određuje na način da se postigne jednaka disipacija energije po ciklusu kakva bi se postigla sa stvarnim mehanizmom prigušenja.*

Slobodne prigušene vibracije

Primjer eksperimentalnog ispitivanja prigušenja



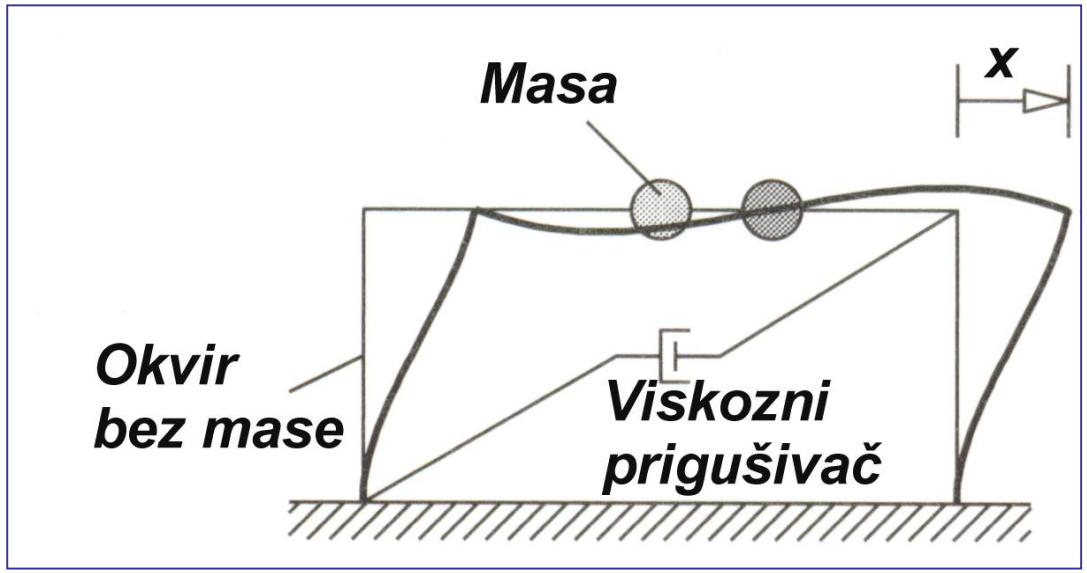
Modeli okvira od pleksiglasa i aluminija (University of California at Berkeley)

