

Sveučilišni diplomski studij Građevinarstvo
Smjer: Nosive konstrukcije

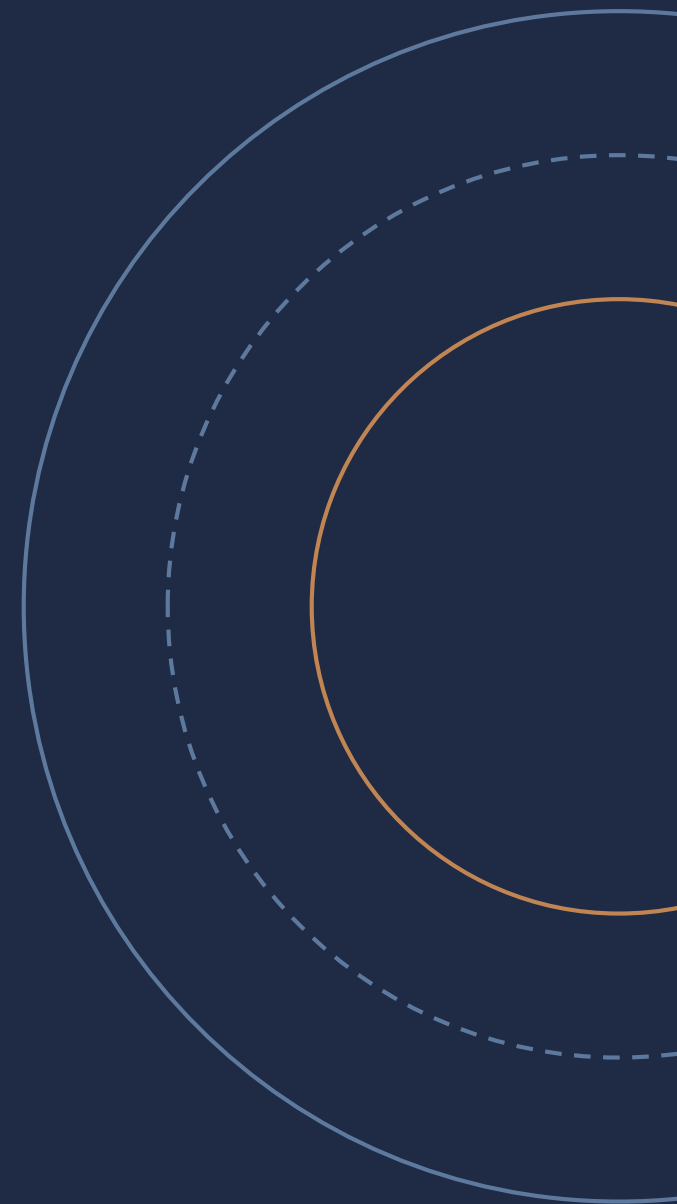
Dinamika konstrukcija

Prof. dr. sc. IVICA GULJAŠ, GrAFOS, kabinet II.1

Izv. prof. dr. sc. GORAN GAZIĆ, GrAFOS, kabinet II.25

Semestar I.

5 ECTS



Što je dinamika konstrukcija?

Riječ „Dinamika” jednostavno znači „promjena s vremenom”.

1

Dinamika konstrukcija je dio teorije konstrukcija koji izučava utjecaj dinamičkih opterećenja na konstrukcije.

2

Dinamička opterećenja su opterećenja koja se odlikuju značajnom promjenom intenziteta i smjera djelovanja tijekom vremena pri kojima se deformacije konstrukcije mijenjaju tako da se utjecaj ubrzanja mase konstrukcije odnosno nastale inercijske sile više ne mogu zanemarivati.

3

Deformacije dinamičkog odziva su uglavnom oscilatorne pri čemu konstrukcija oscilira oko položaja stabilne ravnoteže.

DEFINICIJE

Dinamičko opterećenje

opterećenje koje se mijenja tijekom vremena smjerom i intenzitetom

Odziv konstrukcije

(pomaci, reakcije, unutarnja naprezanja, itd) – također su funkcija vremena – dinamički odziv

Dinamički stupanj slobode

Broj neovisnih komponenti pomaka neophodnih za cjelovit opis djelovanja svih značajnih inercijskih sila.

U kojem slučaju opterećenje uzeti kao dinamičko?

Jedan od odgovora: ako je vrijeme nanošenja djelovanja opterećenja blisko prirodnom (vlastitom) periodu konstrukcije, T (prirodni period vibracija je vrijeme jednog punog ciklusa slobodnih vibracija konstrukcije).

1 Vibracije i/ili oscilacije

Vibracije su pomaci konstrukcije koji osciliraju sukladno deformacijama konstrukcije. Oscilacije označavaju pomake koji ne moraju biti povezani samo s deformacijama krutog tijela.

2 Slobodne vibracije

Slobodne vibracije su oscilatorno (periodičko) gibanje konstrukcijskog sustava koje se odvija bez djelovanja vanjske periodične uzbudne sile nakon što je sustav izbačen iz stanja ravnoteže.

Gibanje nastaje isključivo zbog početnog poremećaja – bilo u obliku početnog pomaka ili početne brzine. Nakon tog početnog impulsa, sustav je prepušten samome sebi te vibrira pod utjecajem vlastitih unutarnjih sila (inercijskih, elastičnih i prigušnih).

3 Prisilne vibracije

Vanjske uzbudne sile su stalno prisutne tijekom vibriranja konstrukcije.