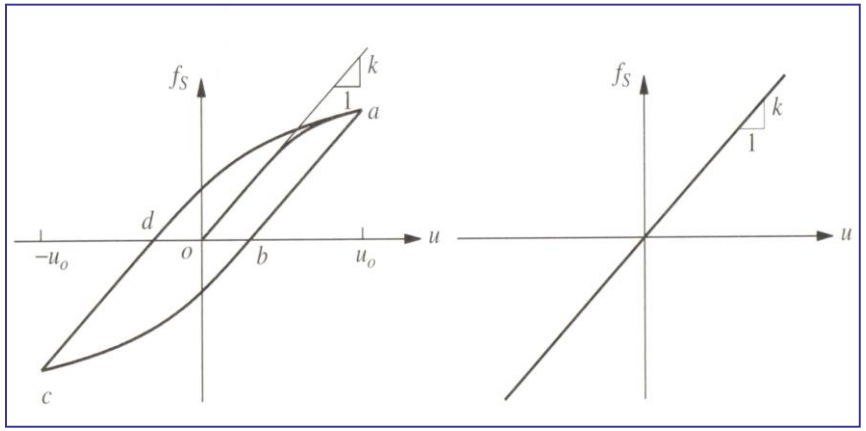


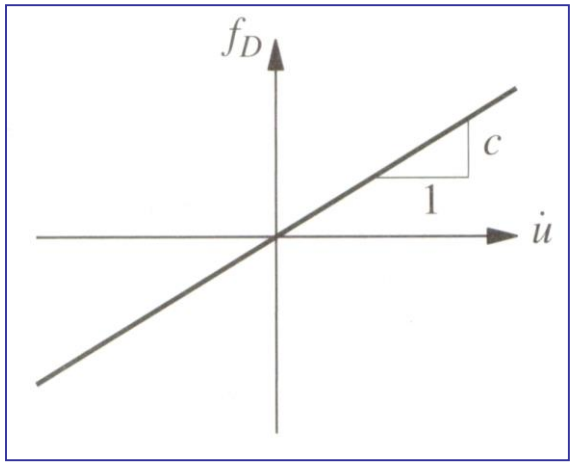
JEDNADŽBA GIBANJA PRIGUŠENOG SUSTAVA

Osnovne komponente dinamičkog sustava

- Masa
- Krutost
- Prigušenje

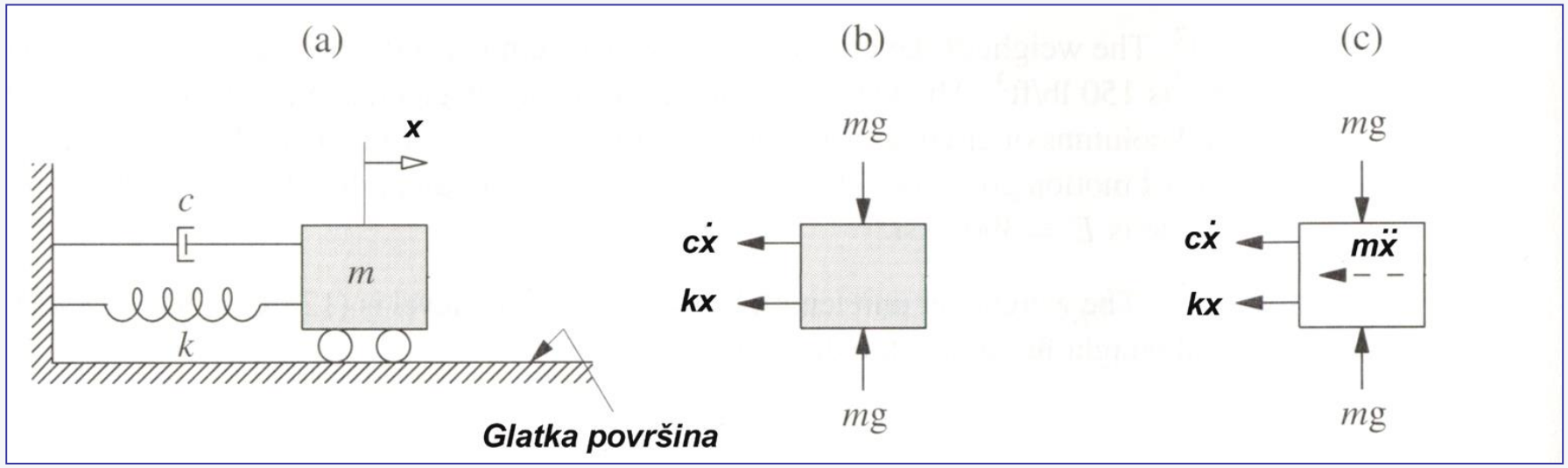






Slobodne prigušene vibracije

Idealizirani sustav: masa – opruga – viskozni prigušivač:



- *Elastična sila u opruzi zamjenjujuće krutosti k*
- *Sila prigušenja linearnog viskoznog prigušivača*
- *Sila inercije*

$$F_S = k \cdot x$$

$$F_D = -c \cdot v$$

$$F_I = m \cdot \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Viskozno prigušene slobodne vibracije

Diferencijalna jednadžba gibanja pri slobodnim prigušenim vibracijama sustava s jednim stupnjem slobode:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Podijelimo cijeli izraz s masom ***m***

$$\ddot{x} + 2\varsigma\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

pri čemu su

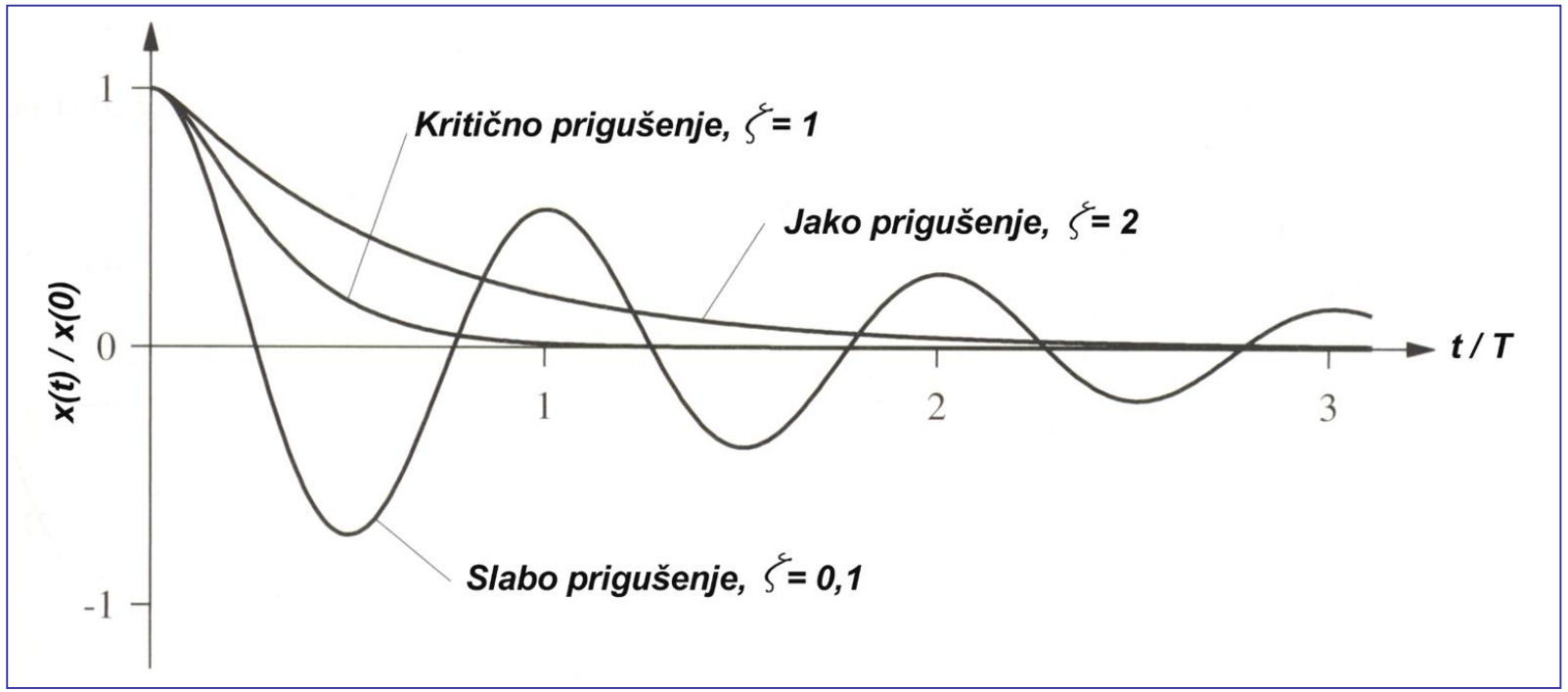
$\omega = \sqrt{k/m}$ *prirodna (vlastita) kružna frekvencija*

$\zeta = \dfrac{c}{2m\omega} = \dfrac{c}{c_{cr}}.$ *bezdimenzijski koeficijent prigušenja (omjer prigušenja)*

$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km} = \dfrac{2k}{\omega}$ *kritično prigušenje*

c *– koeficijent viskoznog prigušenja (mjera disipirane energije jednog ciklusa slobodnih vibracija).*

Viskozno prigušene slobodne vibracije



Kritično prigušenje je najmanja granica prigušenja u titrajućem sustavu kod koje se sustav nakon pomicanja vraća u ravnotežni položaj najbrže moguće, bez ikakvog titranja (aperiodički).

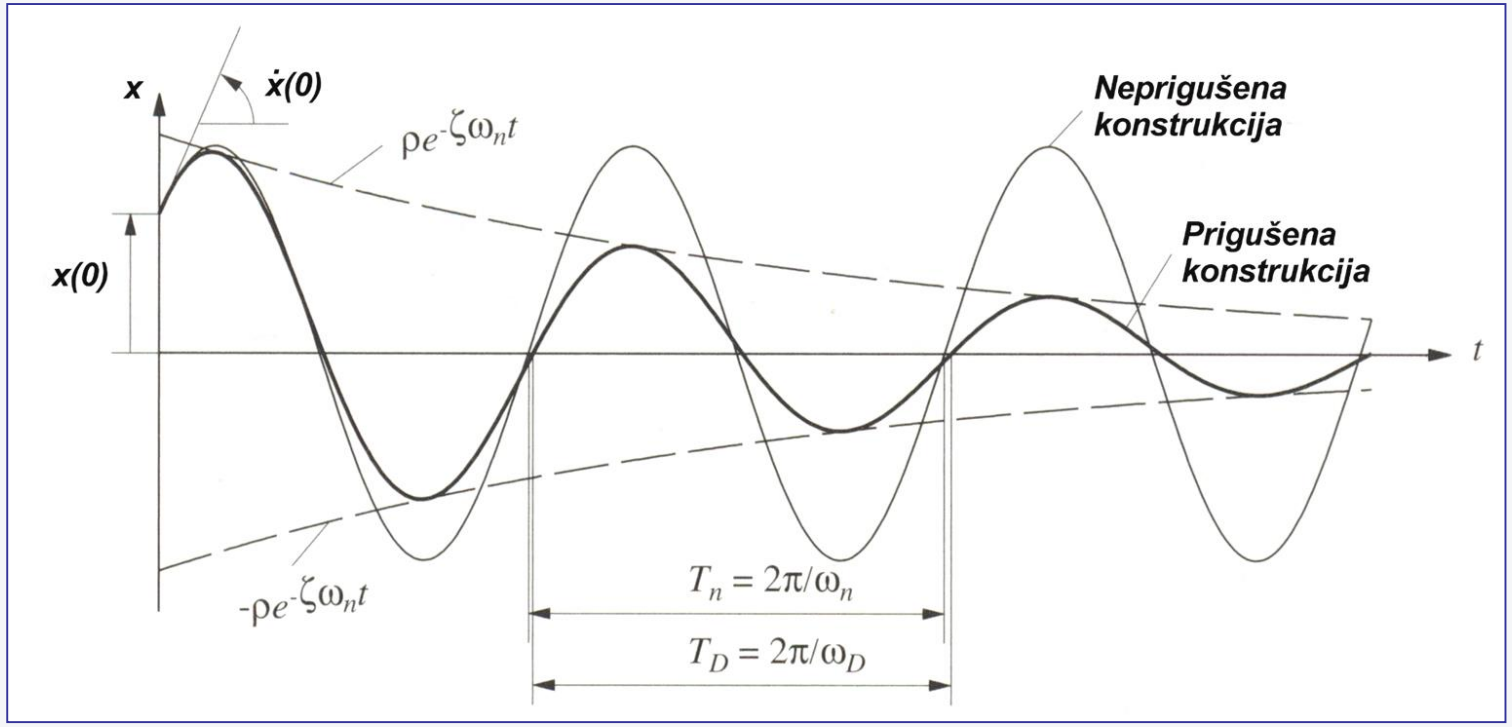
- $c = c_{cr}$ *tj.* $\zeta = 1 \Rightarrow$ *sustav se vraća u svoj ravnotežni položaj bez osciliranja;*
- $c > c_{cr}$ *tj.* $\zeta > 1 \Rightarrow$ *sustav ne oscilira već se vraća u svoj ravnotežni položaj, nešto sporije;*
- $c < c_{cr}$ *tj.* $\zeta < 1 \Rightarrow$ *sustav oscilira oko svog ravnotežnog položaja uz smanjenje amplitude.*