Vlastita (prirodna) dinamička svojstva konstrukcija



Golden Gate Bridge
San Francisco, California
 $L = 1280 \text{ m}$

Poprečne vibracije

$$T = 18,20 \text{ s}$$

Vertikalne vibracije

$$T = 10,90 \text{ s}$$

Uzdužne vibracije

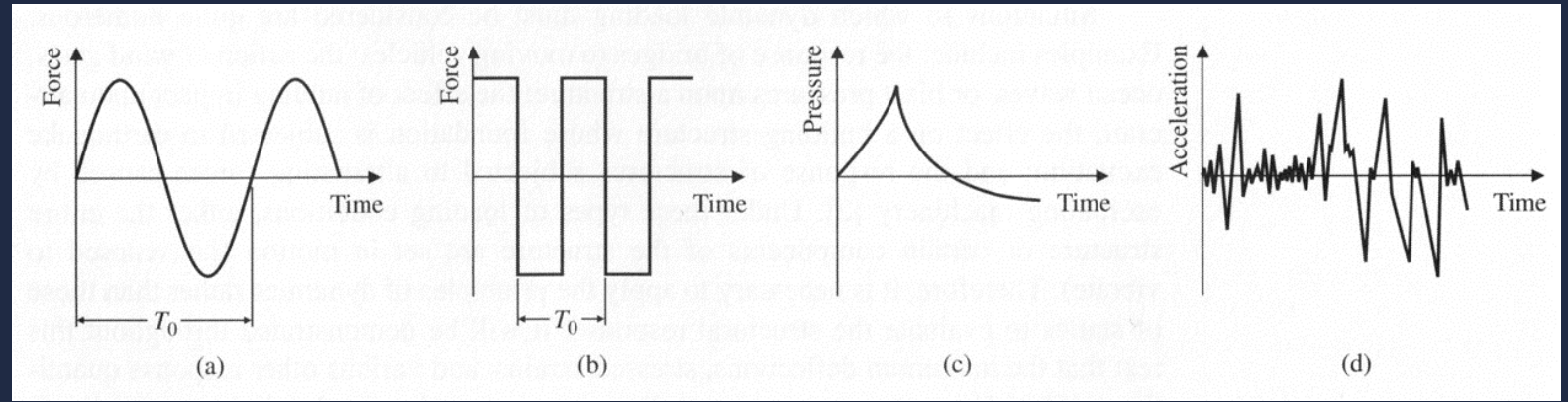
$$T = 3,81 \text{ s}$$

Torzijske vibracije

$$T = 4,43 \text{ s}$$

Vrste dinamičkih opterećenja

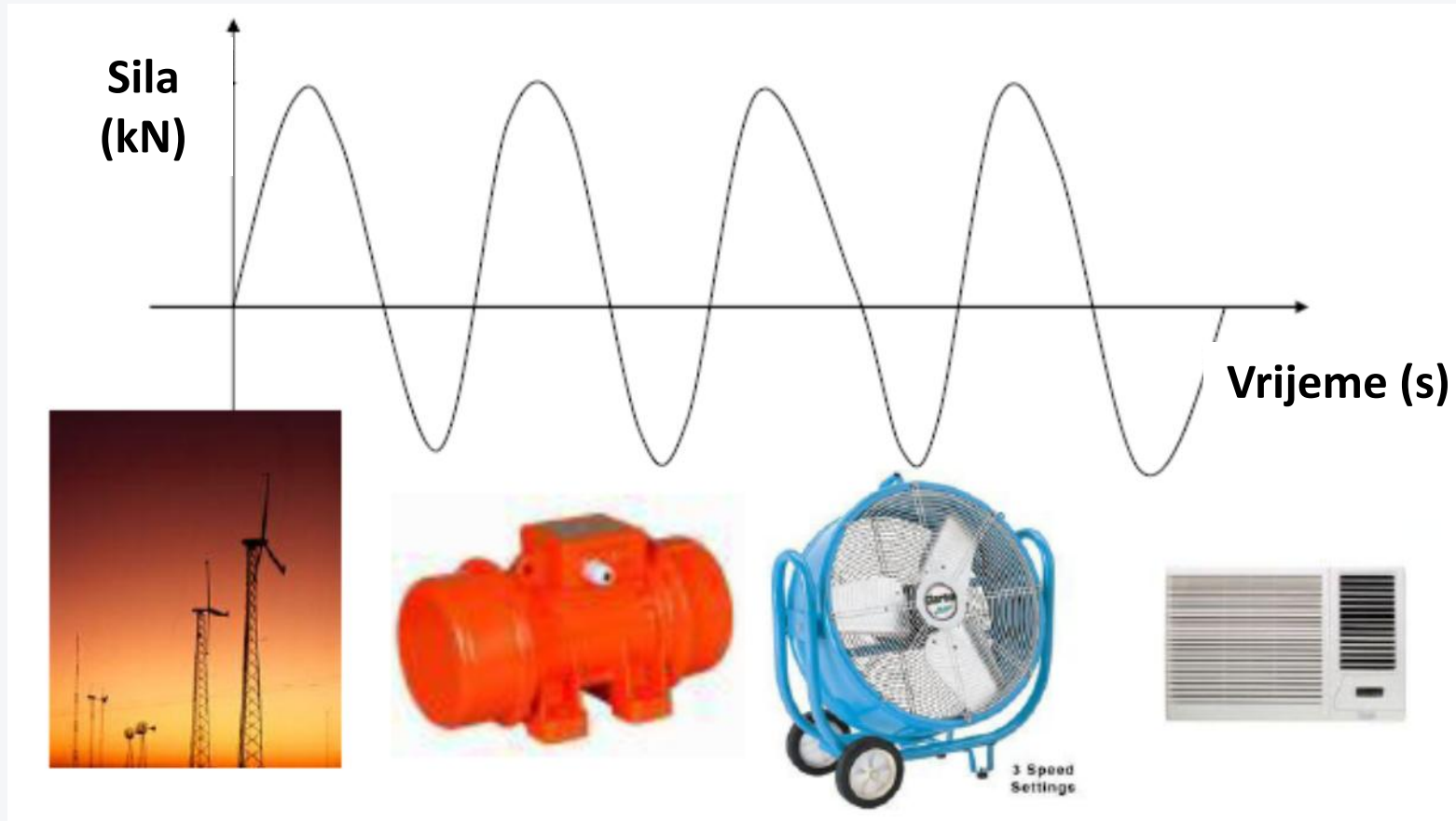
- ✓ Deterministička / Nedeterministička
- ✓ Zadana / Slučajna
- ✓ Periodička / Neperiodička



Izvori dinamičkih opterećenja

- ✓ Priroda i okoliš: vjetar, potres, valovi
- ✓ Rad strojeva: rotori, turbine, tekuće trake
- ✓ Prometno opterećenje i gibanje vozila
- ✓ Udari i eksplozije

Harmonijska opterećenja od rotirajućih strojeva

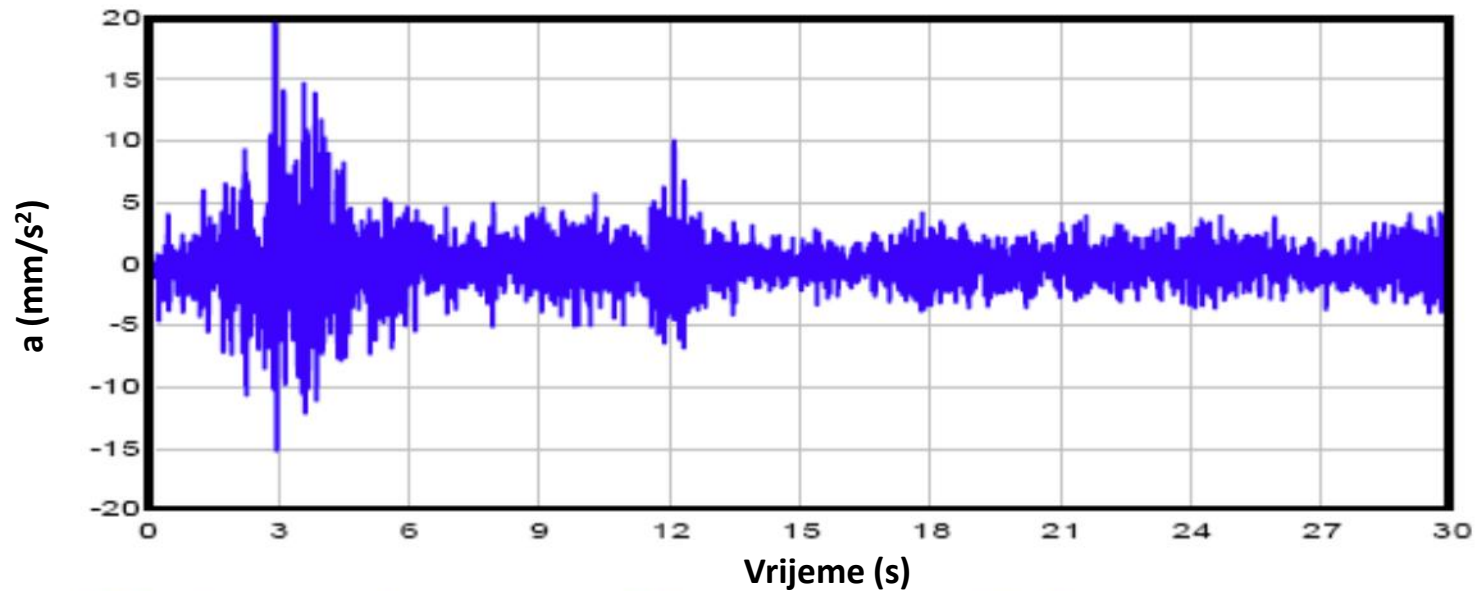


Harmonijsko (periodičko)

Zadano

Determinističko

Podrhtavanje tla uslijed prometnog opterećenja

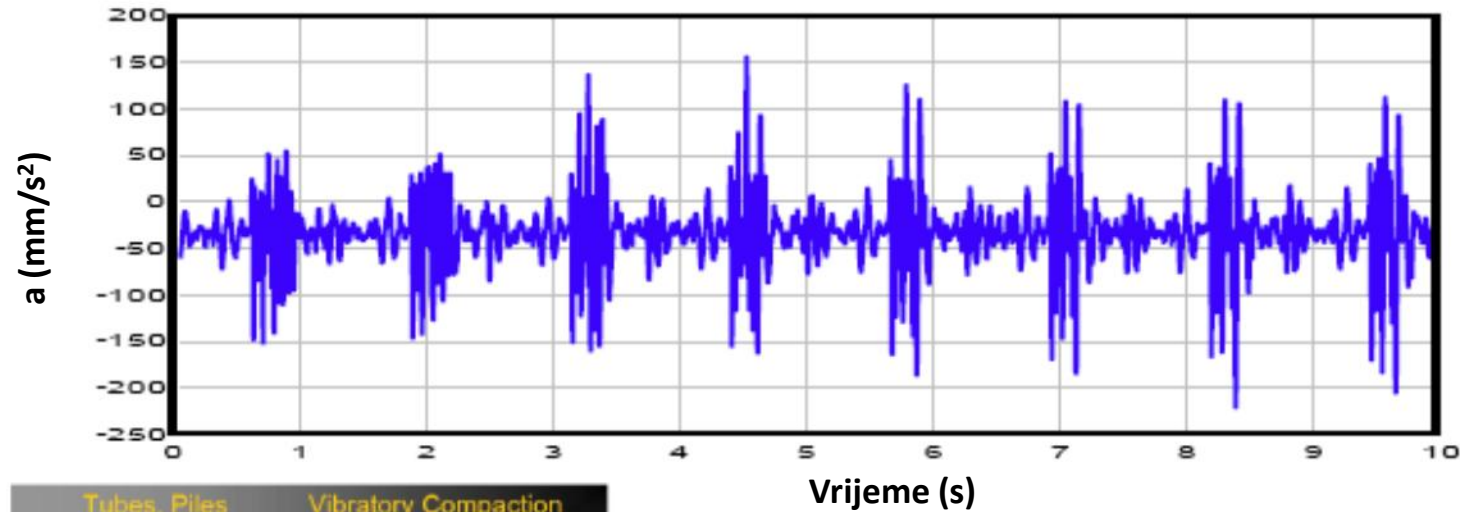


Periodičko

Zadano

Determinističko

Vibracije uslijed građevinskih radova



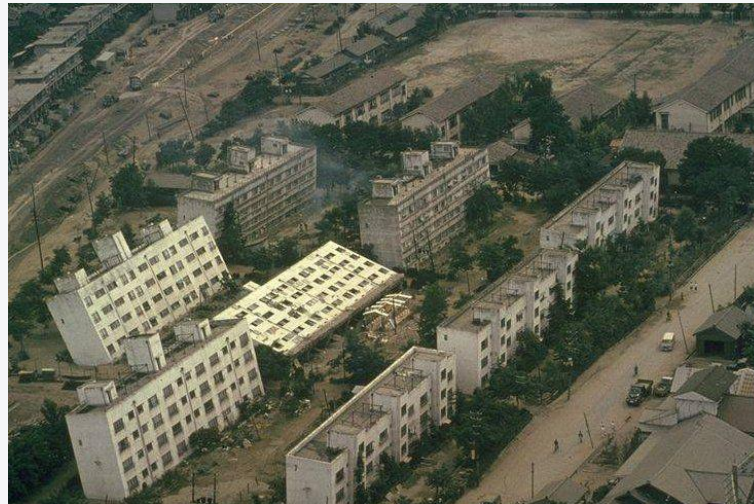
Periodičko

Zadano

Determinističko

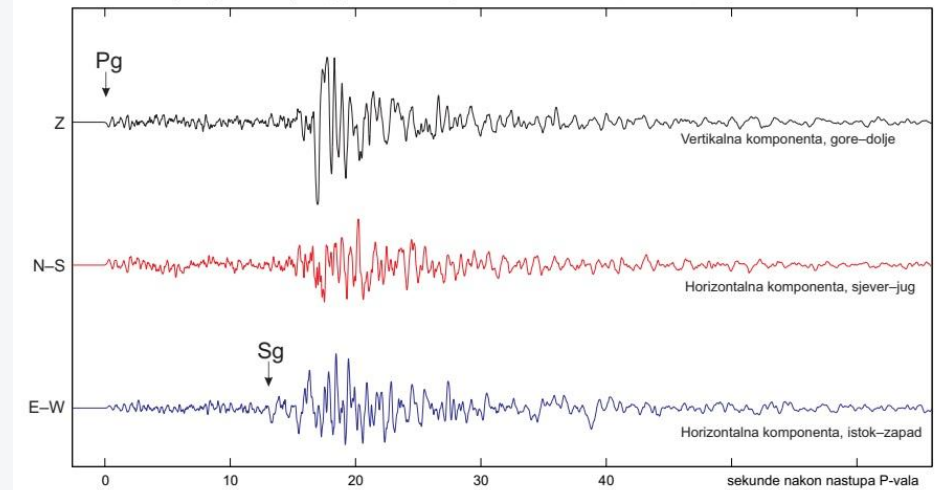


Podrhtavanja tla uslijed potresa

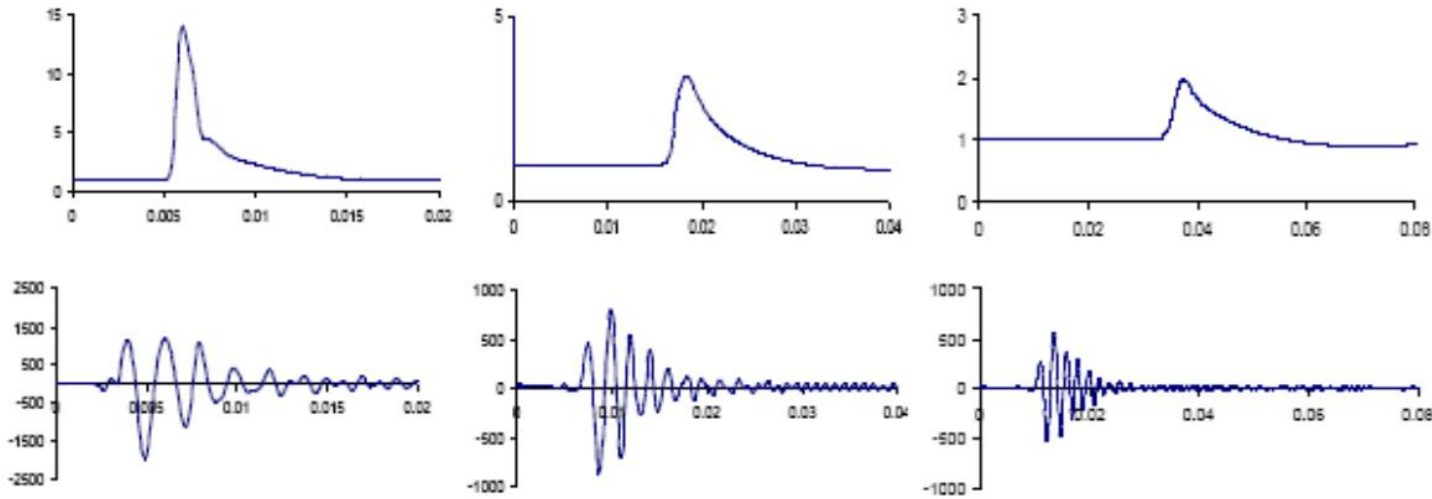


Neperiodičko, Slučajno, Nedeterminističko ?