Slabo prigušene slobodne vibracije

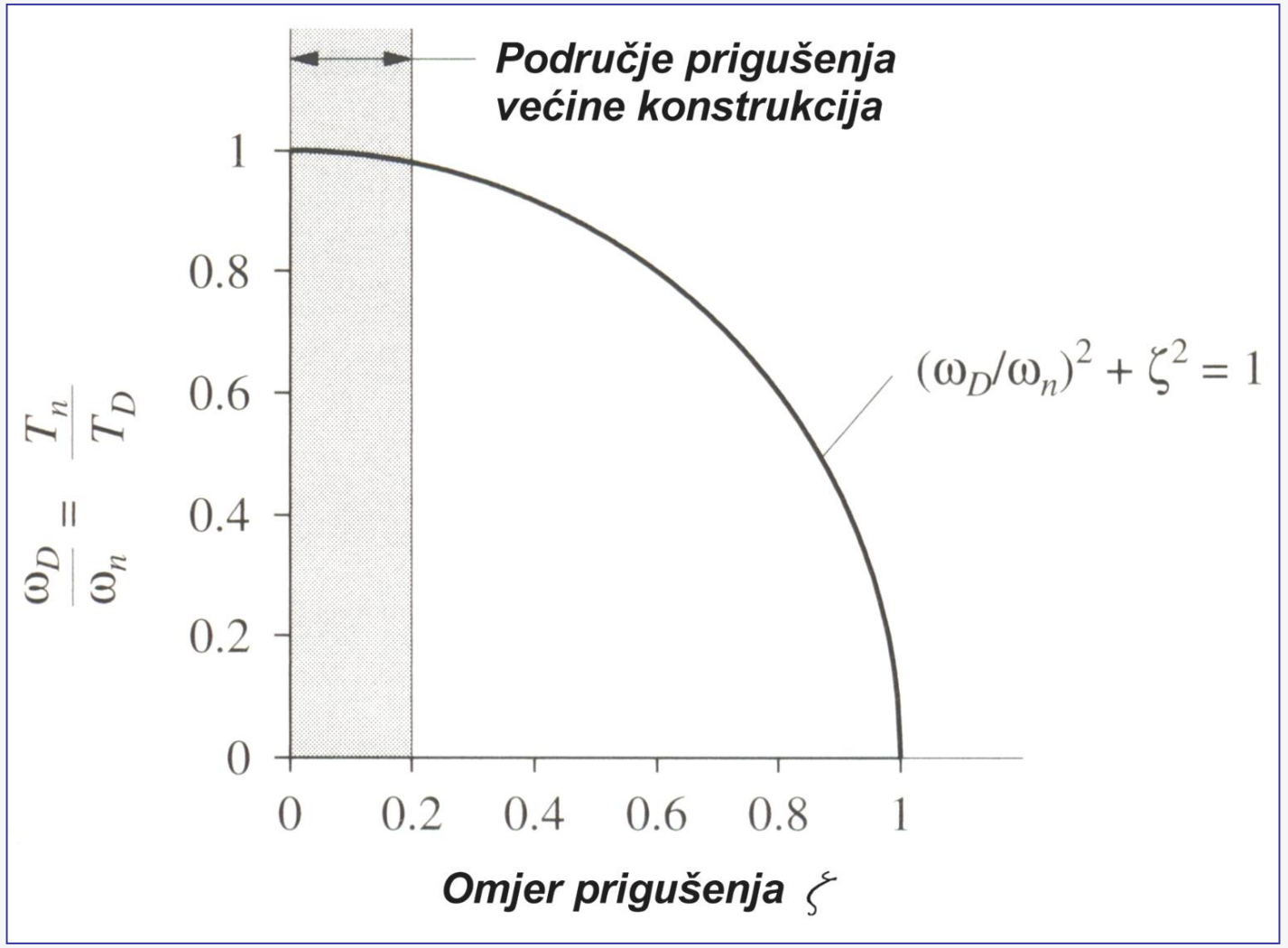
Diferencijalna jednadžba gibanja $\ddot{x} + 2\varsigma\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$

Izvod

Konačni oblik rješenja $x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[x(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega\, x(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right].$