Seizmološka postaja Plitvice (PLIT), potres 22. ožujka 2020. u 05:24 UTC, Mw = 5.4, Zagreb



Udari i eksplozije



10m od središta
eksplozije

20m od središta
eksplozije

30m od središta
eksplozije



On June 25, 1996, a terrorist truck bomb exploded outside Khobar Tower, Saudi Arabia,



On November 20, 2003, HSBC bank and the British consulate in Turkey

Neperiodičko
Zadano / Slučajno?
Determinističko

Utjecaj i posljedice djelovanja dinamičkih opterećenja

MALO

Utjecaj na normalno funkcioniranje osjetljive opreme

(kod nekih izrazito osjetljivih postrojenja, dozvoljena podrhtavanja podloge mogu biti manja i od $0,01\mu\text{m}$);

UMJERENO

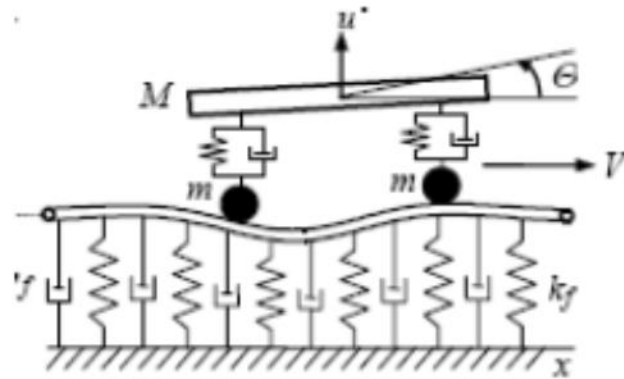
Uznemiravajuće za korisnike

(ljudi mogu osjetiti vibracije veće od $0,3\text{mm/s}$ dok vibracije veće od 3mm/s postaju uznemiravajuće);

JAKO

Mogu uzrokovati oštećenja počev od onih kozmetičkih (od pukotina na oblogama i mikropukotina u konstrukciji) do velikih konstrukcijskih oštećenja.

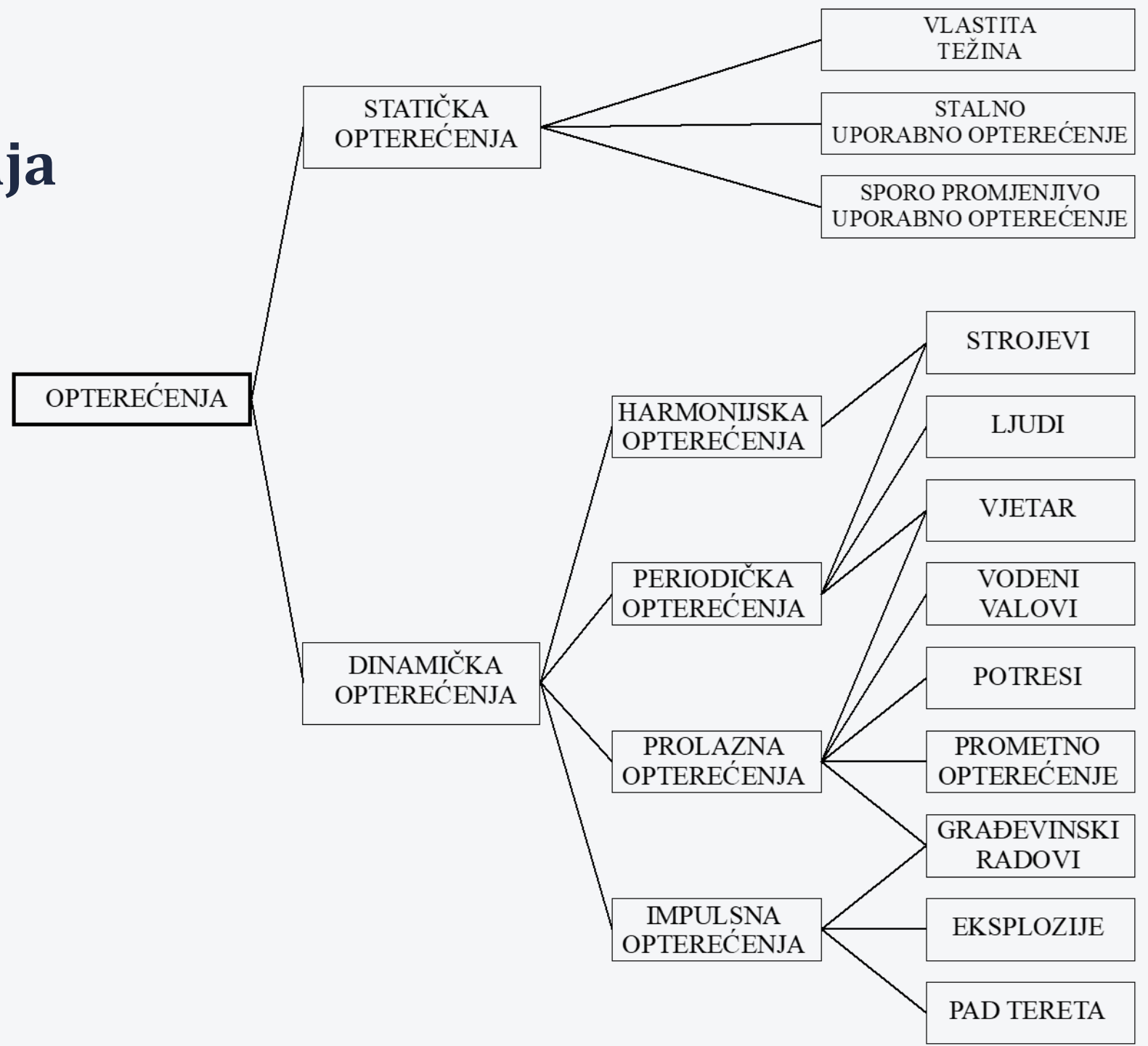
Moguća rješenja ublažavanja vibracija



Aktivna i pasivna
izolacija vibracija



Podjela opterećenja



Osnovna razlika između statičke i dinamičke analize

● Uzbuda i odziv su funkcije vremena $f(t)$
(Ne postoji samo jedno rješenje već se rješenje prati u nekom vremenskom intervalu.)

● Pojava **SILE INERCIJE**



Otpornost uslijed unutarnjih elastičnih sila u konstrukciji.

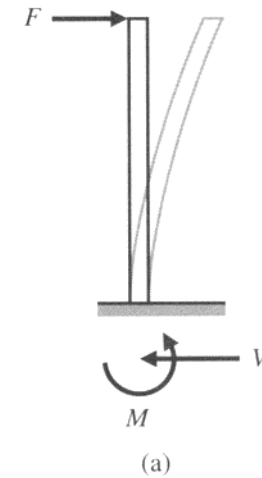
Statička analiza:

Odziv na statičko opterećenje su samo **pomaci**.

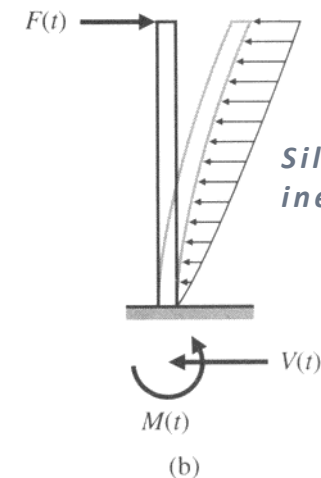
Ubrzanja (akceleracije) konstrukcije proizvode inercijske sile.

Dinamička analiza:

Odziv na dinamičko opterećenje čine **pomaci, brzine i ubrzanja**.



Statičko opterećenje



Dinamičko opterećenje

Sile inercije

Metodologija (hodogram) dinamičke analize

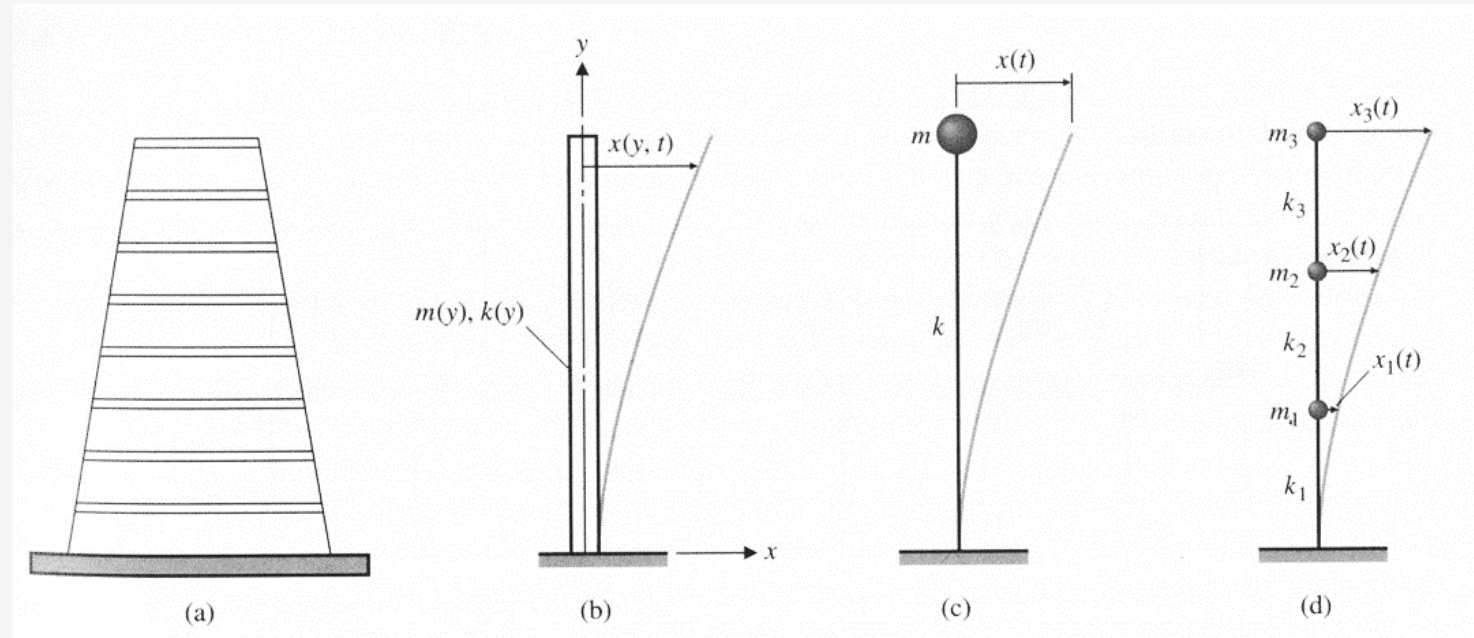
1 Postavka i opis fizikalnog problema

2 Definiranje **mehaničkog modela** geometrija, kinematika, materijali i zakoni ponašanja, opterećenje, rubni uvjeti

Rješavanje mehaničkog modela

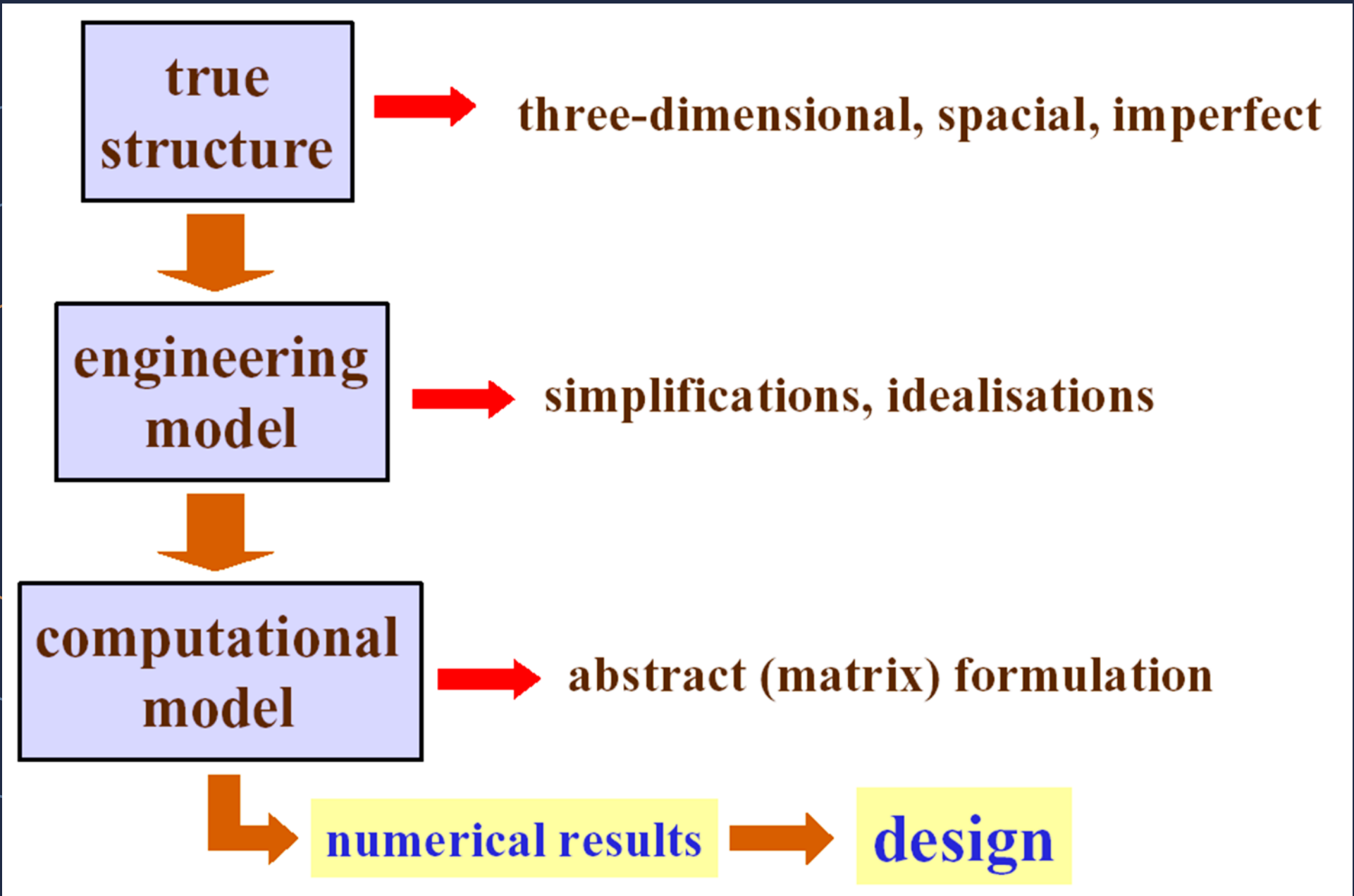
- 3 ➤ **Kontinuirani model**
parcijalne diferencijalne jednačbe
- **Diskretni model**
„obične” diferencijalne jednačbe

4 Interpretacija (opis) rezultata



Mehanički model višekatne zgrade:

- a) fizikalni prikaz;
- b) kontinuirani model;
- c) diskretni model s jednim stupnjem slobode;
- d) diskretni model s tri stupnja slobode.

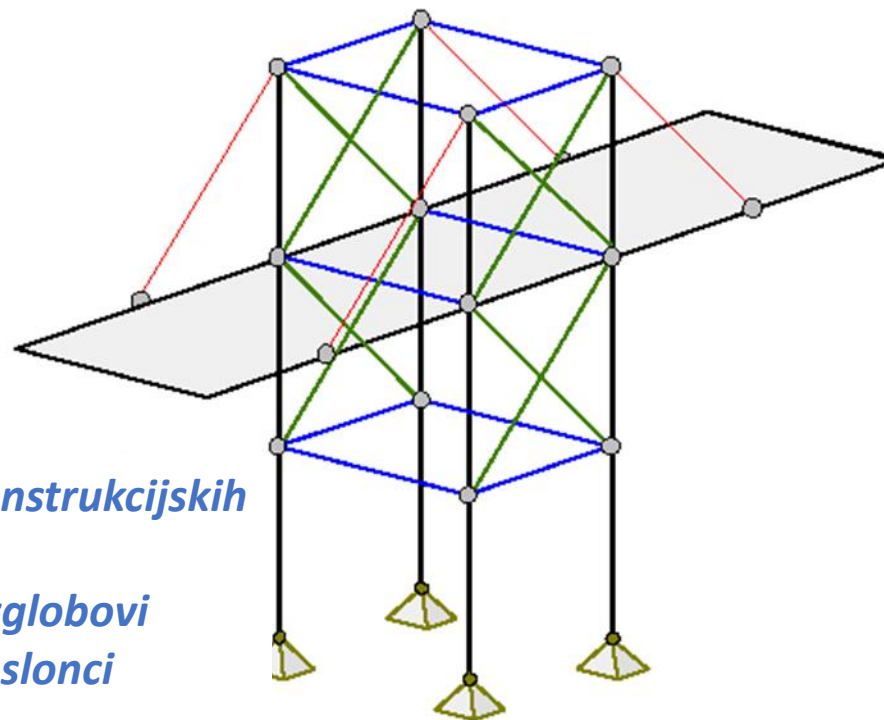




© 1980 by S.E.P.P. and Peyo



- *Ravne osi konstrukcijskih elemenata*
- *Idealizirani zglobovi*
- *Nepomični oslonci*
- ...