Područje prigušenja građevinskih konstrukcija

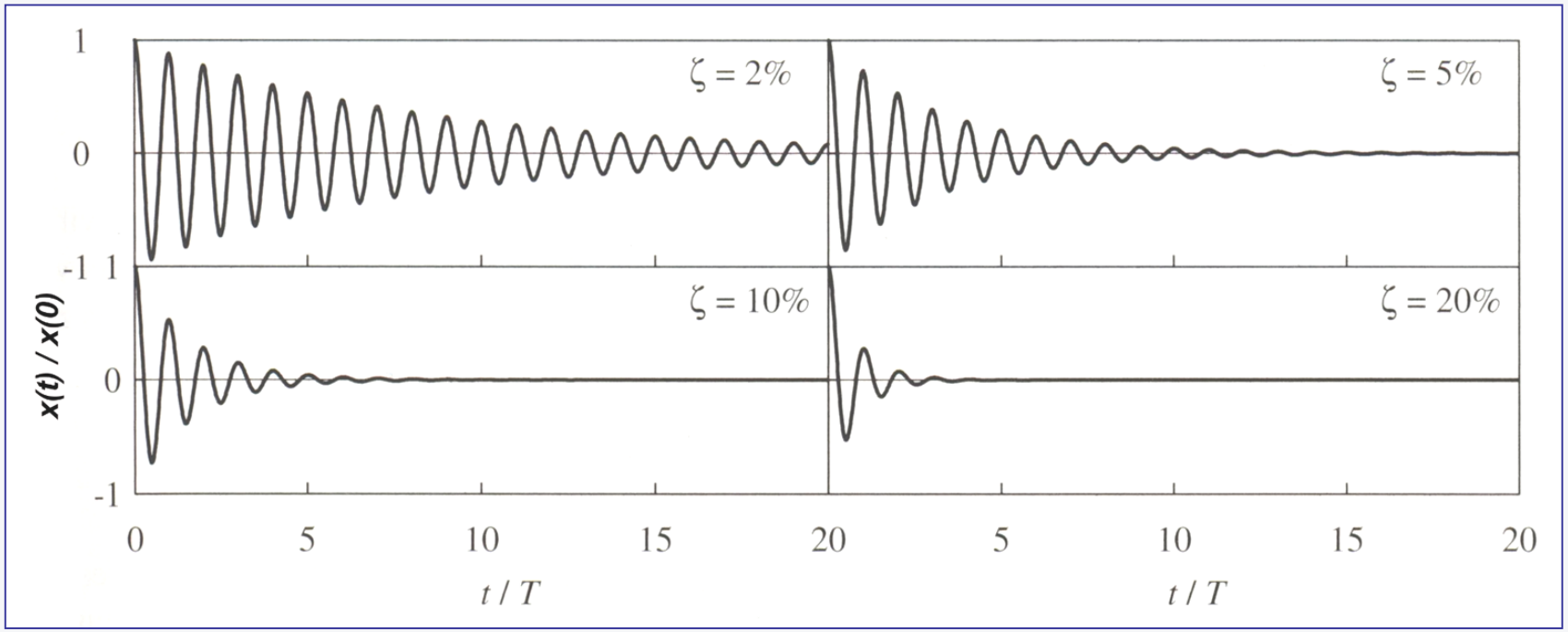


Područje prigušenja građevinskih konstrukcija

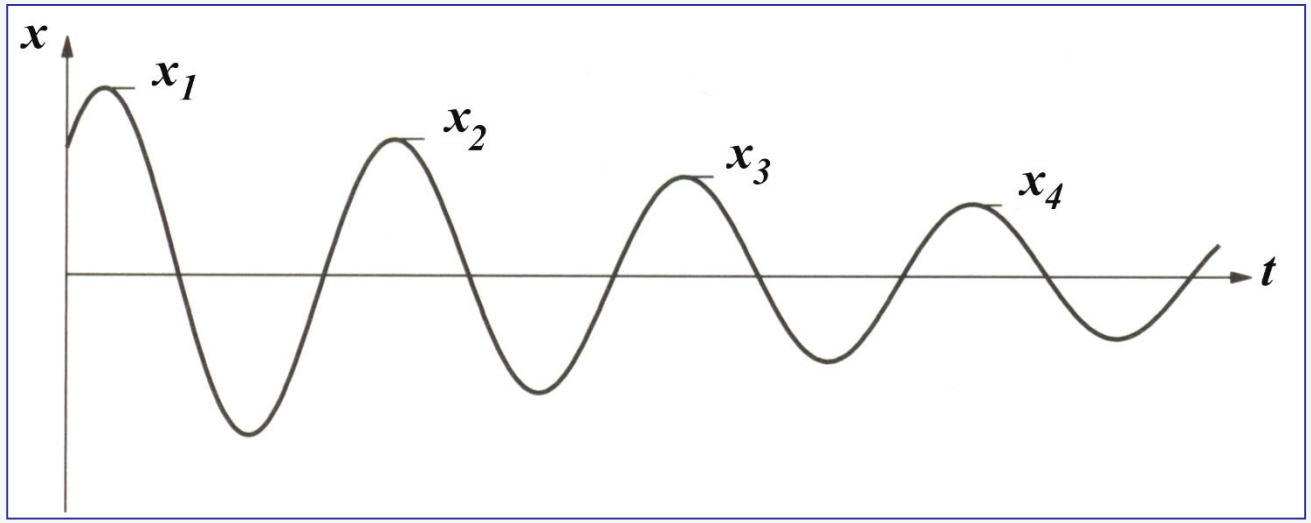
Većina konstrukcijskih i mehaničkih sustava ima prigušenje od 0,01 do najviše 0,2.

Kod takvih vrijednosti prigušenja mala je razlika između neprigušenih i prigušenih vlastitih kružnih frekvencija (i perioda).

Međutim, čak i mala vrijednost prigušenja relativno brzo disipira slobodne oscilacije istog sustava.