FE-Program:
 $K V = P$

Dinamički stupanj slobode

1

Single Degree of Freedom **SDOF** / Sustav s jednim stupnjem slobode

Ako je samo jedna koordinata dovoljna za definiranje položaja ili geometrije mase konstrukcijskog sustava u bilo kojem trenutku vremena.

2

Multiple Degree of Freedom **MDOF** / Sustav s više stupnjeva slobode

Ako je neophodna više od jedna koordinata za definiranje položaja ili geometrije različitih masa konstrukcijskog sustava u potpunosti i u bilo kojem trenutku vremena.

3

Kontinuirani (raspodijeljeni) sustavi

Ako je masa sustava raspodijeljena po cijeloj duljini konstrukcijskih elemenata pri čemu se smatra da masa ima beskonačno mnogo stupnjeva slobode.

Broj neovisnih komponenti pomaka neophodnih za definiranje utjecaja svih značajnih sila inercije u konstrukciji.

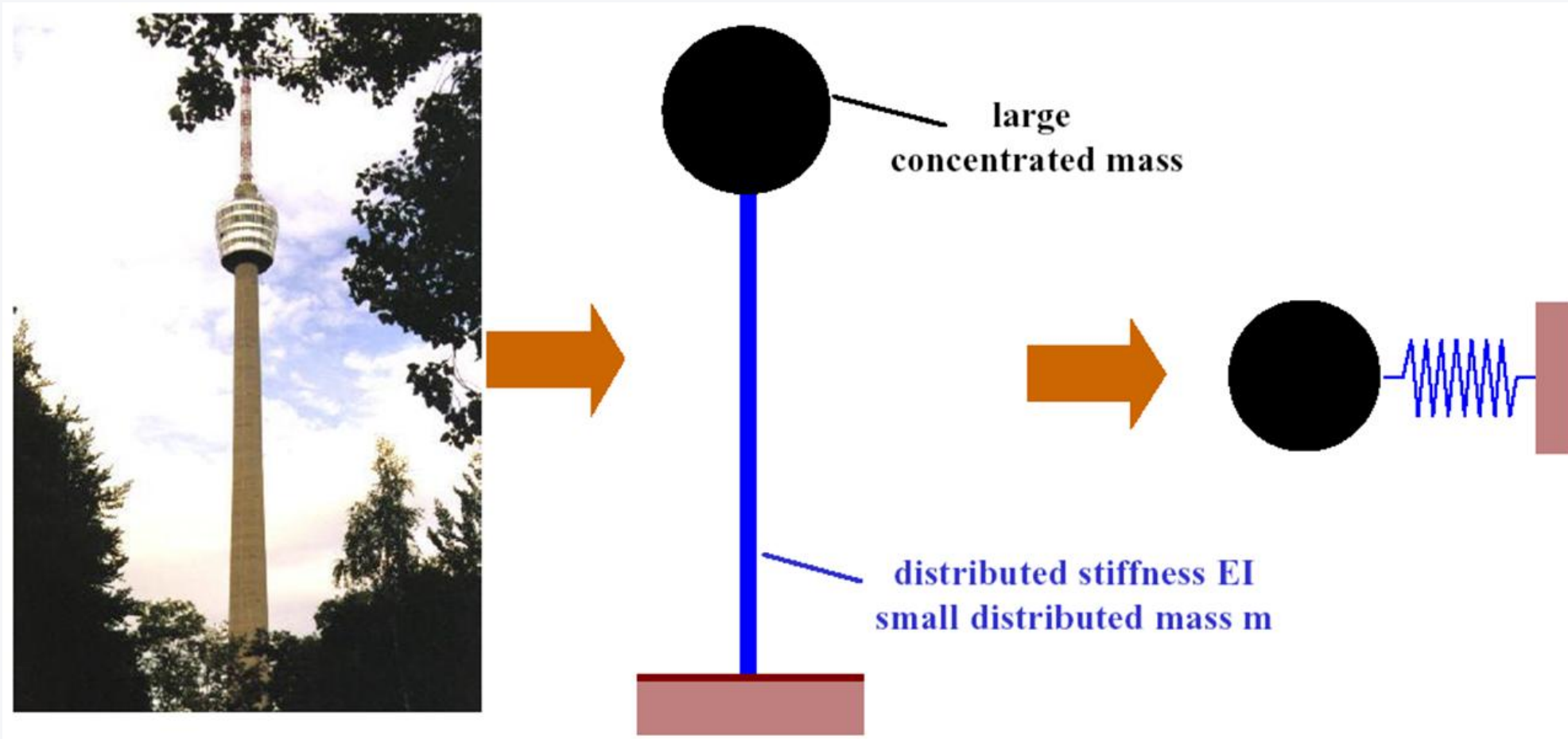
Broj koordinatnih smjerova u kojima se vrijednosti parametara odziva moraju odrediti kako bi se ponašanje matematičkog modela moglo definirati u potpunosti.



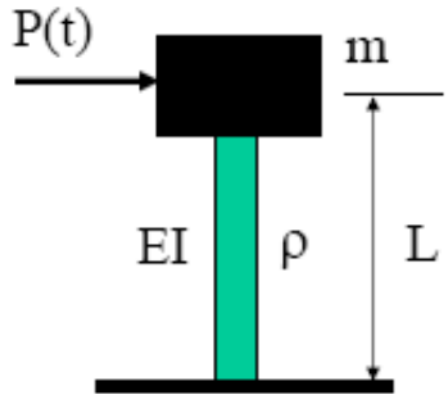
Sustavi s jednim stupnjem slobode **SDOF**

SDOF - samo je jedna prostorna koordinata neophodna za cjelovito definiranje konfiguracije konstrukcijskog sustava.

Sustavi s jednim stupnjem slobode SDOF

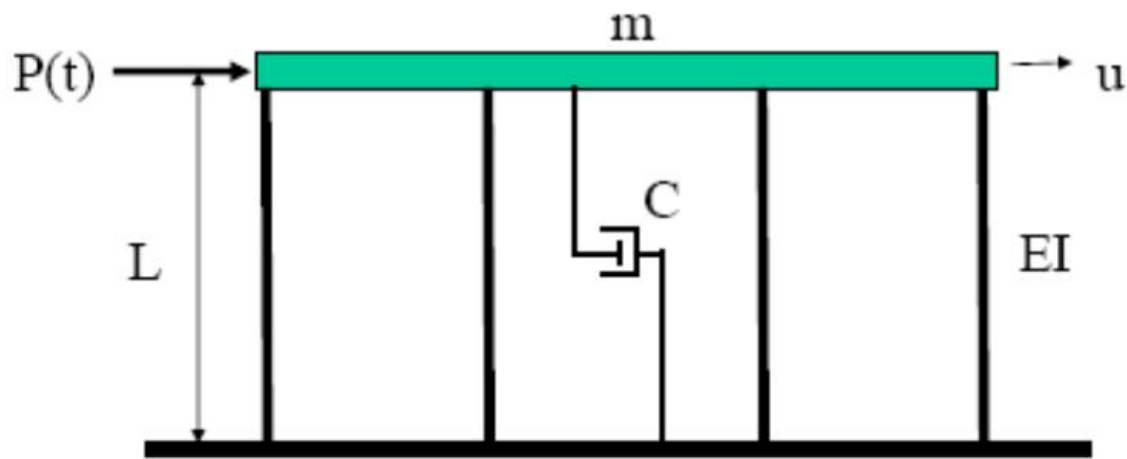


Sustavi s jednim stupnjem slobode SDOF



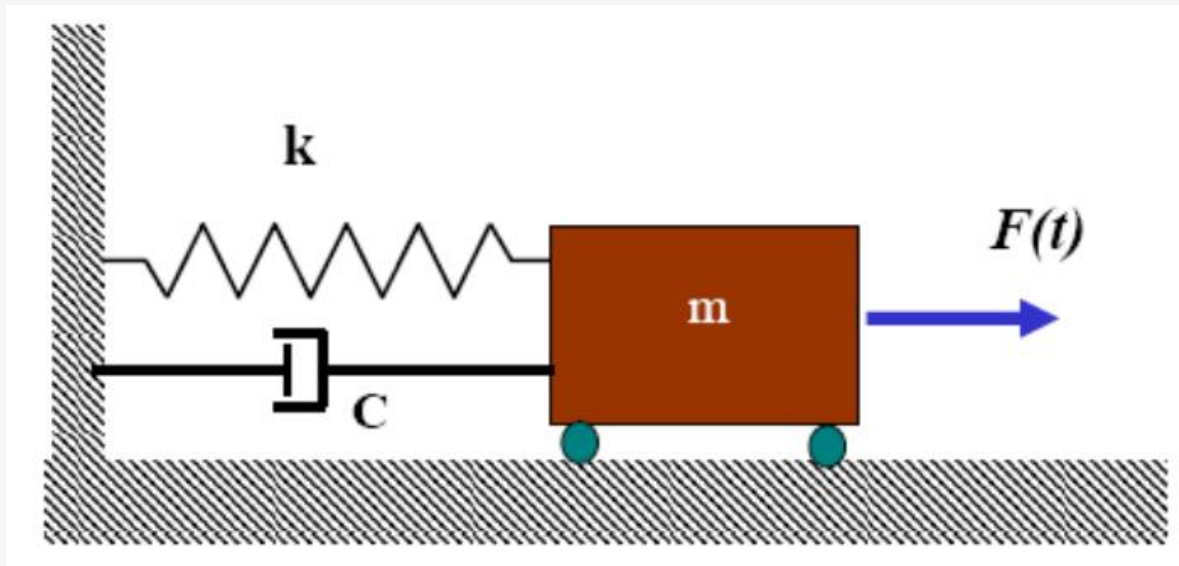
m – masa spremnika sa/bez vode
 EI – krutost na savijanje nosivog stupa
 L – duljina stupa
 ρ – masa stupa po jedinici duljine

Sustavi s jednim stupnjem slobode SDOF



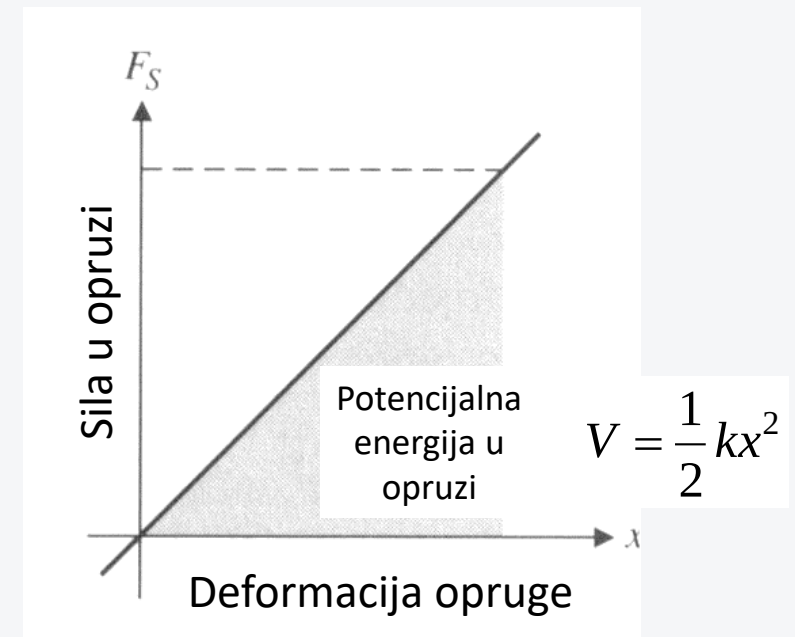
JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCIJE

Osnovne komponente dinamičkog sustava



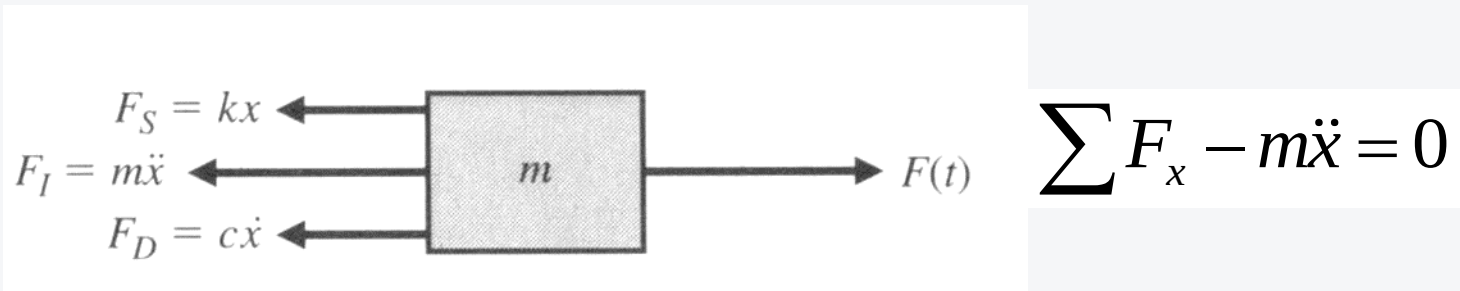
Mehanički / matematički model jednostavnog sustava s jednim stupnjem slobode SDOF

- Masa
- Krutost
- Prigušenje
- Opterećenje / sila



JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCIJE

D'Alembertov princip fiktivne ravnoteže

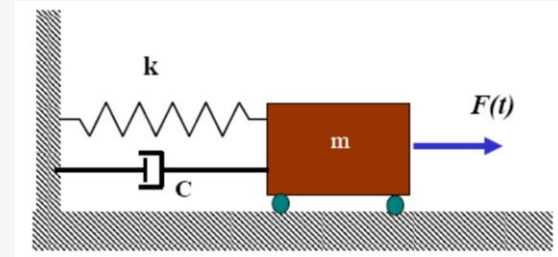


gdje su

$$F_S = kx \quad \text{elastična sila u opruzi (S – spring)}$$

$$F_D = m\dot{x} \quad \text{sila prigušenja (D – damping)}$$

$$F_I = -m\ddot{x} \quad \text{sila inercije (I – inercija)}$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Vlastita (prirodna)
kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCije

Energetski princip dinamičke ravnoteže

$$T + V = (\text{ukupna mehanička energija}) = \text{const.}$$

$$T(\text{kinetička energija}) + V(\text{potencijalna energija}) = \text{const.}$$

Kinetička energija **T**

(pohranjena u masi i proporcionalna kvadratu brzine)

Potencijalna energija **V**

(deformacijska energija pohranjena u opruzi i proporcionalna njenoj elastičnoj deformaciji)

Energetski pristup se temelji na
PRINCIPU OČUVANJE ENERGIJE
konzervativnih sustava:

**Ukupna energija je svo vrijeme
stalna / konstantna.**

Napomena:
PRIGUŠENJE JE ZANEMARENO.