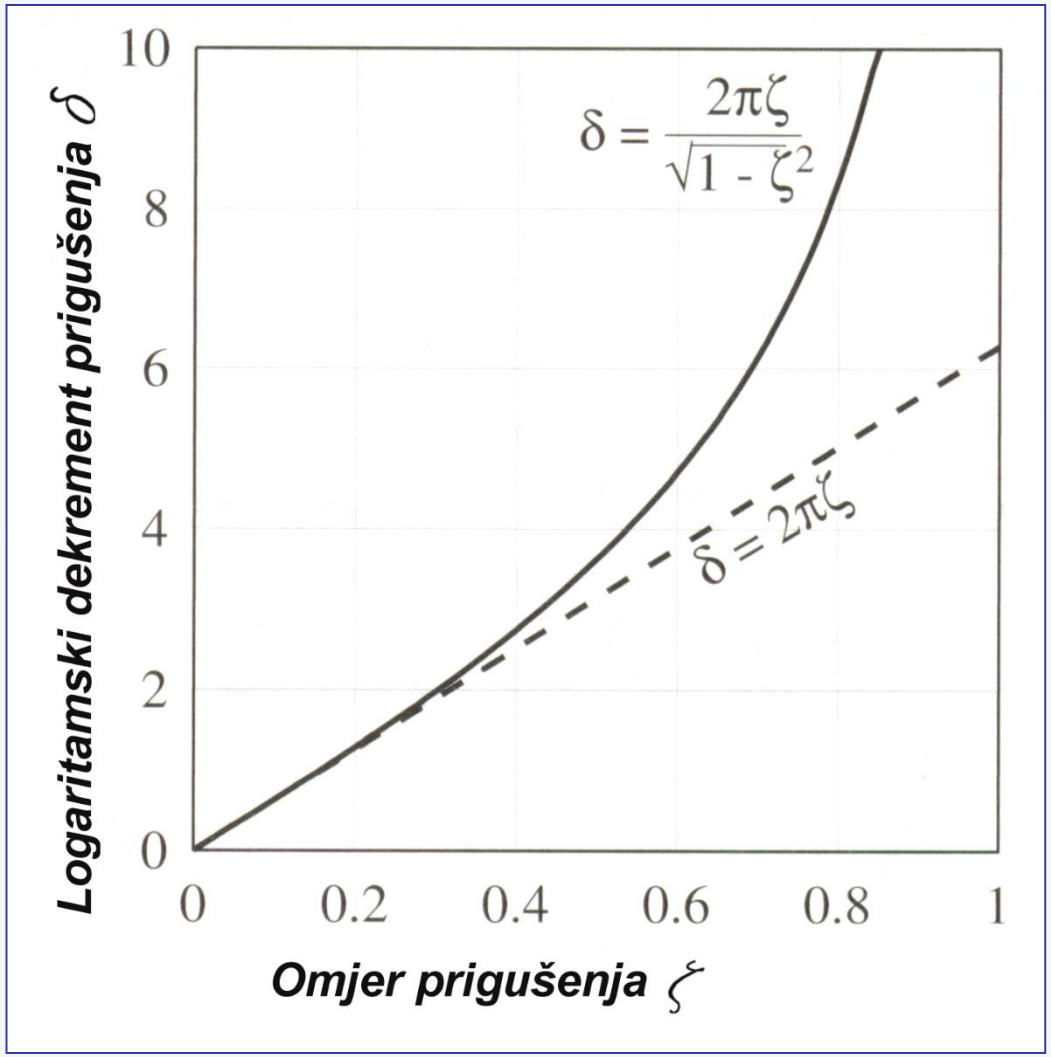
Logaritamski dekrement prigušenja δ



- *Uzastopne amplitude* $\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}}$

- *Bilo koje dvije amplitude*

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{x_i}{x_{i+j}} \approx 2\pi\zeta$$

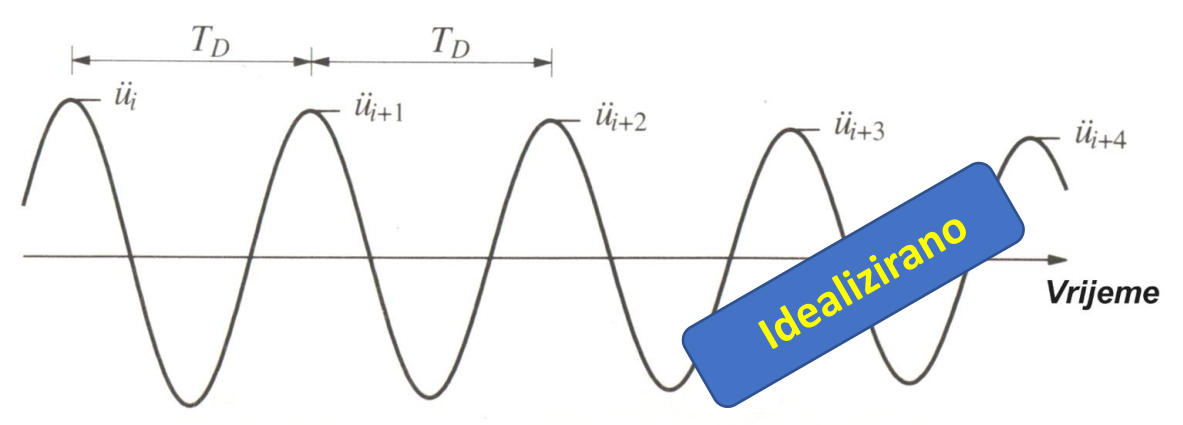


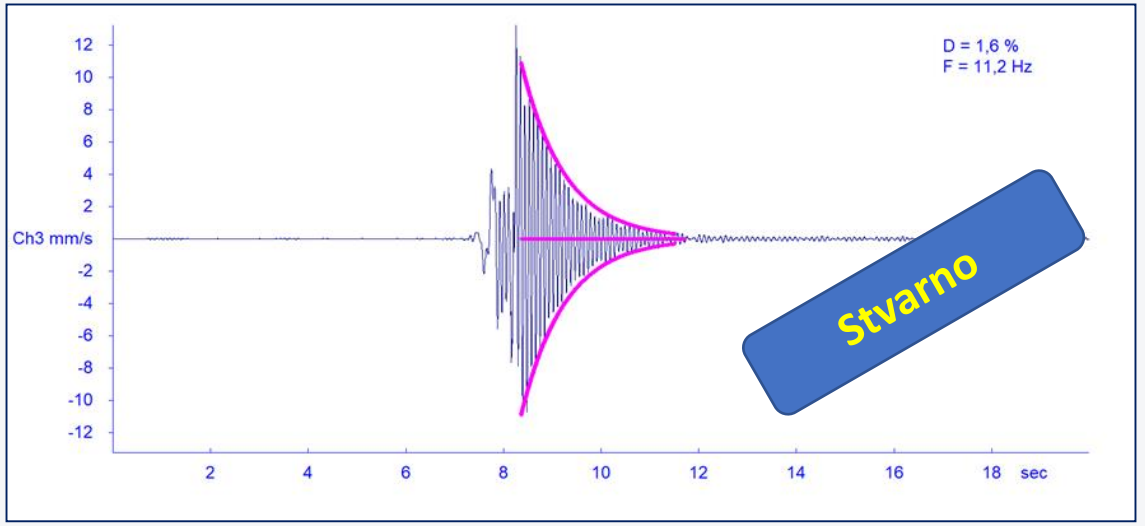
Ispitivanje (mjerenje) slobodnih vibracija

Eksperimentalno određivanje omjera prigušenja

- *Mjerenje pomaka*
- *Mjerenje brzina*
- *Mjerenje ubrzanja*

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\, j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \quad ili \quad \zeta = \frac{1}{2\pi\, j} \ln \frac{\dot{u}_i}{\dot{u}_{i+j}} \quad ili \quad \zeta = \frac{1}{2\pi\, j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$





Mjerenjem vremena jednog ciklusa vibracija možemo odrediti prirodni period T;

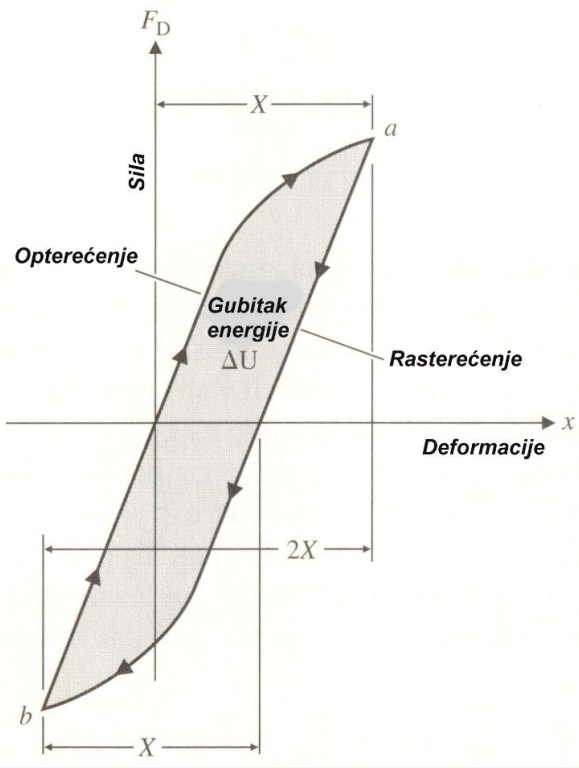
- *provjera točnosti proračuna*
- *provjera matematičkog modela.*

Slobodne vibracije s histereznim prigušenjem

Kada se materijal u konstrukciji ciklički napreže, energija se disipira unutar samog materijala unutarnjim trenjem uslijed klizanja među česticama tijekom deformiranja.

To se unutarnje prigušenje još naziva ***histereznim ili konstrukcijskim prigušenjem****.*

$$\Delta U = \int F_D dx = \pi \eta k X^2$$



gdje su

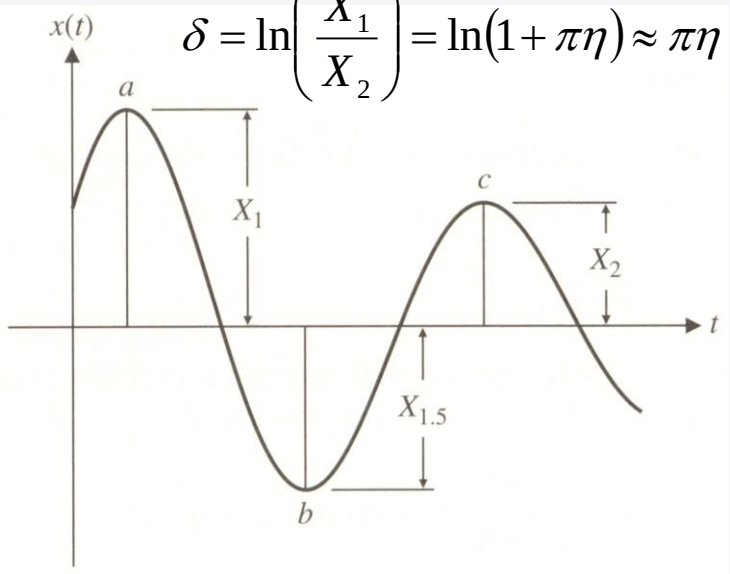
η – bezdimenzionalni konstrukcijski koeficijent prigušenja materijala
k – ekvivalentna krutost sustava
X – amplituda pomaka
π – konstanta proporcionalnosti.

Slobodne vibracije s histereznim prigušenjem

Kada se materijal optereti i rastereti, krivulje naprezanja i deformacije ne prate isti put, već formiraju zatvorenu petlju poznatu kao histerezna petlja.

Površina unutar te petlje predstavlja količinu energije koja se pretvorila u toplinu (disipirana energija) tijekom jednog ciklusa.

$$\delta = \ln\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \ln(1+\pi\eta) \approx \pi\eta$$



Gubitak energije po ciklusu: neovisan o frekvenciji a proporcionalan kvadratu pomaka (ili deformacije).

Unutarnje trenje: nastaje zbog molekularnog trenja ili mikroskopskih pomaka unutar kristalne rešetke materijala.

Primjena: ključno je u analizi potresnog odziva, dimenzioniranju prigušivača za zgrade i mostove te u proučavanju ponašanja gume, čelika i tla pod dinamičkim opterećenjima.

Ekvivalentno viskozno prigušenje: $c_e = \frac{\eta k}{\omega}$

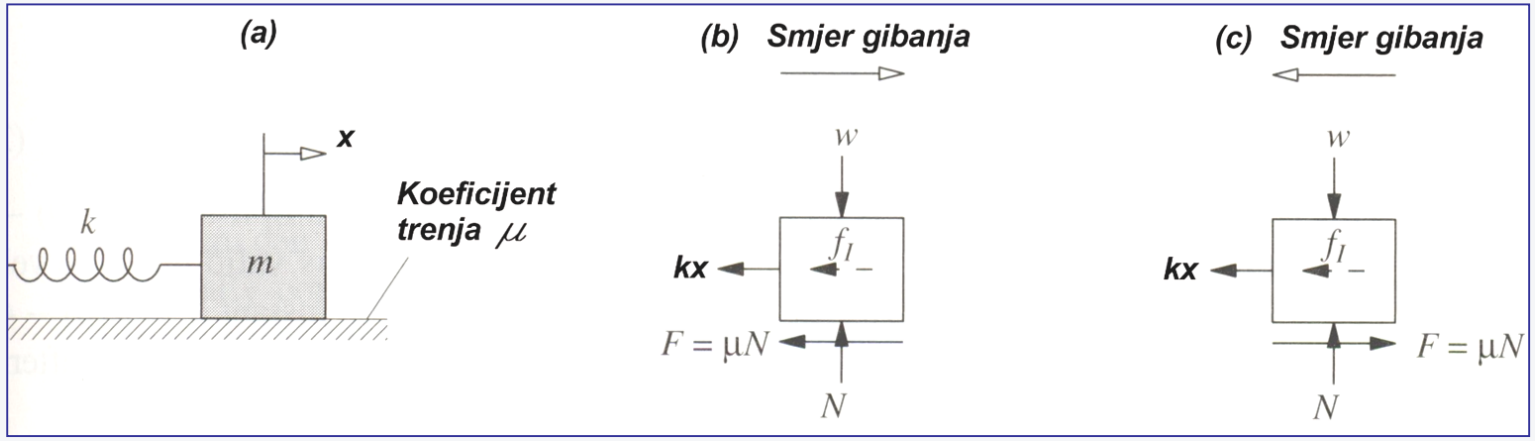
Slobodne vibracije s Coulomb-ovim prigušenjem (trenjem)