Prigušenje je trošenje energije što je
u suprotnosti sa zakonom o očuvanju
energije konzervativnih sustava.

JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCije

Energetski princip dinamičke ravnoteže

T (kinetička energija) + V (potencijalna energija) = const.

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k2x\dot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Energetski pristup se temelji na
PRINCIPU OČUVANJE ENERGIJE
konzervativnih sustava:
Ukupna energija je svo vrijeme
stalna / konstantna.

Napomena:
PRIGUŠENJE JE ZANEMARENO.

Prigušenje je trošenje energije što je
u suprotnosti sa zakonom o očuvanju
energije konzervativnih sustava.

JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCije

Rayleigh-eva metoda

$$T + V = \text{const}$$

Za proizvoljno odabrana dva bliska vremenska trenutka vrijedi: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{const}$

1. trenutak : masa u položaju statičke ravnoteže (nema elastične deformacije ili energije deformacije u opruzi): $V_1 = 0$

2. trenutak : maksimalno produljenje opruge (brzina mase jednaka je nuli): $T_2 = 0$

$$T_1 + 0 = V_2 + 0$$

Maksimalna kinetička energija u položaju ravnoteže jednaka je maksimalnoj potencijalnoj energiji najudaljenijeg položaja.

$$T_{\max} = V_{\max}$$

JEDNADŽBA GIBANJA I VLASTITE FREKVENCije

Rayleigh-eva metoda

Maksimalna kinetička energija u položaju ravnoteže jednaka je maksimalnoj potencijalnoj energiji najudaljenijeg položaja.

Pretpostavimo jednadžbu pomaka oblika

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = A \sin \omega t$$

$$x_{max} = A \text{ kada je } \sin \omega t = 1$$

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t$$

$$\dot{x}_{max} = \omega A \text{ kada je } \cos \omega t = 1$$

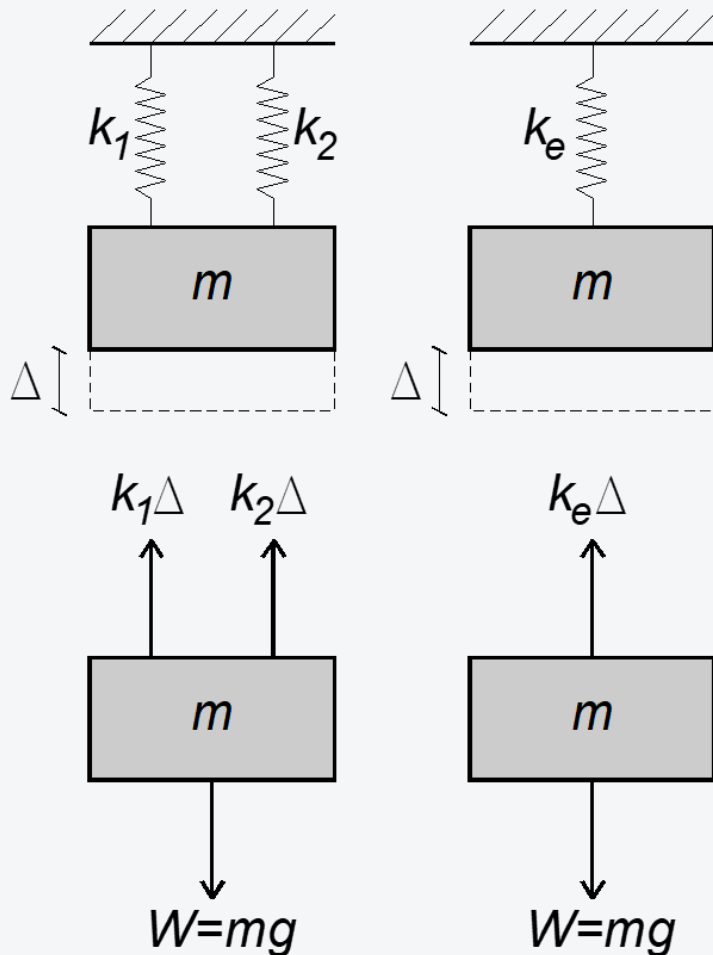
**Vlastita kružna
frekvencija (rad/s)**



Ekvivalentna (zamjenjujuća) krutost

SDOF = jedna masa + jedna opruga

Zamjenjujuća opruga = ekvivalentni opis elastične krutosti konstrukcije



Paralelni spoj opruga

$$k_e \Delta = (k_1 + k_2) \Delta$$

$$k_e = k_1 + k_2$$



$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i$$



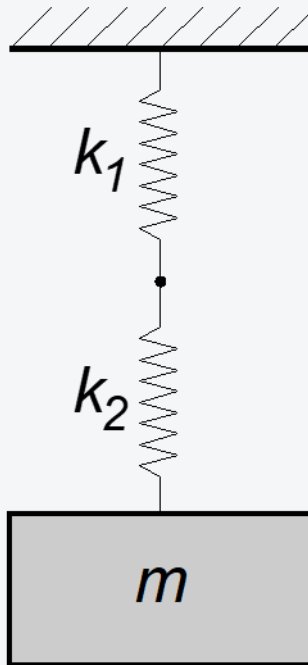
Rezultat:

Paralelnim spajanjem sustav postaje **krući** (veća je ukupna konstanta elastičnosti nego kod svake pojedine opruge), pa je za isti pomak potrebna veća sila.

Ekvivalentna (zamjenjujuća) krutost

SDOF = jedna masa + jedna opruga

Zamjenjujuća opruga = ekvivalentni opis elastične krutosti konstrukcije



Serijski spoj opruga

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\frac{W}{k_e} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



$$k_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

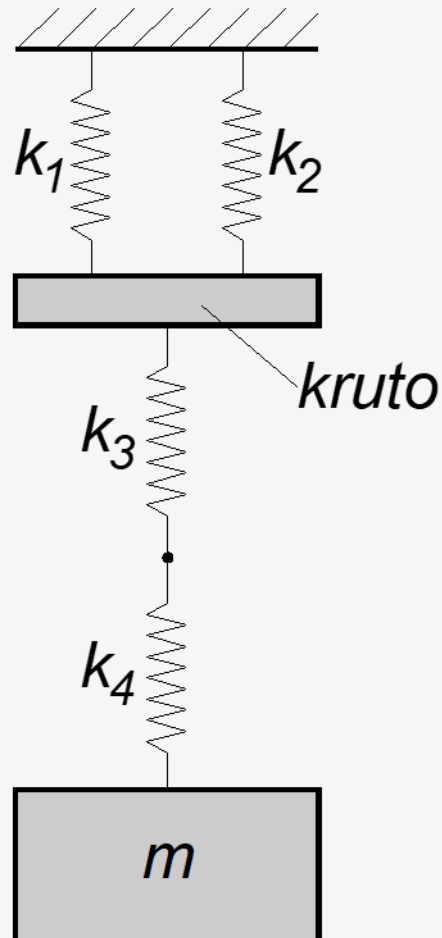


Rezultat:

Spajanjem opruga u seriju dobiva se **mekši (elastičniji) spoj** nego što je bilo koja opruga zasebno.

Ekvivalentna (zamjenjujuća) krutost

Primjer kombinacije paralelnog i serijskog spoja opruga



$$k_e = (k_e)_p + (k_e)_s$$

$$k_e = \frac{1}{\left[1/(k_e)_p\right] + \left[1/(k_e)_s\right]}$$

$$(k_e)_p = k_1 + k_2$$

$$(k_e)_s = \frac{1}{\left[1/(k_3)\right] + \left[1/(k_4)\right]}$$

$$k_e = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1 + k_2}\right) + \left(\frac{1}{k_3}\right) + \left(\frac{1}{k_4}\right)}$$