Coulombovo prigušenje ili prigušenje suhog trenja nastaje relativnim gibanjem na dodirnim plohama ili u dodirnim čvorovima susjednih konstrukcijskih elemenata.

$$F_D = \mu N$$

gdje su: ***μ*** *– koeficijent trenja a* ***N*** *normalna sila na kontaktnu plohu.*

Za razliku od viskoznog prigušenja (gdje sila ovisi o brzini), sila prigušenja kod Coulombovog trenja je konstantnog iznosa, a njezin smjer se mijenja ovisno o smjeru gibanja.

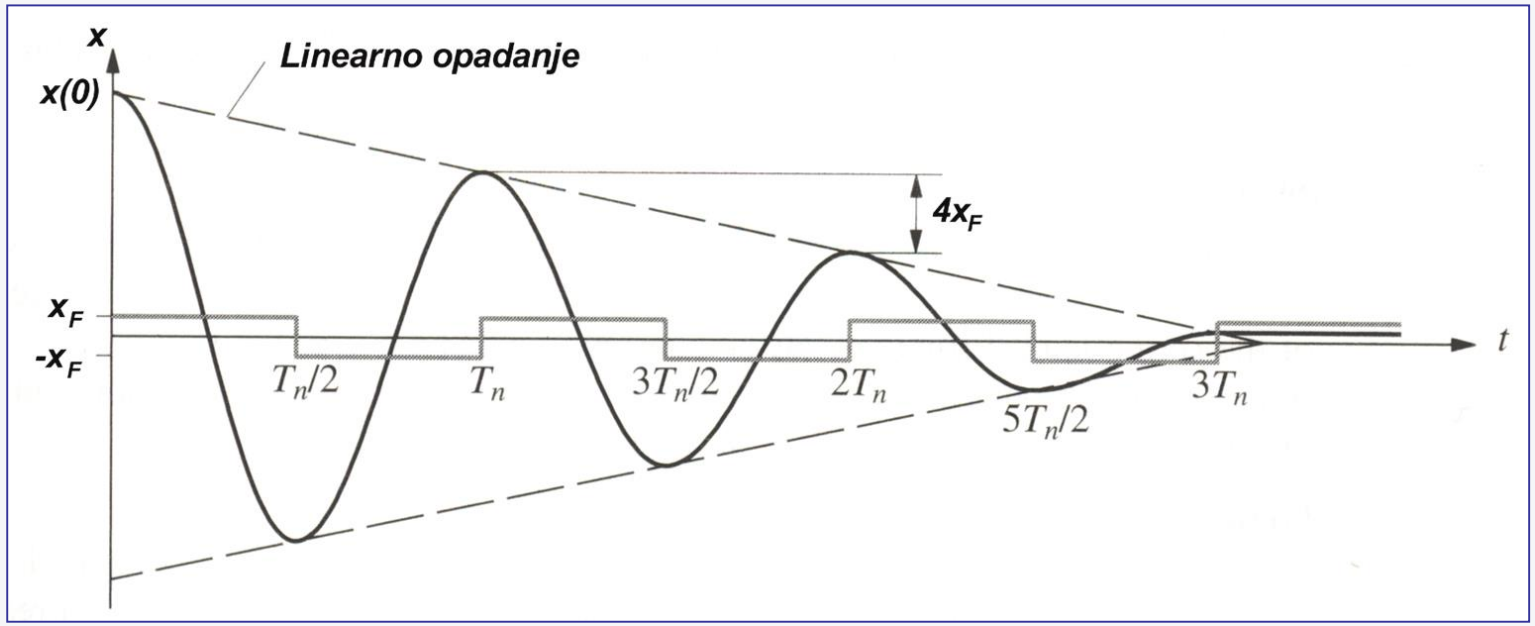


Dvije diferencijalne jednadžbe gibanja po poluciklusu

$$b) \quad m\ddot{x} + kx = -F_D$$

$$c) \quad m\ddot{x} + kx = F_D$$

Slobodne vibracije s Coulomb-ovim prigušenjem (trenjem)



Ekvivalentno viskozno prigušenje:

$$c_e = \frac{4F}{\pi\omega X}$$

***Gubitak amplitude**: U svakom punom ciklusu (jednom titraju), amplituda sustava smanjuje se za fiksnu vrijednost* $\Delta A = 4x_F = \frac{4\mu N}{k}$ *odnosno za* $\Delta A = 2x_F = \frac{2\mu N}{k}$ *po svakom poluciklusu).*

***Zona zaglavljivanja**: Sustav će se prestati gibati onog trenutka kada elastična sila opruge ($k \cdot x$) postane manja od sile statičkog trenja. Zbog toga se tijelo najčešće zaustavlja izvan idealnog (početnog) ravnotežnog položaja ($x \neq 0$), unutar tzv. "zone mrtvog hoda" ili zone zaglavljivanja.*